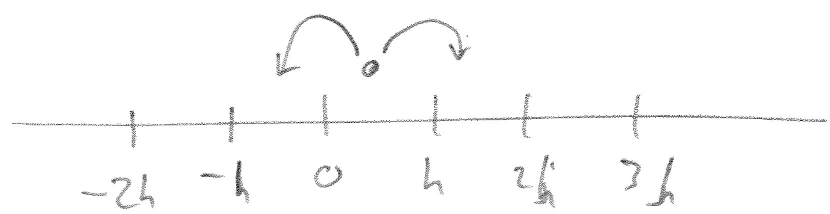
Satunnaiskävelijä

Jaetaan reaaliakseli $\mathbb{R}$ väleihin $I_{j,h} = [jh, (j+1)h)$, $h > 0$. Tarkastellaan partikkelia tai satunnaiskävelijää, joka hetken t_0 välein hyppää joko oikealle tai vasemmalle todennäköisyydellä $1/2$



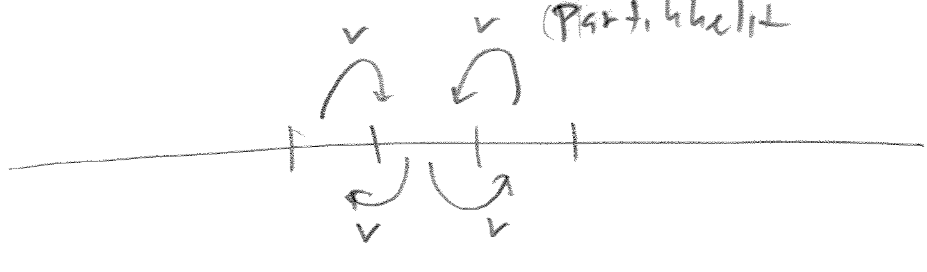
Tarkastellaan tilannetta jossa satunnaiskävelijöitä on suuri määrä.

Olkoon $u_j^h(t)$ partikkelien suhteellinen tiheys välille $I_{j,h}$ hetkellä t.

Olkoon v^h nopeus jolla partikkelitiheys siirtyy oikealle ja vasemmalle.

Saamme mallin

$$\text{(1)} \qquad \frac{du_j^h}{dt}(t) = v^h \Big[\underbrace{u_{j+1}^h(t) + u_{j-1}^h(t)}_{\text{väliin saapuvat partikkelit}} - \underbrace{2u_j^h(t)}_{\text{poistuvat partikkelit}} \Big]$$



Oletetaan, että $\nu^h = h^2$ ja merkitään

$$x_j^h = jh, \quad h \in \mathbb{R}_+, \; j \in \mathbb{Z}$$

$$u^h(x_j^h, t) = u_j^h(t).$$

Tarkastellaan tapausta, jossa $h \to 0$

Oletamme, että on olemassa rajafunktio

$U(x,t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, $U \in C^3(\mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}_+)$

jolle

$$U(x,t) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ x_j^h \to x}} u^h(x_j^h, t).$$

Kerrataan seuraavaksi Taylorin kaavan seurauksia

Kun $f \in C^3(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$, $h > 0$,

$$f(x+h) = f(x) + \frac{df}{dx}(x)\,h + \frac{1}{2}\frac{d^2f}{dx^2}(x)\,h^2 + \mathcal{O}(h^3)$$

$$f(x-h) = f(x) - \frac{df}{dx}(x)\,h + \frac{1}{2}\frac{d^2f}{dx^2}(x)\,h^2 + \mathcal{O}(h^3)$$

joten

$$\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = \frac{d^2f}{dx^2}(x) + \mathcal{O}(h)$$

Teemme approksimaation kun $|x - x_j^h| < h$,

$$(3) \quad \frac{u^h(x_{j+1}^h, t) - 2u^h(x_j^h, t) + u^h(x_{j-1}^h, t)}{h^2}$$

$$\approx \frac{v(x+h, t) - 2v(x, t) + v(x-h, t)}{h^2}$$

$$\approx \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, t) \quad + O(h)$$

ja

$$(3) \quad \frac{\partial u^h(x_j^h, t)}{\partial t} = \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} + O(h).$$

Yhtälöt (1), (2), (3) antavat nyt

$$(4) \quad \frac{\partial v}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, t)$$

kun $h \to 0$.

yhtälö (4) mallittaa diffuusiota (mustetta nesteessä) tai lämpötilaa aineessa jossa tapahtuu lämmönjohtumista.

Useammassa ulottuvuudessa, $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ yhtälö saa muodon

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = \Delta u(x,t), \quad x \in D, \; t \geq 0$$

missä

$$\Delta u = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^2 u.$$

Esim $\mathbb{R}^3$:ssa

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Merkitsemme $\mathbb{R}$-arvoiselle funktiolle $f: D \to \mathbb{R}$ ja vektoriarvoiselle funktiolle $\vec{H}: D \to \mathbb{R}^n$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}, \quad \nabla \cdot \vec{H}(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial H_j}{\partial x_j}(x)$$

$$\Delta f = \nabla \cdot \nabla f$$

Edellinen malli liittyy lämpöyhtälön ratkaisemiseen Finite Difference (FD) menetelmällä. Yhtälön

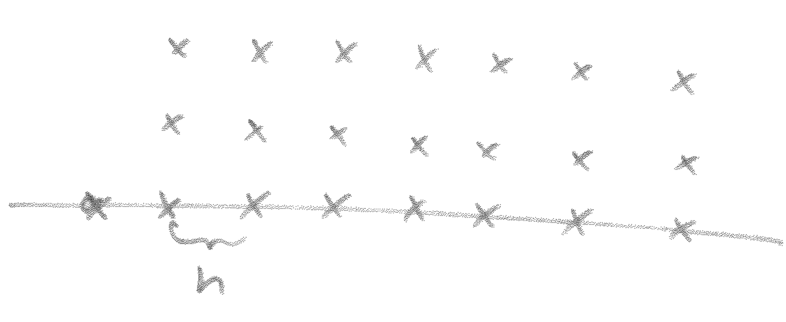
$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) & , \; t \geq 0, \; x \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = f(x) \in C_{comp}(\mathbb{R}) \end{cases}$$

likimääräinen ratkaisu voidaan löytää approksimaatiolla

$$u(x,t)\Big|_{x=h\cdot n,\; t=h\cdot m} = u_{nm} \quad , \; n \in \mathbb{Z}, \; m \in \mathbb{N}$$

$$\begin{cases} u_{n,m+1} - u_{n,m} = h\cdot\left(u_{n-1,m} - 2u_{n,m} + u_{n+1,m}\right) \\ u_{n,0} = f(n\cdot h) \end{cases}$$

missä $h > 0$ on pieni



ESIMERKKI RATKAISUSTA:

olkoon

$$g(x,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sigma^2}}, \qquad x \in \mathbb{R},\ \sigma > 0$$

$$\Phi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right),$$

eli $\Phi(x,t) = g(x, (2t)^2)$.

HT Tarkista suoralla laskulla, että

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\right)\Phi(x,t) = 0, \qquad t > 0,\ x \in \mathbb{R}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\right) u(x,t) = 0, \qquad t > 0,\ x \in \mathbb{R}$$

kun

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(x-z, t) f(z)\, dz.$$

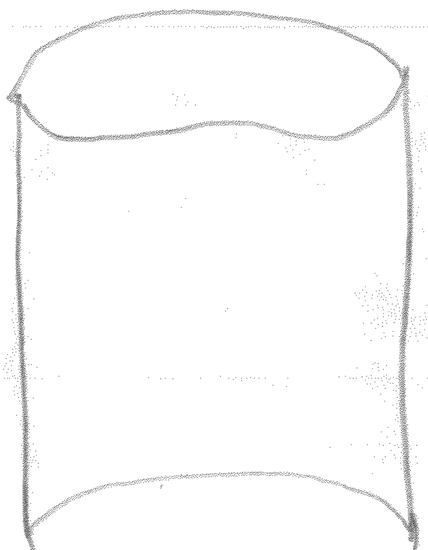
Lämpöyhtälön reuna-arvo-ongelma

Olkoon Ω C^1-sileäreunainen alue, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$,

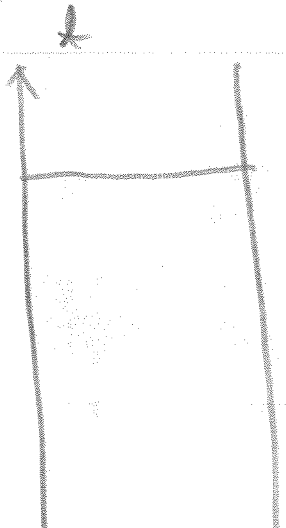
$$
\begin{cases}
\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x\right) u(x,t) = F(x,t), & x \in \Omega,\ t \in \mathbb{R}_+ \\
u|_{\partial\Omega \times \mathbb{R}} = g(x,t) \\
u|_{\Omega \times \{0\}} = \phi(x)
\end{cases}
$$

Yhtälölle etsitään usein ratkaisua luokasta

$$u \in C^2(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}_+)$$



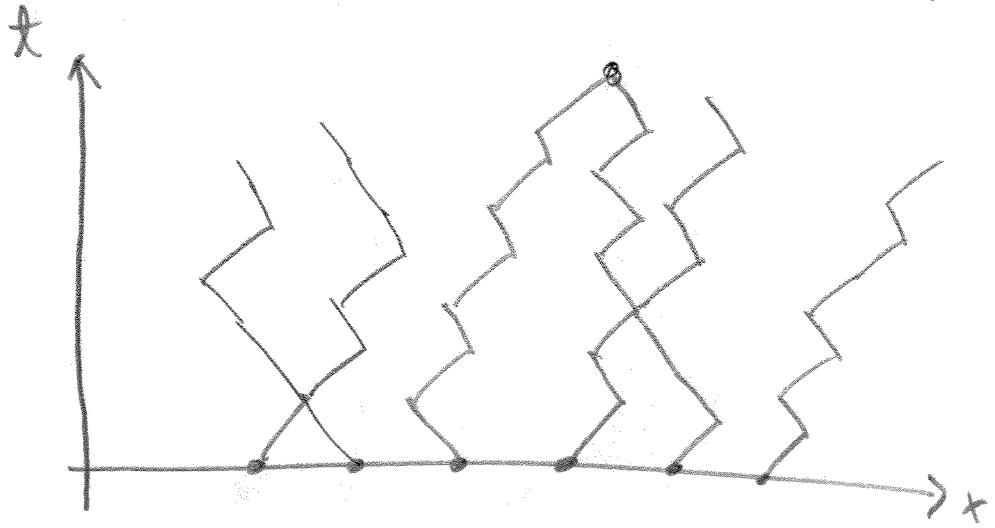
$\Omega \times [0,t]$



$(0,1) \times [0,t]$

Toinen mahdollinen reunaehto on $n \cdot \nabla u|_{\partial\Omega \times \mathbb{R}_+} = \tilde{g}$.

Satunnaiskävelijät ja Feynman-Kac



Olhoon

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 u(x,t) \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

Tilastollinen tulkinta:

$f(x) =$ satunnaiskävelijöiden tiheys pisteessä x hetkellä t

$u(x,t) =$ satunnaiskävelijöiden tiheys hetkellä t

—

Sama malli (1) pätee lämpötilalle kun lämpö johtuu homogeenisessa aineessa,

$f(x) =$ lämpötila hetkellä $t=0$

$u(x,t) =$ —〃— t

Diffuusioprosessissa (pisara mustetta vedessä)

$$u(x,t) = \text{muste-molekyylien tiheys}$$

Populaatiodynamiikassa

$u(x,t)$ = eläinlajin tiheys pisteessä x, hetkellä t

Epähomogeenisessa aineessa

$$\underbrace{c(x)}_{\text{ominais-lämpökapasiteetti}} \cdot \overbrace{\rho(x)}^{\text{tiheys}} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \nabla_x \cdot \Big(\underbrace{k(x)}_{\text{lämmönjohtavuus}} \nabla_x u(x,t) \Big)$$

Samanlaista mallia käytetään fotonitiheydelle optisessa tomografiassa

Populaatiodynamiikan saalistaja - saalis malli (Volterra-Lotka yhtälö) saaliseläinten lukumäärälle $p(t)$ ja saalistajien lukumäärälle $s(t)$,

$$p'(t) = (a_1 - a_2 s(t))\, p(t)$$

$$s'(t) = (a_3 p(t) - a_4)\, s(t)$$

voidaan liittää yhteen diffuusionmallin kanssa,

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x,t) = \Delta_x p(x,t) + [a_1 - a_2 s(x,t)]\, p(x,t)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} s(x,t) = \Delta_x s(x,t) + [a_3 p(x,t) - a_4]\, s(x,t)$$

Kemiassa vastaavia yhtälöitä kutsutaan reaktio-diffuusio-yhtälöiksi (eri aineiden konsentraatioille prosesseissa)

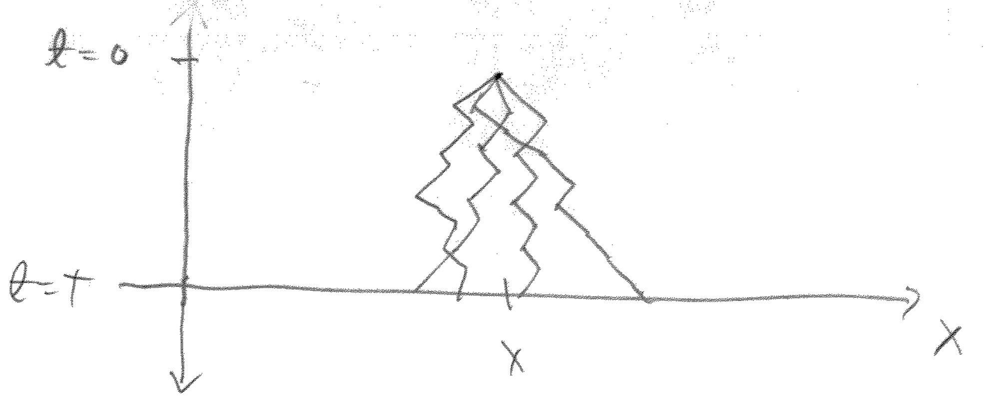
Palataan satunnaiskävelijämalliin (1+1)-ulotteisessa tapauksessa

Kaava (1) voidaan tulkita seuraavasti:

Olkoon $B_x(t)$ satunnaiskävelijä, joka hetkellä $t=0$ lähtee pisteestä x. Tällöin (Feynman-Kac-kaavan vastineen) nojalla

$$u(x,T) = \mathbb{E}\left(f(B_x(T))\right)$$

eli $u(x,T)$ on odotusarvo (ts. keskiarvo) funktion f arvolle pisteessä $B_x(t)$ johon satunnaiskävelijä on hetkellä $t=T$



Optiohinnoittelu

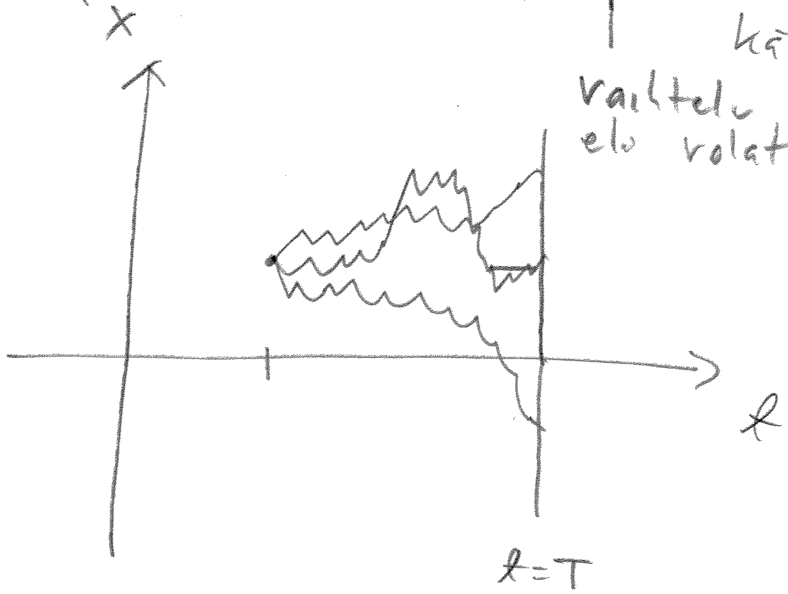
Olkoon x osakkeen hinta

$$\frac{dx}{dt} = x(t)\cdot\left[\, r + \sigma \frac{dW}{dt}(t) \right]$$

riskitön korko

W on satunnaiskävely

vaihtelu eli volatiliteetti



Olkoon $u(x,t;L)$ hinta optiolle joka antaa oikeuden ostaa osake hetkellä T hintaan L. Black-Scholes yhtälö antaa option reilun hinnan kun hetkellä t osakkeen hinta on x:

$$\frac{du}{dt}(x,t) = -\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + rx\frac{\partial u}{\partial x} - ru$$

$$u(x,t)\Big|_{t=T} = f(x) = \begin{cases} x-L, & \text{kun } x \geq L \\ 0, & \text{kun } x < L \end{cases}$$

Harmoniset funktiot

Jos lämpöyhtälön ratkaisu ei riipu ajasta, eli

$$u(x,t) = w(x) \quad , \; x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

Toteutuu Poissonin yhtälö

$$\Delta w(x) = F(x) \quad , \; x \in \Omega$$

$$w|_{\partial\Omega} = g(x)$$

Kun $F = 0$, yhtälöä sanotaan Laplace-yhtälöksi,

$$\Delta w(x) = 0 \quad , \; x \in \Omega)$$

ja sen ratkaisut ovat harmonisia funktioita.

H: Miten yhtälön $\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$, $x \in \Omega = [-1,1]^2$

ratkaisua voitaisiin approximoida FD-menetelmällä?

Huomio: Jos $w(x)$ toteuttaa yhtälön

$$(\Delta - \lambda)\, w(x) = 0 \quad , x \in \Omega$$

niin funktio

$$u(x,t) = w(x)\, e^{-\lambda t}$$

toteuttaa

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x\right) u(x,t) = 0,$$

sillä

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x\right)\left(w(x)\, e^{-\lambda t}\right)$$

$$= -\lambda \cdot w(x) e^{-\lambda t} - (\lambda w(x)) e^{-\lambda t} = 0.$$

Ht: Mitä tämä tarkoittaa fysikaalisesti, jos w on ratkaisu jolle $w|_{\partial\Omega} = 0$ ja $\lambda > 0$?

Finite difference (FD) - menetelmä yhtälölle

$$\Delta u(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 u(x,y) + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 u(x,y) = 0$$

D:ssä

$$u(x,y)\Big|_{\partial D} = f(x,y)$$

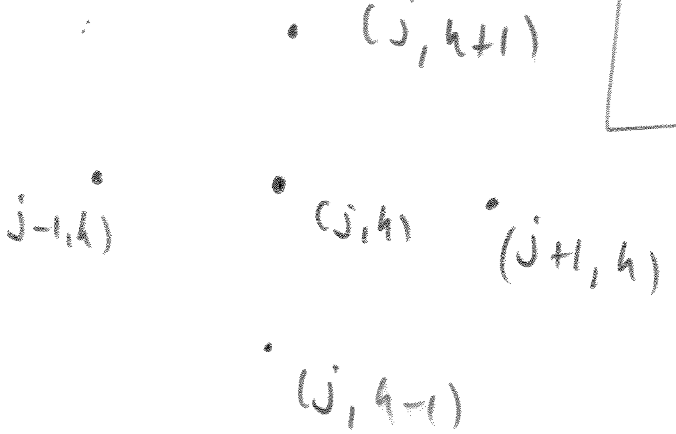
kun $D = [0,1]^2$ on seuraava,

$$u(jh, kh) \approx w_{j,k}, \quad h = \frac{1}{N}$$

$j,k \in \{0,1,\dots,N\}$

$$w_{j+1,k} + w_{j-1,k} + w_{j,k+1} + w_{j,k-1} - 4w_{j,k} = 0$$

$w_{j,k} = f_{j,k}$ kun j tai k saa arvon 0 tai N



0

Funktion $u : D \to \mathbb{R}$ kuvaaja, eli pinta

$$\Sigma = \{ (x, y, u(x,y)) \mid (x,y) \in \bar{D} \},$$

$D \subset \mathbb{R}^2$

on minimipinta jos se on pinta-alaltaan pienin pinta, jolle

$$u(x,y) = f(x,y) \quad , (x,y) \in \partial D$$

jollekin funktiolle $f : \partial D \to \mathbb{R}$.

Minimipinta toteuttaa yhtälön

$$(1) \qquad \nabla \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \nabla u \right] = 0$$

eli

$$(2) \qquad (1+|u_x|^2)\, u_{xx} - 2 u_x u_y u_{xy} + (1+|u_y|^2)\, u_{xx} = 0$$

missä $u_x = \frac{\partial}{\partial x} u$, $u_{xy} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} u$ jne.

Geometrisesti (1) tarkoittaa, että Σ:n keskikaarevuus on nolla

-1

Linearisoidaan minimipintayhtälö, eli kirjatetaan

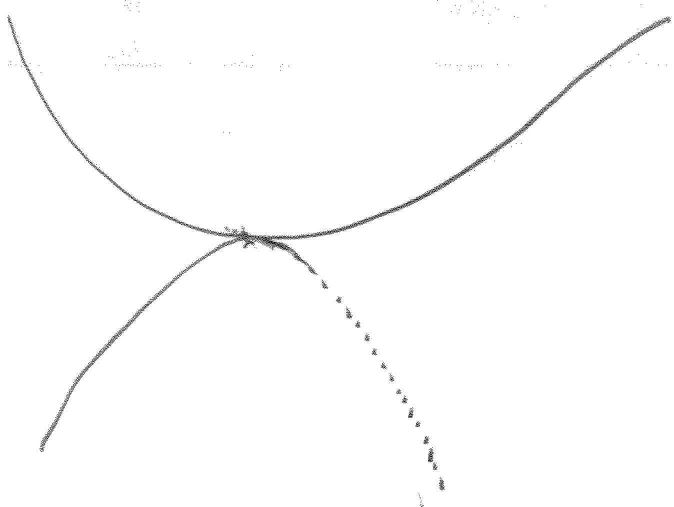
$$u(x,y) = \varepsilon w(x,y)$$

sijoitetaan tämä yhtälöön (2) ja approksimoidaan $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ -termejä nollalla. Saamme

$$\varepsilon(w_{xx} + w_{yy}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = 0$$

eli linearisoitu yhtälö (2) on

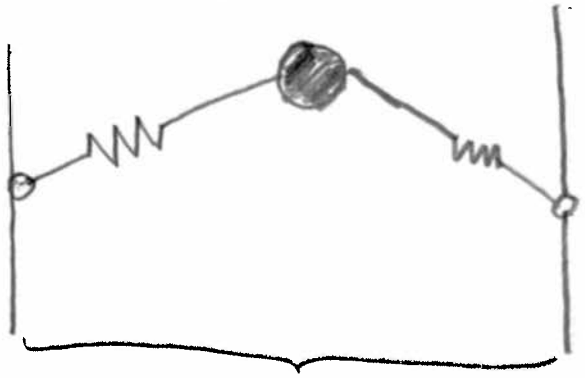
$$\Delta w = w_{xx} + w_{yy} = 0$$



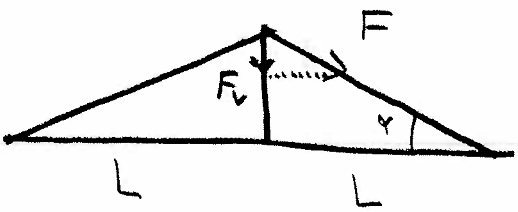
2

Aaltoyhtälö.

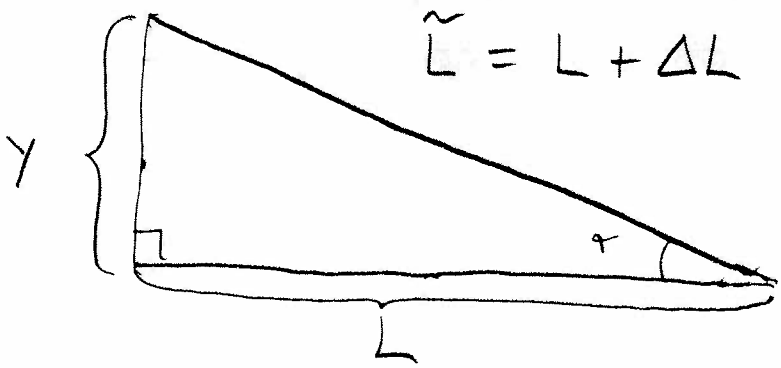
Tarkastellaan jousien varaan ripustettua palloa joka voi liikkua vain ylös/alas -suunnassa. Painovoiman vaikutus systeemiseen unohdetaan, samoin kitka



kaaviona:



palloon kohdistuu yhdestä jousesta voima F jonka pystysuora komponentti on F_v



Nyt Pythagoraan lauseen nojalla

$$\tilde{L} = L + \Delta L$$

$$= \sqrt{L^2 + y^2}, \quad y = L \cdot \tan \varphi$$

Jousen palloon kohdistamaa ramaa mallitetaan kaavalla

$$|\vec{F}| = f_0 + \mu \cdot \Delta L$$

ja $\vec{F}$:n pystysuora komponentti on

$$F_v = -|F| \sin \varphi.$$

Seuraavaksi teemme approksimaatiot:

$$\sqrt{1+z} = 1 + \frac{1}{2} z + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot z^2 + \ldots$$
$$= 1 + \frac{1}{2} z + \mathcal{O}(z^2),$$

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 + \ldots = 1 - z + \mathcal{O}(z^2)$$

kun z on pieni, $|z| \leq \frac{1}{2}$

Nyt

$$\tilde{L} = \sqrt{L^2 + y^2}$$

$$= L \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{y}{L}\right)^2}$$

$$= L\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{L}\right)^2 + \mathcal{O}(y^4)\right)$$

$$= L + \mathcal{O}(y^2)$$

eli $\quad \Delta L = \mathcal{O}(y^2)$.

Lisäksi

$$\sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{L^2+y^2}} = \frac{y}{L(1+\mathcal{O}(y^2))}$$

$$= \frac{y}{L}(1 + \mathcal{O}(y^2))$$

$$= \frac{y}{L} + \mathcal{O}(y^3).$$

Tällöin

$$F_y = -\left(f_0 + \mu \cdot \mathcal{O}(y^2)\right) \cdot \frac{y}{L}(1 + \mathcal{O}(y^2))$$

$$= -f_0 \cdot \frac{y}{L} + \mathcal{O}(y^2)$$

Olkoon $y(t)$ pallon korkeus hetkellä t. Newtonin lain $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$, nojalla, missä m on pallon massa, saamme

$$y''(t) = -\frac{f_0}{mL} y(t) + O(y(t)^2)$$

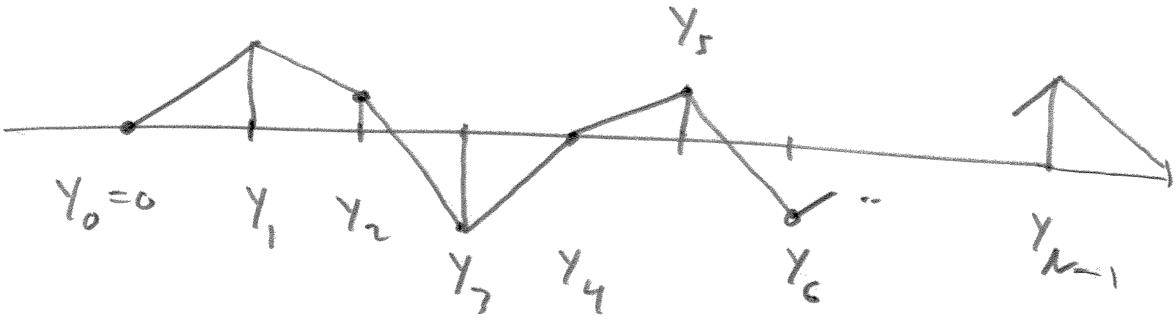
Teemme approksimaation ja korvaamme $O(y^2)$ termin nollalle. Tällöin $y(t) \approx \underline{y}(t)$, missä

$$\underline{y}''(t) = -k\,\underline{y}(t) \quad , \quad k = \frac{f_0}{mL}.$$

yhtälön ratkaisu on muotoa

$$\underline{y}(t) = A\cos(\lambda t) + B\sin(\lambda t),$$
$$\lambda = \sqrt{k}\ , \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

$(N-1)$ palloa, j:nnen pallon korkeus $y_j(t)$, x-koordinaatti $x_j = jh$, $h = \frac{1}{N}$



Muodostamme liikeyhtälön

$$
\begin{aligned}
y_j''(t) &= -k\left[y_j(t) - y_{j-1}(t)\right] \\
&\quad - k\left[y_j(t) - y_{j+1}(t)\right] \\
&= k\left(y_{j+1}(t) - 2y_j(t) + y_j(t)\right)
\end{aligned}
$$

Oletetaan, että on olemassa sileä funktio $u(x,t)$ siten, että

$$u(x,t)\Big|_{x=jh} = y_j(t) + O(h)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\Big|_{x=jh} = y_j''(t) + O(h)$$

$$k = k_h = \frac{c^2}{h^2},$$