1,1) LASKUISSA TARVITAAN MUUTTUJANVAIHTOKAAVAA:

LÄHTÖKOHTA SIIHEN ON SEURAAVA (JOS EI TUTTUA) ...
(ITSE LASKU ALKAA 3. SIVULTA)

OLKOON $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, JATKUVA,

$$h : [c, D] \to [h(c), h(D)], \text{ derivoituva}$$

, MISSÄ $h(c) = a$, $h(D) = b$

KOSKA f JATKUVA $\exists F$, jolle $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in]a, b[$

Silloin

$$\int_c^D f(h(x))h'(x)\,dx = \int_c^D \frac{d(F(h(x)))}{dx}\,dx = F(h(D)) - F(h(c))$$

$$= F(b) - F(a) = \int_a^b \frac{dF(x)}{dx}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

SIIS toi tulee ANALYYSIN peruslauseen avulla

$$\boxed{\int_{h(c)}^{h(D)} f(x)\,dx = \int_c^D f(h(x))h'(x)\,dx}$$

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ JVA

MUUNNOS, mikä tehdään

$h : [c, D] \to [h(c), h(D)]$

DERIVOITUVA

NO NYT KUN toi EI ihan AINA riitä

ON KYSYMYS päteekö toi SAMA KAAVA yleisemmmin?, SIIS:

ENTÄ JOS f ON kompleksiarvoinen?

tai VAIN rajoitettu

tai integroituva, neliöintegroituva?

1,2)

JOS f KOMPLEKSIARVOINEN

$f : [a,b] \to \mathbb{C}$, h kuten edellä

menee ~~VARMAANKIN~~ joten kin tonnepäin ...
HAJOTETAAN OSIIN ...

$$f(x) = f_1(x) + i f_2(x) \quad , f_1, f_2 \text{ reaaliarvoisia}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f_1(x)dx + i \int_a^b f_2(x)dx$$

Joten kaavalla
$$\int_a^b f_1(x)dx = \int_C^D f_1(h(x))\, h'(x)dx$$

$$i\int_a^b f_2(x)dx = i \int_C^D f_2(h(x))\, h'(x)dx$$

Joten
$$\int_a^b f(x)dx = \int_C^D (f_1(h(x)) + i f_2(h(x)))\, h'(x)\, dx$$

Siis
$$\int_a^b f(x)dx = \int_C^D f(h(x))\, h'(x)\, dx \qquad \text{ok toimii}$$

kompleksiarvoiselle, jatkuvalle

JOS ASIA KIINNOSTAA ENEMMÄN, ON ILKKA HOLOPAISEN MONISTEESSA REAALIANALYYSI 1 todistettu, että SAMA KAAVA PÄTEE, kun $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mitallinen, rajoitettu (menee jo huomattavasti vaikeammaksi) JA h absoluuttisesti jatkuva.

myöskin pätee, f integroituva, h ABS-~~JATKUVA~~, AIDOSTI MONOTONINEN ... (JONES, FRANK, LEBESGUE INTEGRATION ON EUCLIDEAN SPACE)

toi riittää tässä, koska ~~tarkastelaan~~ tarkastellaan $f \in L^2([a,b])$

(CS-EPÄYHT) Tieto sanoo, että JOS $f \in L^2([a,b]) \Rightarrow f$ integroituva

1,3 SIIS KUN $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$, $f \in L^2([-\pi,\pi])$

JA MUUNNOS h ESIM DERIVOITUVA VOIDAAN

MUUTTUJANVAIHTOKAAVAA KÄYTTÄÄ!

$H : [-\pi,\pi] \to [-\pi,\pi]$, $H(x) = -x$

$H(D) = \tilde{\pi}$

eli $-D = \tilde{\pi}$

ts. $D = -\tilde{\pi}$ jne

$H'(x) = -1$

$$* \quad \hat{f}(n) = \int_{-\tilde{\pi}}^{\tilde{\pi}} f(x) \frac{e^{-inx}}{\sqrt{2\pi}} dx = \int_{\tilde{\pi}}^{-\tilde{\pi}} f(-x) \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} (-1) dx$$

KUN $f(-x) = f(x)$ eli PARILLINEN SAADAAN

$$\hat{f}(n) = \int_{-\tilde{\pi}}^{\tilde{\pi}} f(-x) \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} dx = \int_{-\tilde{\pi}}^{\tilde{\pi}} f(x) \frac{e^{-i(-n)x}}{\sqrt{2\pi}} dx = \hat{f}(-n)$$

SIIS <u>PARILLISELLE</u> $L^2([-\pi,\pi])$ funktiolle pätee

$$\underline{\underline{\hat{f}(n) = \hat{f}(-n)}} \quad , \forall n \in \mathbb{Z}$$

Lisäksi PAR. funktio VOIDAAN esittää $f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ joten

$$\hat{f}(n) = \int_{-\tilde{\pi}}^{\tilde{\pi}} \frac{f(x)+f(-x)}{2} \frac{e^{-inx}}{\sqrt{2\pi}} dx = \int_{-\tilde{\pi}}^{\tilde{\pi}} \frac{f(x)}{2} \frac{e^{-inx}}{\sqrt{2\pi}} dx + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(-x)}{2} \frac{e^{-inx}}{\sqrt{2\pi}} dx$$

KUN JÄLKIMMÄISEEN YHTEENLASKETTAVAAN TEHDÄÄN MUUTTUJANVAIHTO (SIIS SAMA MUUTOS, KUN YLÄPUOLELLA *) SAADAAN

$$\hat{f}(n) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x)}{2} \frac{e^{-inx}}{\sqrt{2\pi}} dx + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x)}{2} \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} dx = \int_{-\pi}^{\tilde{\pi}} \frac{f(x)}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \right) = \int_{-\pi}^{\tilde{\pi}} f(x) \frac{\cos(nx)}{\sqrt{2\pi}} dx$$

KOSKA KUITENKIN TOISAALTA

$$\hat{f}(n) = \int_{-\pi}^{\tilde{\pi}} f(x) \frac{e^{-inx}}{\sqrt{2\pi}} dx \overset{\text{euler}}{=} \int_{-\tilde{\pi}}^{\tilde{\pi}} f(x) \frac{\cos(nx)}{\sqrt{2\pi}} dx + i \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\sin(nx)}{\sqrt{2\pi}} dx$$

täytyy $i \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\sin(nx)}{\sqrt{2\pi}} dx = 0$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx = 0$$

Joten SIIS

HUOM SIIS PARILLINEN FUNKTIO VOIDAAN ESITTÄÄ KANNASSA : $\left\{ \frac{\cos(nx)}{\sqrt{2\pi}} \right\}_{n=0}^{\infty}$

2) f reaaliarvoinen ~~kompleksikonjugaatti osuu VAIN e joten~~

$$\overline{\hat{f}(n)} = \overline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} f(x)\,dx} \overset{\text{Euler}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx + \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

siis

$$\overline{\hat{f}(n)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx + i\sin nx)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx}\,dx = \hat{f}(-n)$$

koska siis $e^{inx} = e^{-i(-n)x}$

siis $\overline{\hat{f}(n)} = \hat{f}(-n)$

toisaalta $\hat{f}(n) = \overline{\overline{\hat{f}(n)}} = \overline{\hat{f}(-n)}$ edellisen vuoksi!!

siis f reaaliarvoinen

$$\begin{cases} \overline{\hat{f}(n)} = \hat{f}(-n) \\ \hat{f}(n) = \overline{\hat{f}(-n)} \end{cases}$$

3) $g:[-L,L]\to\mathbb{C}$, ja / oletetaan $\int_{-L}^{L}|g(x)|^2dx<\infty$ ts. $g\in L^2[-L,L]$

$$\hat{g}(n)=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}g(x)e^{\frac{-inx}{L}}dx$$ Hyvin määritelty $\forall n$

koska $g\in L^2\to g\in L^2\to g\in L^1$

$H:[-\pi,\pi]\to[-L,L]$, $H(x)=\frac{xL}{\pi}$, $H'(x)=\frac{L}{\pi}$, $H(\pi)=L$, $H(-\pi)=-L$

muuttujanvaihtokaava

$$\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}g(x)e^{\frac{-inx\pi}{L}}dx=\frac{1}{2L}\int_{-\pi}^{\pi}g\left(\frac{xL}{\pi}\right)e^{-inx}\frac{L}{\pi}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g\left(\frac{xL}{\pi}\right)e^{-inx}dx$$

$f:=g\circ h$ joten

$f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{C}$ jolle

$\forall n\quad \hat{f}(n)=\hat{g}(n)$

Jos nyt on tieto, että $g\in C^1$ silloin $f\in C^1$

silloin $f(x)=\sum\hat{f}(n)e^{inx}$ $\leftarrow$ pisteittäin (tieto)

eli $g\left(\frac{xL}{\pi}\right)=\sum\hat{g}(n)e^{inx}$ joten

voidaan tehdä muuttujanvaihto

$y=\frac{xL}{\pi}\iff x=\frac{y\pi}{L}$

$g(y)=\sum\hat{g}(n)e^{\frac{in\pi y}{L}}$ pisteittäin

Jos $g\in L^2$

tieto fourier-sarja suppenee L^2:ssa m.k

silloin $g(y)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{g}(n)e^{\frac{in\pi y}{L}}$ m.k

Jos oletetaan $g\in L^2[-L,L]$ silloin $f\in L^2[-\pi,\pi]$

4) f, g 2π-periodisia , $f, g \in L^2[-\pi, \pi]$

$$h(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(z) g(x-z)\, dz$$ joten

$$\hat{h}(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(z) g(x-z)\, dz\, e^{-inx}\, dx$$

vaihdetaan integrointijärjestys (Fubini sallii)

$$\hat{h}(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(z) \left(\int_{-\pi}^{\pi} g(x-z)\, e^{-inx}\, dx \right) dz$$

tutkitaan integraalia suluissa ja tehdään kikka

$$e^{-inx} = e^{-in(x-z+z)} = e^{-in(x-z)} e^{-inz}$$

$$* = \int_{-\pi}^{\pi} g(x-z) e^{-inx}\, dx = e^{-inz} \int_{-\pi}^{\pi} g(x-z) e^{-in(x-z)}\, dx$$

tehdään muuttujanvaihto $H: x \to x+z$ siis $H'(x) = 1$

$$* = e^{-inz} \int_{-\pi-z}^{\pi-z} g(x) e^{-inx}\, dx$$, koska g ja e^{-inx} 2π-periodisia

silloin integraalin arvo ei muutu "siirrossa"

$$* \quad e^{-inz} \int_{-\pi-z}^{\pi-z} g(x) e^{-inx}\, dx = e^{-inz} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{-inx}\, dx = e^{-inz} \hat{g}(n) \cdot \sqrt{2\pi}$$

joten $$\hat{h}(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(z) e^{-inz} \hat{g}(n) \sqrt{2\pi}\, dz = \hat{g}(n) \int_{-\pi}^{\pi} f(z) e^{-inz}\, dz$$

siis $\hat{h}(n) = \hat{g}(n) \sqrt{2\pi} \hat{f}(n) = C \hat{f}(n) \hat{g}(n)$, missä

$C = \sqrt{2\pi}$