Matematiikan sovelluksia, syksy 2012
8. harjoitus 30.11.2012

1. Osoita, että jos $f(-x) = f(x)$, niin fourier-kertoimille

$$\widehat{f}(n) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{e^{-inx}}{\sqrt{2\pi}}dx$$

pätee seuraava ominaisuus:

$$\widehat{f}(n) = \widehat{f}(-n)$$

ja osoita, että myös pätee seuraavaa:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sin(nx)dx = 0$$

2. Mitä seuraa funktion $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ Fourier-kertoimille

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}f(x)dx$$

siitä, että f on realiarvoinen ($f(x) \in \mathbb{R}$)?

3. Osoita vaihtamalla integrointimuuttuja x muuttujaksi $z = \frac{L}{\pi}x$, että funktio $g : [-L, L] \to \mathbb{C}$, voidaan esittää muodossa:

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{L}}$$

missä:

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} g(x)e^{\frac{-in\pi x}{L}}dx$$

4. Osoita, että jos g ja f ovat 2π-periodisia funktioita, niin niiden konvoluutiolle:

$$h(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(z)g(x-z)dz$$

pätee seuraavaa:

$$\widehat{h}(n) = c\widehat{f}(n)\widehat{g}(n)$$

missä c on vakio.