7)

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \chi_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}(x) e^{-i \cdot 0 \cdot x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \pi = \underline{\underline{\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}}}$$

SAMALLA IDEALLA, KUN $n \neq 0$

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-inx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Big/_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{e^{-inx}}{-in} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^{-in\pi/2}}{-in} + \frac{e^{in\pi/2}}{in} \right)$$

SIIS

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, in} \left(e^{in\pi/2} - e^{-in\pi/2} \right) = \frac{2i \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}\, i n} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\, n}}}$$

---

tosta voi vielä hiukka sievennellä ... jos tuntuu ...

KUN $|2n|$ ON PARILLINEN $\sin\left(\frac{2n\pi}{2}\right) = \sin(n\pi) = 0$

ts $c_{2n} = 0, \; n \in \mathbb{Z}, \; n \neq 0$

"PARITTOMAT" JAKAUTUU KAHTEEN OSAAN"

JA $c_{4n+1} = \frac{\sqrt{2}}{(4n+1)\sqrt{\pi}} \sin\left(\frac{(4n+1)\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{(4n+1)\sqrt{\pi}}, \; n \in \mathbb{Z}$

JA $c_{4n+3} = \frac{\sqrt{2}}{(4n+3)\sqrt{\pi}} \cdot (-1) = \frac{-\sqrt{2}}{(4n+3)\sqrt{\pi}}, \; n \in \mathbb{Z}$

2) $$f(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}$$

SISÄTULOAVARUUDESSA "LUONNOLLINEN NORMI"
ON YHTEYDESSÄ SISÄTULOON, TS.

$$\|f\|_{L^2}^2 = \langle f, f \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{f(x)}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$$

NIINPÄ

$$\langle f, f \rangle = \left\langle \sum_{n=-N}^{N} c_n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \sum_{k=-N}^{N} c_k \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \right\rangle$$

KOSKA SISÄTULO ON LINEAARINEN operaatio
JA SUMMATTAVIA ÄÄRELLINEN MÄÄRÄ
VOISUMMAT tempaista sisätulosta ulos ~~

TS

$$\langle f, f \rangle = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^{N} \sum_{k=-N}^{N} c_n \overline{c_k} \langle e^{inx}, e^{ikx} \rangle$$

KOSKA $\langle e^{inx}, e^{ikx} \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-ikx}\,dx$

JA EDELLISISSÄ LASKAREISSA SAATIIN tolle
tulos $\langle e^{inx}, e^{ikx} \rangle = \begin{cases} 2\pi, & n = k \\ 0, & \text{muuten} \end{cases}$

NIIN

$$\langle f, f \rangle = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2 \cdot 2\pi = \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2$$

(TÄÄ yleistyy PLANCHEREL-KAAVAKSI
L^2- funktioille ts)

$L^2[-\pi, \pi]$ funktiolla JA NIIDEN fourier-kertoimille
$\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ ON "YKSIKÄSITTEINEN VASTAAVUUS"

3 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, jolle $A^T = A$

Realiselle matriisille $A^T = A^*$

ts. koska Hilbertin avaruuksissa Riesz-esityslauseen seurauksena on jokaiselle lineaarikuvaukselle $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ olemassa adjoint-operaattori T^* siis lineaarikuvaus $T^*: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, jolle pätee yhteys $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle, \quad \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ on sisätulo}$$

siis realiselle symmetriselle matriisille A pätee lause:

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

tällöin jos uskoo ton ......

ja $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, $x_1, x_2 \neq 0$

$$\lambda_1 \langle x_1, x_2 \rangle = \langle \lambda_1 x_1, x_2 \rangle = \langle A x_1, x_2 \rangle$$

$$= \langle x_1, A x_2 \rangle = \langle x_1, \lambda_2 x_2 \rangle = \lambda_2 \langle x_1, x_2 \rangle$$

tällöin siis

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\langle x_1, x_2 \rangle = 0 \quad \text{jollon } \langle x_1, x_2 \rangle = 0$$

koska $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ joten $x_1 \perp x_2$