

1. Laske Fourier-kertoimet

$$C_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

funktiolle

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

2. Osoita, että funktiolle:

$$f(x) = \sum_{n=-N}^N C_n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}$$

Pätee:

$$\|f\|_{L_2}^2 = \sum_{n=-N}^N |C_n|^2$$

3. Olkoot  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  matriisi, jolle  $A^T = A$  eli:

$$A = (a_{jk})_{j,k=1}^n, \quad a_{jk} = a_{kj} \in \mathbb{R}$$

Olkoot  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  ja  
 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ ,  $x_1, x_2 \neq 0$  vektoreita, joille:

$$Ax_j = \lambda_j x_j \quad j = 1, 2$$

Osoita, että:

$$x_1 \perp x_2$$

Jatkuu seuraavalla sivulla!

4. Tutustu seuraaviin appletteihin. Kohdissa a,b,c:  
<http://www.falstad.com/fourier/index.html>
- a) Tässä appletissa valitse "triangle-funktio" ja tarkastele sini- ja cosinisarjojen muuttumista naputtelemalla "phase-shift-nappia". Minkä ominaisuuden voit havaita tällöin sarjoissa? Miksi sama ei tapahdu "sawtooth-funktiolla"?
- b) Tarkastele "square-funktion" avulla fourier-sarjan suppenemista. Lisää "number of terms" liukunapulla klikaten termejä vaiheittain fourier-sarjaan. Mitä voit kertoa pisteittäisestä suppenemisestä?
- c) Tarkastele "square-funktiota" täysillä fourier-kertoimilla. Mitä tapahtuu, kun alat naputella "high-pass filteriä". Mieti mihin tällaista suodatusta voisi käyttää?
- d) <http://www.malinc.se/math/trigonometry/musicen.php>  
Tutustu appletissa oleviin kohtiin "The frequencies of the notes" ja "Overtones". Mieti fourier-sarjan suhdetta vaikkapa johonkin ääneen... vaikkapa laulettuun tai soitettuun yksittäiseen nuottiin!
- e) [http://music.columbia.edu/cmcmusicandcomputers/chapter4/04\\_03.php](http://music.columbia.edu/cmcmusicandcomputers/chapter4/04_03.php)  
Tutustu erilaisiin suodatustyypppeihin. Kohdassa "Four Basic Types of Filters" on asiaa selitetty. Kokeile tähän kohtaan liitetyllä "applet 4.5 using filter" vaikkapa valkoista kohinaa ja sen muuntumista eri suodatusten mukana.