1) $\|f\|_1 = \int_0^T |f(t)|dt$, MISSÄ $f \in C([0,T])$

KOSKA $[0,T]$ SULJETTU VÄLI SIIS KOMPAKTI

$\Rightarrow \forall t \in [0,T] \ \exists M \in \mathbb{R}$ s.e

$0 \leq |f(t)| \leq M$ (TS. JATKUVA FUNKTIO

SAA SUURIMMAN JA PIENIMMÄN ARVON KOMPAKTISSA

JOUKOSSA.)

NIINPÄ M.V $f \in C([0,T])$

$\|f\|_1 = \int_0^T |f(t)|dt \leq M \int_0^T dt = MT < \infty$

TS. $\|\cdot\|_1 : C([0,T]) \to [0,\infty)$ ON HYVIN

MÄÄRITELTY $\forall f$ sitten tolle kuvaukselle

täytyy osoitta vielä 3 ehtoA :

(N1) $\|f\|_1 = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$

$\Leftarrow f = 0 \Rightarrow \int_0^T 0\,dt = 0$ SIIS $\|f\|_1 = 0$

$\Rightarrow \|f\|_1 = 0 \Rightarrow \int_0^T |f(t)|dt = 0 \Rightarrow f \equiv 0$,

KOSKA f JATKUVA, JOLLOIN $\nexists t \in [0,T]$ s.e

$|f(t)| > 0$ MUUTEN RISTIRIITA KOSKA

tällöin SIIS OLIS JOKIN YMPÄRISTÖ, MISSÄ

$|f(t)|$ OLISI AIDOSTI POSITIIVINEN JA

integraali EI ENÄÄ NOLLA !!

(N2) $\|\lambda f\|_1 = \int_0^T |\lambda f(t)|\,dt = |\lambda| \int_0^T |f(t)|\,dt = |\lambda|\,\|f\|_1$

integraalin "homogeenisyys" ominaisuus

(N3) $\|f+g\|_1 = \int_0^T |f(t)+g(t)|\,dt$ m.v. $f,g \in C([0,T])$

koska m.v. $t \in [0,T]$ "tavallinen kolmioepäyhtälö"

$|f(t)+g(t)| \le |f(t)| + |g(t)|$

Joten integraalin monotonisuus ominaisuus

$\forall t \in [0,T] \quad |f(t)+g(t)| \le |f(t)| + |g(t)|$

$\Rightarrow \int_0^T |f(t)+g(t)|\,dt \le \int_0^T (|f(t)| + |g(t)|)\,dt = \|f\|_1 + \|g\|_1$

siis $\|f+g\|_1 \le \|f\|_1 + \|g\|_1$

---

2)

$$f_1(t) = e^{int}, \quad t \in [0, 2\pi]$$
$$f_2(t) = e^{imt}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

$n, m \in \mathbb{Z}$

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_0^{2\pi} e^{int} \overline{e^{imt}} \, dt$$

KOSKA $e^{imt} = \cos mt + i \sin mt$

$$\overline{e^{imt}} = \cos mt - i \sin mt = e^{-imt}$$

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_0^{2\pi} e^{int} e^{-imt} \, dt = \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)t} \, dt$$

1° $n \neq m \Rightarrow \langle f_1, f_2 \rangle = \Big|_0^{2\pi} \frac{e^{i(n-m)t}}{i(n-m)} dt = 0$

2° $n = m \Rightarrow \langle f_1, f_2 \rangle = \int_0^{2\pi} e^{i \cdot 0 \cdot t} dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$

ts $\|f_1\|_2^2 = \int_0^{2\pi} e^{int} \overline{e^{int}} = 2\pi$ siis $\|f_1\|_2 = \sqrt{2\pi}$

HUOM JOS tehdään normeeraus !!!

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f \bar{g} \, dt \Rightarrow$$

$$\langle e^{int}, e^{int} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{int} \overline{e^{int}} dt = \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi = 1$$

$$\langle e^{int}, e^{imt} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{int} \overline{e^{imt}} dt = \frac{1}{2\pi} \cdot 0 = 0$$

TALLOIN SAADAAN ORTONORMAALI PERHE

$\{e^{int}\}$, $n \in \mathbb{Z}$ JOKA OSOITTAUTUU KANNAKSI HILBERT AVARUUDESSA $L^2([0, \pi])$

3) $\int_0^{2\pi} \sin(nt)\sin(mt)\,dt \quad , \ n,m \in \mathbb{Z}$

KOSKA $\sin(nt) = \dfrac{e^{int} - e^{-int}}{2i}$

TÄLLÖIN

$$\sin(nt)\sin(mt) = \left(\frac{e^{int} - e^{-int}}{2i}\right)\left(\frac{e^{imt} - e^{-imt}}{2i}\right)$$

$$= \frac{e^{i(n+m)t} - e^{i(n-m)t} + e^{-i(n+m)t} - e^{-i(n-m)t}}{-4}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{e^{i(n+m)t} + e^{-i(n+m)t}}{2} - \frac{e^{i(n-m)t} + e^{-i(n-m)t}}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\cos(n+m)t - \cos(n-m)t\right)$$

SIIS $\int_0^{2\pi} -\frac{1}{2}\left(\left(\cos(n+m)t\right) - \left(\left(\cos(n-m)t\right)\right)\right)dt$

1° $n \neq m$, $n \neq -m$

$$= -\frac{1}{2}\Big|_0^{2\pi}\left(\frac{\sin(n+m)t}{n+m} - \frac{\sin(n-m)t}{n-m}\right) = 0$$

2° $n = m$ $(n \neq -m)$ $\Rightarrow -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos 2nt\,dt = -\frac{1}{2}\Big|_0^{2\pi} \frac{\sin 2nt}{2n} = 0$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(-\cos 0)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} dt = \frac{1}{2}\cdot\Big|_0^{2\pi} t = \frac{2\pi}{2} = \underline{\underline{\pi}}$$

$n = -m \Rightarrow$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\cos 0t - \cos 2nt\right)dt = -\frac{1}{2}\Big|_0^{2\pi} t - \frac{\sin(2nt)}{2n} = \underline{\underline{-\pi}}$$

3) HUOM KUN $n, m \geq 1$, $n, m \in \mathbb{N}$

SILLOIN $\langle \sin nt, \sin mt \rangle = 0$, $n \neq m$

$\langle \sin nt, \sin mt \rangle = \pi$, $n = m$

tällöin KUN sisatulo määritellään

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} fg \, dt$$ niin

$$\langle \sin nt, \sin nt \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin nt \sin nt \, dt = \frac{1}{\pi} \cdot \pi = 1$$

tällöin $\{\sin nt\}_{n=1}^{\infty}$ on ortonormaali perhe funktioita $L^2([0, 2\pi])$

4) $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

KUN x KUULUU SUORALLE $2x_1 + x_2 = 2$

ETSI $\min\limits_{x \in \{2x_1+x_2=2\}} \|x\|_1$

$$f(x) = \|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$$

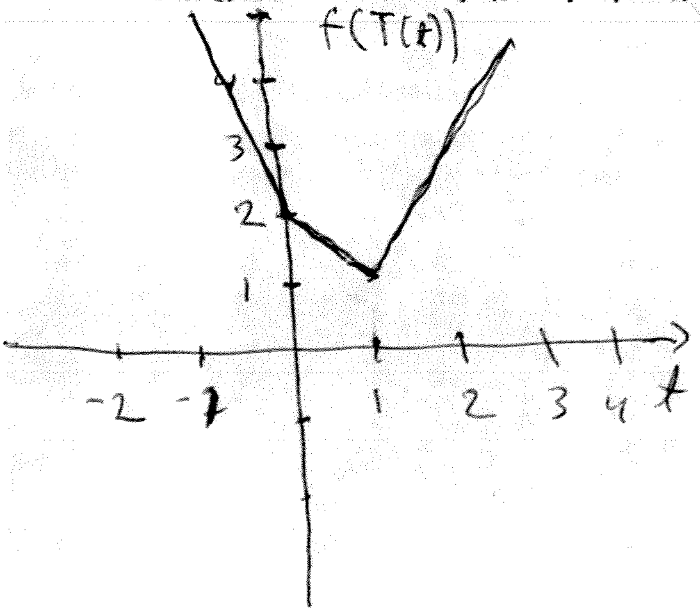
OLKOOT PARAMETRISOINTI

$$T : t \to (t, 2-2t)$$

NIINPÄ $f(T(t)) = f((t, 2-2t)) = |t| + |2-2t|$

TS $\forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow T(t)$ KUULUU SUORALLE $2x_1 + x_2 = 2$

JOTEN VOIDAAN MINIMOIDA NORMIA t:N SUHTEEN



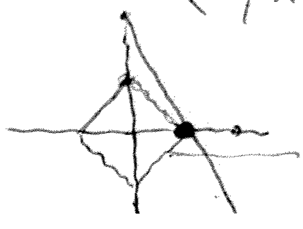
$$f(T(t)) = -t + 2 - 2t, \quad t < 0$$
$$= 2 - 3t$$

$$f(T(t)) = t + 2 - 2t, \quad 1 > t \geq 0$$
$$= 2 - t$$

$$f(T(t)) = t - 2 + 2t, \quad t \geq 1$$
$$= 3t - 2$$

MINIMI LÖYTYY $t = 1$

$$\Rightarrow x = (1, 2-2\cdot 1) = (1, 0)$$



YKSIKKÖ KUULA NORMISSA $\|\cdot\|_1$