1) a) Realiluvut V_j, toteuttavat yhtälön

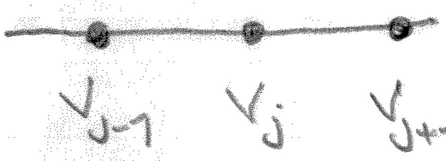
$$\frac{1}{h^2}\left(V_{j+1}-2V_j+V_{j-1}\right)=0, \quad \text{kun } j=1,2,\dots,N-1$$

Niinpä, kun $h>0$ seuraa, että

$$V_{j+1}-2V_j+V_{j-1}=0 \quad \text{siis}$$

$$V_j = \frac{V_{j+1}+V_{j-1}}{2} \quad \text{ts keskinäinen}$$

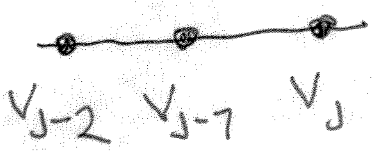
Piste saadaan viereisten keskiarvona



siis $\max\{V_{j-1}, V_{j+1}\} \geq V_j$

$j \in \{1,\dots,N-1\}$

a) oletetaan, että $V_{j-1} \geq V_j$, silloin siirtymällä



saadaan $V_{j-1} = \frac{V_{j-2}+V_j}{2}$

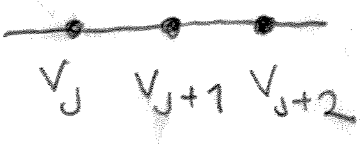
koska $V_j \leq V_{j-1} \Rightarrow V_{j-2} \geq V_{j-1}$

tota jatketaan vasemmalle reunalle saadaan

$$a = V_0 \geq V_1 \geq \dots \geq V_{j-1} \geq V_j$$

Toisaalta koska oletus oli $V_{j-1} \geq V_j$

siitä seuraa, että $V_{j+1} \leq V_j$ joten



Joten koska V_j saatiin keskiarvona viereisistä pisteistä $\rightarrow$

1)(a) väkisin $V_{j+2} \leq V_{j+1}$

mistä seuraa, kun jatketaan oikealle rajalle, että

$$V_j \geq V_{j+1} \geq V_{j+2} \geq \dots \geq V_{N-1} \geq V_N = b$$

Ts. saadaan oletuksesta $V_{j-1} \geq V_j$

$$a = V_0 \geq V_1 \geq \dots \geq V_{N-1} \geq V_N = b$$

(b) oletetaankin m.v $j \in \{1, .., N-1\}$, että

olikin $V_{j-1} \leq V_j$ silloin samalla päättelyllä

saadaan: $a = V_0 \leq V_1 \leq \dots \leq V_{N-1} \leq V_N = b$

Joten $\max_{0 \leq j \leq N} V_j = \max(a, b) = M$

Jatkuu →

Tää on kauheen laveasti

nysvätty !

1) c Jos nyt tiedetään, että

$u \in C^2([0,1])$ ja $\frac{d^2u}{dx^2}(x) = 0$, $x \in [0,1]$

silloin $u = ax + b$ muotoa

---

toisaalta taylor-esitys u:lle

$$\frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} = \frac{d^2u}{dx^2} + O(h)$$

Joten siis

$$\frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} = O(h)$$

koska $u = ax + b$ silloin saadaan

$$\frac{a(x+h) + b - 2(ax+b) + a(x-h) + b}{h^2} = O(h)$$

siis

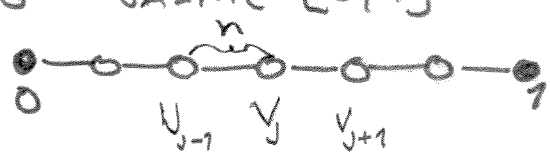
$$\frac{\cancel{ax} + ah + \cancel{b} - 2\cancel{ax} - 2\cancel{b} + \cancel{ax} - \cancel{ah} + \cancel{b}}{h^2} = O(h)$$

Joten $O(h) = 0 \quad \forall h$

Niinpä $\frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} = 0 \quad \forall x \in]0,1[$

Voidaan tehdä diskretisaatio välille $[0,1]$

Jolle siis pätee



$V_j - V_{j-1} = h$

7d)

$$U(v_{j+1}) = U(v_j + h)$$

$$U(v_{j-1}) = U(v_j - h)$$

KOSKA SIIS $\dfrac{U(v_j+h) - 2U(v_j) + U(v_j-h)}{h^2} = 0$

* SIIS $\dfrac{U(v_{j+1}) - 2U(v_j) + U(v_{j-1})}{h^2} = 0$

$$U(v_0) = U(0) \quad , \; U(v_N) = U(1)$$

JA VÄLILLÄ $]0,1[$ DISKREETTISAATMOGISTEED

$U_{j+1} := U(v_{j+1})$ toteuttaa $*$:n

joten ALKUOSAN NOJALLA MAKSIMI

SAAVUTETAAN joko $U(0)$ tai $U(1)$

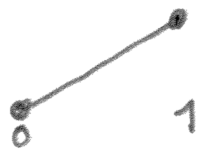
---

toisaalta tietysti kun

SUORAAN NÄHTIIN, että U ON

MUOTOA $U = ax + b$ SIIS SUORA

VÄLILLÄ $[0,1]$

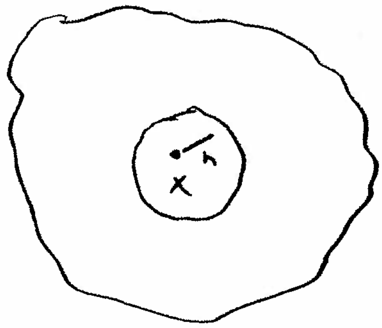


SAA se MAKSIMINSA JOMMASSA

KUMMASSA PÄÄSSÄ

2)

a)



$= \Omega$

(Huom, tein vahingossa vaikeammalle alueelle piirtelyä, mutta sama toimii $\Omega = [0,1]^2$

$$u \in C^\infty(\Omega)$$

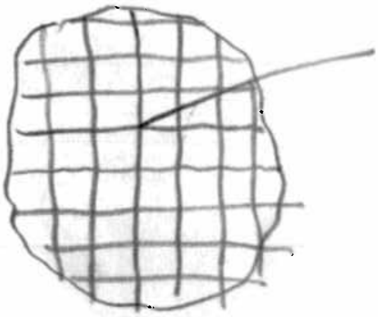
$$\Delta u = 0$$

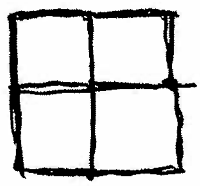
taylor

$$u(x+h) = u(x) + \sum_{j=1}^{N} h_j \frac{\partial u}{\partial x_j}(x_0) + \frac{1}{2}\sum_{i,j} h_i h_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) + R_2(x_0,h)$$

, missä $\dfrac{R_2(x_0,h)}{\|h\|^2} \to 0 \quad , h \to 0$

Jos mietitään diskretisaatiota





missä $x_{i+1,j} - x_{i,j} = h_1 = h$

$x_{i,j+1} - x_{i,j} = h_2 = h$

$u(x+h_1) = u(x_{i+1,j})$, joten sijoitus taylor

$$u(x+h_1) = u(x) + h_1 \frac{\partial u}{\partial x_1}(x) + \frac{1}{2} h_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x_0) + R_2(x_0,h_1)$$

$$u(x-h_1) = u(x) - h_1 \frac{\partial u}{\partial x_1}(x) + \frac{1}{2} h_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x_0) + R_2(x_0,-h_1)$$

$$u(x+h_2) = u(x) + h_2 \frac{\partial u}{\partial x_2}(x) + \frac{1}{2} h_2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x_0) + R_2(x_0,h_2)$$

$$u(x-h_2) = u(x) - h_2 \frac{\partial u}{\partial x_2}(x) + \frac{1}{2} h_2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x_0) + R_2(x_0,-h_2)$$

$\sum$ noi yläpuolelle $= 4u(x) + h_1^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x_0) + h_2^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x_0) + R_2(x_0\ \ )$ ...

2B) Joten kun ristikko tasavälinen

ts $h_1 = h_2$ saadaan

$$u(x+h_1) + u(x-h_1) + u(x+h_2) + u(x-h_2) = 4u(x) + h^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) + \tilde{R}_2(x,h)$$

missä $\dfrac{\tilde{R}_2(x,h)}{\|h\|^2} \to 0$, $h \to 0$

Joten $u(x,h_1) = u(x_{i+1,j}) := U_{i+1,j}$

siis merkitään u:n arvo pisteessä

$(x+h_1) = x_{i+1,j}$ lyhyesti $U_{i+1,j} \in \mathbb{R}$

(ja muut samaan tapaan)

nyt siis saadaan

koska $\Delta u = 0$

$$\frac{U_{i+1,j} + U_{i-1,j} + U_{i,j+1} + U_{i,j-1} - 4U_{i,j}}{h^2} = \Delta u + \frac{1}{h^2}\tilde{R}_2(x,h)$$

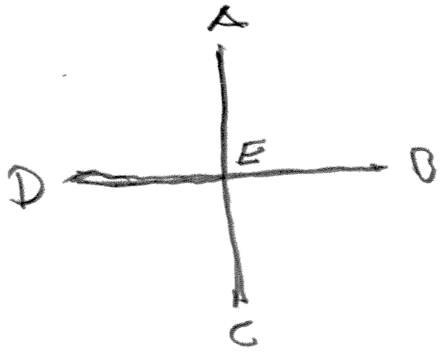
Siis ——— || ——— $= \frac{1}{h^2}\tilde{R}_2(x,h)$

Tästä saataisiin $\Delta(u)$ arvio diskreetisti

$$\frac{U_{i+1,j} + U_{i-1,j} + U_{i,j+1} + U_{i,j-1} - 4U_{i,j}}{h^2} = 0$$

Joten $U_{i+1,j} + U_{i-1,j} + U_{i,j+1} + U_{i,j-1} - 4U_{i,j} = 0$

2) C mitäs toi sanoo: (jätetään toi indeksisotku pois)



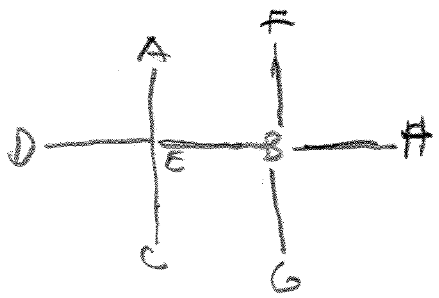
$$\underline{4E = A+B+C+D} \quad \text{eli}$$

$$E = \frac{A+B+C+D}{4}$$

t.s arvo ristin keskellä saadaan reunapisteiden keskiarvona

tästä seuraa, että maksimi, ja minimi ei voi olla aidosti pisteessä $\underline{\underline{E}}$

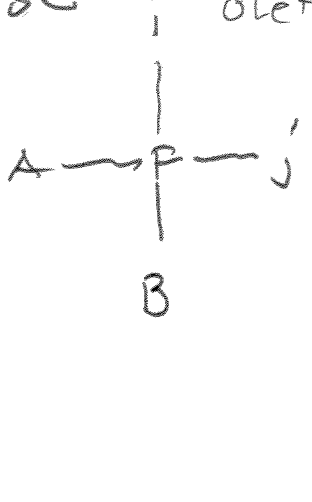
valitaan joku pisteistä (A,B,C,D) mikä on suurempi kuin E (olkoon vaikka B)



silloinhan

$$B = \frac{E+F+G+H}{4}$$, joten

jokin pisteistä $F, H, G \geq B$ ja valitaan se; oletetaan vaikka, F suurin

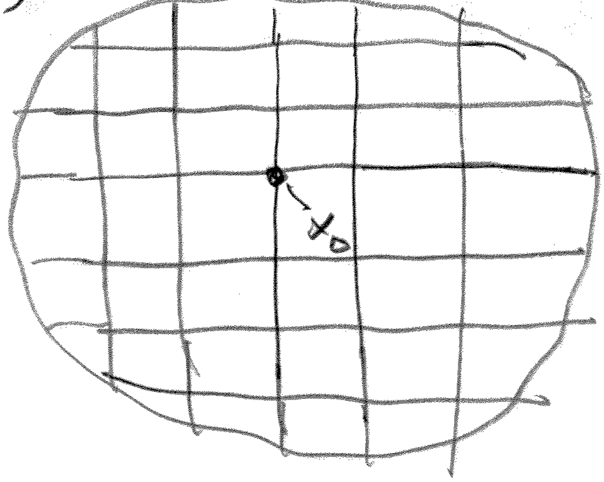


koska $F \geq A$ tai B

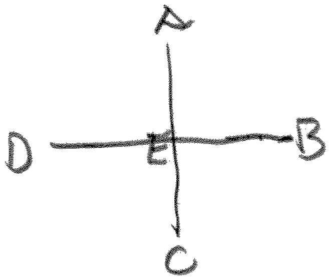
niin joko $i, j \geq F$

2) V.O oletetaan, että ristikossa on maksimiarvo jossain sisäpisteessä valitaan x_0 s.e $u(x_0) \geq u(x_{jk})$, $\forall_{j,k}$

D



Sillointan siis



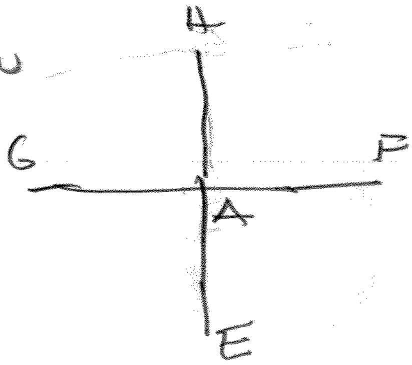
$x_0 = E$ ja $E \geq A, B, C, D$

$$E = \frac{A+B+C+D}{4}$$

seuraa, että väkisin $E = A = B = C = D$

valitaan uusi keskipiste vaikkapa A

sama juttu $A \geq E, F, G, H$



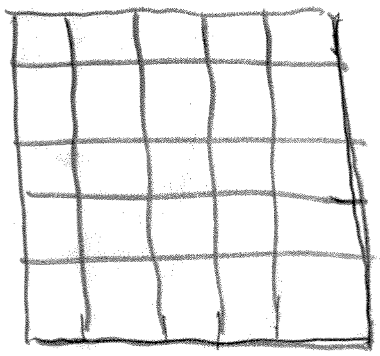
Joten väkisin $A = E = F = G = H$

Niinpä maksimi ajautuu väkisin reunan lähelle

koska diskretisaatiota voidaan pienentää mielivaltaisesti maksimi ajautuu m.v lähelle reunaa ja $\Delta u = 0$ tekee u:sta sileän

Jos Ω rajoitettu alue u jatkuva reunalle asti tuntuu maksimiperiaate harmoniselle funktiolle tätä kautta ajateltuna järkevältä.

2) SIIS   KOSKA meillä Ω-oli $[0,1]\times[0,1]$

$\Omega =$ 

DISKRETISAATIO OSUU NÄTISTI KUN $h = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$

JOTEN TÄLLAISESSA ALUEESSA ON HELPOMPI USKOA, ETTÄ

HARMONINEN $U(x_1, x_2)$ SAA MAKSIMIN JOSSAIN REUNAPISTEESSÄ.

KUN DISKRETISAATIOTA KASVATETAAN TAYLOR-KEHITELMÄN VIRHETERMI ~~MENEE~~ MENEE NOPEAMMIN NOLLAAN KUIN $\left(\frac{1}{n^2}\right)$. HUOM TÄMÄ EI TODISTA MAKSIMAALIPERIAATETTA, MUTTA EHKÄ SE PERUSTELEE, MIKSI TÄLLAINEN TEORIA PITÄÄ PAIKKANSA!

(HUOM TEIN VAHINGOSSA TOTA VAIKEAMMALLE ALUEELLE ... SORRY)

3)   Millä vakiolla A, B, λ, k ?

$U(x) = e^{\lambda t}(A\sin(kx) + B\cos(kx))$ toteuttaa lämpöyhtälön! okey derivoidaan:

$$\frac{\partial}{\partial t} U(x) = \lambda U(x)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} U(x) = -k^2 U(x) \quad , \text{ joten}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) U(x) = (\lambda + k^2) U(x) = 0 \quad ?$$

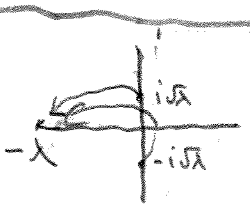
1° $(\lambda + k^2) = 0 \iff k^2 = -\lambda$

a) $\lambda < 0 \Rightarrow k = \pm\sqrt{|\lambda|}$ (siis pisteparit (λ, k) $(\lambda, \sqrt{|\lambda|}), (\lambda, -\sqrt{|\lambda|})$)

---

b) $\lambda > 0 \Rightarrow k = \pm i\sqrt{\lambda}$

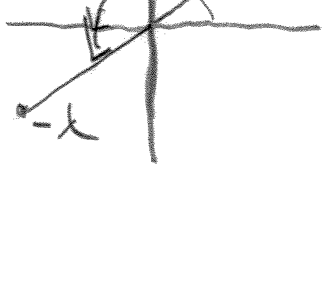
(λ, k): siis $(\lambda, i\sqrt{\lambda})$ tai $(\lambda, -i\sqrt{\lambda})$



toteuttaa $(\lambda + k^2 = 0)$

---

c) $\lambda \in \mathbb{C}$ m.v. $\Rightarrow -\lambda = |\lambda| e^{i\alpha}$, $\alpha \in [0, 2\pi[$



$$k = \sqrt{|\lambda|}\, e^{i\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow k^2 = |\lambda| e^{i\alpha} = -\lambda$$

$$k = \sqrt{|\lambda|}\, e^{i(\pi + \frac{\alpha}{2})} \Rightarrow k^2 = |\lambda| e^{i(2\pi + \alpha)} = -\lambda$$

Siis $\left(\lambda, -\sqrt{|\lambda|}\, e^{i\frac{\alpha}{2}}\right)$ $\left(\lambda, -\sqrt{|\lambda|}\, e^{i(\pi + \frac{\alpha}{2})}\right)$ (toteuttaa $\lambda + k^2 = 0$)

3) TOINEN MAHDOLLISUUS JOS

$$U(x) = A\sin(kx) + B\cos(kx) = 0 \Rightarrow$$

$$A\sin(kx) = -B\cos(kx) \Rightarrow \tan(kx) = \frac{-B}{A} \quad | A \neq 0$$

EI RATKAISUA $\forall x \in [0,1]$ muuten, kuin

$A = B = 0$ silloinhan $\underline{U \equiv 0}$

6) Reunaehdot $u(0,T) = 0$, $u(1,t) = 0$

$$u(0,T) = e^{\lambda t}(A \cdot 0 + B \cdot 1) = 0 \quad \text{siis}$$

$$Be^{\lambda t} = 0 \Rightarrow \underline{B = 0}$$

$$u(1,t) = e^{\lambda t}(A\sin(k)) = 0 \Rightarrow \sin(k) = 0$$

$$\sin k = 0 \Rightarrow \underline{k = n\pi}, \ n \in \mathbb{Z}$$

$$k^2 = -\lambda \Rightarrow \underline{\lambda = -n^2\pi^2}$$

$\underline{u(x,t) = e^{-n^2\pi^2 t} A \sin(n\pi x)}$, MISSÄ $\underline{\text{A mielivaltainen}}$

4)

TAYLOR - SARJA

mistä tulee?

$f \in C^\infty(\mathbb{R})$

LAITOIN AUVIKSEEN, JOS EI TUTTUA ... TAI MUUTEN VAAN KIINNOSTAA:

ANALYYSIN peruslause:

$$f(x+h) - f(x) = \int_x^{x+h} f'(\tau)\, d\tau$$

sitten tehdään muuttujanvaihto $\tau = x+h-w$

Joten $d\tau = -dw$

NIINPÄ $$\int_x^{x+h} f'(\tau)\,d\tau = \int_h^0 f'(x+h-w)(-dw)$$

$$= \int_0^h f'(x+h-w)\,dw$$ sitten osittaisinteg

SAADAAN suunnilleen noin

$$= \Big/_0^h f'(x+h-w)\,w - \int_0^h f''(x+h-w)(-dw)\,w$$

$$= f'(x)h + \int_x^{x+h} f''(\tau)(x+h-\tau)\,d\tau$$

SIIS SAADAAN kun laitetaan palaset yhteen!

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \int_x^{x+h} f''(\tau)(x+h-\tau)\,d\tau$$

LASKETAAN VIELÄ SEURAAVA VAIHE

ELi osittaisintegroidaan termi

(ensin muutetaan hiukan muotoa kikalla)

$$\int_x^{x+h} f''(\tau)(x+h-\tau)\,d\tau = \int_x^{x+h} f''(\tau)\frac{d}{d\tau}\left(\frac{(x+h-\tau)^2}{-2}\right)d\tau$$

sitten o I

$$= -\frac{1}{2}\Big|_x^{x+h} f''(\tau)(x+h-\tau)^2 + \frac{1}{2}\int_x^{x+h} f'''(\tau)(x+h-\tau)^2\,d\tau$$

$$= \frac{1}{2}f''(x)h^2 + \frac{1}{2}\int_x^{x+h} f'''(\tau)(x+h-\tau)^2\,d\tau$$

Joten Taylor 2. aste polynomi

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)h^2 + \underbrace{\frac{1}{2}\int_x^{x+h} f'''(\tau)(x+h-\tau)^2\,d\tau}_{\text{VIRHEtermi tai JÄÄNNÖStermi}}$$

4) Joten itse tehtävä

$f(x) = \sin x$ lasketaan

jossain origon ympäristössä

$$f(0+h) = f(h) = f(0) + f'(0)h + \frac{1}{2}f''(0)h^2 + \frac{1}{2}\int_0^h f'''(\tau)(h-\tau)^2\,d\tau$$

siis

$$\sin h = \sin(0) + \cos(0)h + \frac{1}{2}(-\sin(0))h^2 + \frac{1}{2}\int_0^h(-\cos(\tau))(h-\tau)^2\,d\tau$$

siis $\sin h = 0 + h + 0 - \frac{1}{2}\int_0^h \cos(\tau)(h-\tau)^2\,d\tau$

$\sin h = h + R_2(0,h)$, missä $R_2(0,h) = -\frac{1}{2}\int_0^h \cos(\tau)(h-\tau)^2 \ldots$

virhetermi

$$|R_2(0,h)| = \left|-\frac{1}{2}\int_0^h \cos(\tau)(h-\tau)^2\,d\tau\right| \le \frac{1}{2}\int_0^h |\cos(\tau)(h-\tau)^2|\,d\tau$$

$$|R_2(0,h)| \le \frac{1}{2}\int_0^h (h-\tau)^2\,d\tau = -\frac{1}{2}\Big|_0^h \frac{(h-\tau)^3}{3} = \frac{h^3}{6}$$

koska $|\cos(\tau)| \le 1$

siis $\sin h = h + O(h^3)$

4) toisaalta voi arvioida 2. asteen taylor

$$f(0+h) = f(0) + f'(0)h + \int_0^h f''(\tau)(h-\tau)\,d\tau$$

eli:

$$\sin(h) = \sin(0) + \cos(0)h + \int_0^h -\sin(\tau)(h-\tau)\,d\tau$$

$$\sin(h) = h - \int_0^h \sin(\tau)(h-\tau)\,d\tau$$

$$\left|-\int_0^h \sin(\tau)(h-\tau)\,d\tau\right| \le \left|\int_0^h (h-\tau)\,d\tau\right| = \left|\Big/_0^h \frac{(h-\tau)^2}{-2}\right| = \left|\frac{h^2}{2}\right| = \frac{h^2}{2}$$

joten $\sin(h) = h + O(h^2)$ jotenkin noin