Matematiikan sovelluksia, syksy 2012
4. harjoitus 12.10.2012

1. Olkoot $V_j$, $\quad j = 0, 1, 2, 3, ..., N \quad$ ja $\quad h > 0$ realilukuja, joille:

$$\frac{1}{h^2}\Big(V_{j+1} - 2V_j + V_{j-1}\Big) = 0 \quad , \quad j = 1, 2, 3, ..., N-1$$

$$V_0 = a \quad , \quad V_N = b$$

Osoita, että:

$$max_{0 \leq j \leq N}\ V_j = max\ (a, b) = M$$

Miten tämä tehtävä liittyy siihen, että jos $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$,

$$\frac{d^2u}{dx^2}(x) = 0 \quad , \quad x \in [0,1]$$

niin:

$$max_{x \in [0,1]} u(x) \leq max\ (u(0), u(1)) \quad , \quad x \in [0,1]$$

2. (a) Mikä on tehtävän 1 vastine yhtälölle:

$$\Delta u(x,y) = 0 \quad , \quad (x,y) \in [0,1]^2$$

   (b) Ratkaise a-kohdassa muotoilemasi tehtävä.

3. Millä vakioiden $A, B, \lambda, k$ arvoilla

$$u(x) = e^{\lambda t}\Big(Asin(kx) + Bcos(kx)\Big)$$

toteuttaa:

   (a) lämpöyhtälön

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(x,t) = 0 \quad , \quad x \in [0,1], \quad t > 0$$

   (b) edelleen lämpöyhtälön, jos lisäksi asetetaan seuraavat reunaehdot:

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0$$

4. Osoita, että:

$$sin(x) = x + O(x)^2, \qquad kun \quad |x| \leq \frac{1}{2}$$