1a) $\Delta(\underbrace{Ax^2+Bxy+Cy}_{=g})^2$ olloan $\mathbb{R}^2$

Joten $\Delta = \nabla\cdot\nabla = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$ niinpä

$$\Delta g = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(g)+\frac{\partial}{\partial y^2}(g) = \frac{\partial}{\partial x}(2Ax+By)+\frac{\partial}{\partial y}(Bx+2C$$

$$\underline{\Delta g = 2A+2C}$$

(HUOM KUN $A=-C$ $\Delta g=0 \Rightarrow g$ HARMONINEN)

1b) $\Delta(\sin nx \sin my) = \frac{\partial}{\partial x}(n\cos nx \sin my)+\frac{\partial}{\partial y}(m \sin nx \cos$

$$= -n^2 \sin nx \sin my - m^2 \sin nx \sin my$$

Joten $\Delta f = \lambda f$, missä $\lambda = -(n^2+m^2)$

$f = \sin nx \sin my$

1c) $$\Delta(e^{Ax+By}) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(e^{Ax+By})+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(e^{Ax+By})$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(Ae^{Ax+By})+\frac{\partial}{\partial y}(Be^{Ax+By})$$

$$= A^2e^{Ax+By} + B^2e^{Ax+By} = (A^2+B^2)e^{Ax+By}$$

Siis $\Delta f = \lambda f$, $\lambda = A^2+B^2$, $f = e^{Ax+By}$

1.D $$\nabla(e^{x+y}) = \left(\frac{\partial e^{x+y}}{\partial x}, \frac{\partial e^{x+y}}{\partial y}\right) = (e^{x+y}, e^{x+y})$$

2) $\Phi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$

$$\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,t) = \frac{-2x}{4t}\phi(x,t) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{2x}{4t}\phi(x,t)\right) = \frac{-2}{4t}\phi(x,t) + \left(\frac{-2x}{4t}\right)^2\phi(x,t) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi(x,t) = \underline{\left(\frac{x^2}{4t^2} - \frac{1}{2t}\right)\phi(x,t)}$$

Toisaalta merkitään $\phi(x,t) = VW$, $V = (4\pi t)^{-\frac{1}{2}}$, $W = e^{-\frac{x^2}{4t}}$

$$\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial t}\cdot W + V\cdot\frac{\partial W}{\partial t} \qquad \text{joten}$$

$$\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial t} = -\frac{1}{2}(4\pi t)^{-\frac{3}{2}}\cdot 4\pi\cdot W + V\cdot(-1)(4t)^{-2}\cdot 4\cdot(-x^2)\cdot W$$

$$\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial t} = -2\pi V^3 W + \frac{x^2}{4t^2}VW = \left(-2\pi V^2 + \frac{x^2}{4t^2}\right)VW$$

$$\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial t} = \left(\frac{-2\pi}{4\pi t} + \frac{x^2}{4t^2}\right)\phi(x,t) = \underline{\left(\frac{x^2}{4t^2} - \frac{1}{2t}\right)\phi(x,t)}$$

Joten $\underline{\underline{\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\phi(x,t) = 0}}$

3) $u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(x-z,t)\, f(z)\, dz$, missä

$$\Phi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}, \quad t > 0, \; x \in \mathbb{R}$$

Φ on ns. lämpöydin ~~tai~~ gaussinen ydin (kun $t > 0$ $\Phi \in C^\infty$), mistä johtuen x:n ja t:n osuvat osittaisderivaatat voidaan viedä integraalin sisään. ts muistutus

$$\frac{d}{dx}\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \lim_{h\to 0} \frac{\int_{\mathbb{R}} f(x+h)dx - \int_{\mathbb{R}} f(x)dx}{h} = \lim \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} dx = \lim_{h \to 0} \int_{\mathbb{R}} f'(\xi)dx = \int_{\mathbb{R}} f'(x)dx$$

Siis seuraa suoraan määritelmästä + väliarvolauseesta!

Lisäksi jotta $u(x,t)$ olisi hyvin määritelty, ei alkulämpötilajakauma saa olla ihan mielivaltainen. Tämä käy hyvin yhteen konkreettisten alkuehtojen kanssa. ~~on~~ t.s. jos f on rajoitettu siis $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ tai esim integroituva, $f \in L^2(\mathbb{R})$ homma toimii ... voi tietysti miettiä, kuinka pahoja "funktioita" vastaan toi integrointi onnistuu ? olis jotenkin aika paha tilanne, missä alkulämpötilajakauma kasvaa jotekin eksponentiaalisesti pitkin kuutteellista kappaletta ... ei kovin realistinen tilanne, mutta matemaattisesti ihan ok!

Okey sitten laskuun !!

3) $$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \phi(x-z,t)}{\partial t} f(z)\, dz$$

$$\frac{\partial}{\partial x^2} u(x,t) = \int_{R} \frac{\partial^2 \phi(x-z,t)}{\partial x^2} f(z)\, dz$$

Joten Erotus SAA MUODON (HUOM. integ LINEAARISUUS)

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \int_{R} \left(\frac{\partial \phi(x-z,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 \phi(x-z,t)}{\partial x^2} \right) f(z)\, dz$$

mutta 2. tehtävän perusteella $\forall (x,t) \in R \times (0,\infty)$

$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \phi(x,t) = 0$ Joten $\Rightarrow$ myös mielival

taisella $(\tilde{x}, t) \in R \times (0,\infty)$, $\tilde{x} = x - z$ siis

$$\left(\frac{\partial \phi(z-z,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 \phi(x-z,t)}{\partial x^2} \right) \equiv 0$$

Joten $u(x,t)$ toteuttaa lämpöyhtälön

$\forall \, (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)$

AINAKIN MUSTA ~~TÄÄ~~ ON AIKA MAINIO TULOS! SIIS JOSTAIN ANNETUSTA ALKULÄMPÖTILA-JAKAUMASTA, PYSTYTÄÄN LASKEMAAN MITEN LÄMPÖTILA MUUTTUU PAIKAN JA AJAN MUKAAN NOINKIN SIMPPELISTI ---- ERIKOISTA!