1) (Laitan tähän alkuun hiukan perustelua sille ratkaisutavalle, jota käytän. Tää on varmaan tuttua ...; ja osalla varmaan parempia tapoja ratkaista probleemi ... mutta :)

Vakiokertoiminen homogeeninen 2. kertaluvun lineaarinen diff. yhtälö on muotoa:

$$*) \quad ay'' + by' + cy = 0 \quad \left(\begin{array}{l} a,b,c \text{ vakioita} \\ a \neq 0 \end{array} \right)$$

etsitään ratkaisua muodossa $y(t) = e^{\lambda t}$

jolloin $y'(t) = \lambda e^{\lambda t}$ ja $y''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$

Niinpä * voidaan kirjoittaa muodossa

$$*) \quad a\lambda^2 e^{\lambda t} + b\lambda e^{\lambda t} + ce^{\lambda t} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$e^{\lambda t}(a\lambda^2 + b\lambda + c) = 0 \quad \text{koska } e^{\lambda t} \neq 0 \ \forall t$$

Niinpä
* ratkeaa kun

$$**) \quad a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

ts. funktio $y(t) = e^{\lambda t}$ on DY:n ratkaisu vain jos λ on **:n juuri

2) Siis DY:lle $ay'' + by' + cy = 0$

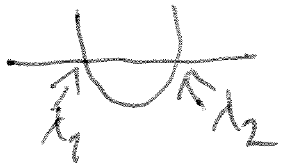
SAADAAN RATKAISU KARAKTERISTISEN POLYNOMIN NOLLAKOHDISTA t.s LASKEMALLA

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

---

itse (KOSKA olen KARSEA SÄHLÄÄJÄ) HAJOITAN tarkastelun 3. OSAAN

1°) $b^2-4ac > 0$, jolloin ** ON KAKSI ERI REALISTISTA juurta



SAADAN SIIS KAKSI eri RATKAISUA DY:lle

$$y_1 = e^{\lambda_1 t} \quad \text{ja} \quad y_2(t) = e^{\lambda_2 t}$$

Koska Derivointi ja vakiolla kertominen ovat LINEAARISIA operaatioita t.s.

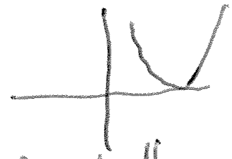
Jos määritellään $L := \left(a\frac{d^2}{dt^2} + b\frac{d}{dt} + c\right)$

silloin $L(y_1+y_2) = Ly_1 + Ly_2 = 0+0$

JA $L(c_1y_1) = c_1Ly_1 = 0$

SAADAAN perusratkaisu DY:lle

$$y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) = \underline{c_1e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}}$$

2° RATKAISU, KUN $b^2-4ac=0$ 

TÄLLÖIN SAADAAN "KAKSINKERTAISESTA JUURESTA" VAIN YKSI RATKAISU SUORAAN $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{-b}{2a}$

SIIS $y_1(t) = e^{\lambda_1 t}$, OKEI TOINEN RATKAISU SAADAAN "method of Reduction of order"

SE MENEE JOTENKIN NÄIN: KOSKA $a \neq 0$

YHTÄLÖ $ay'' + by' + cy = 0 \iff y'' + \frac{b}{a}y' + \frac{c}{a}y = 0$

~~KOSKA~~ $\tilde{b} = \frac{b}{a}$, $\tilde{c} = \frac{c}{a}$

JOTEN $y'' + \tilde{b}y' + \tilde{c}y = 0$ JOLLE MYÖS

DISKRIMINANTTI: $\tilde{b}^2 - 4 \cdot 1 \cdot \tilde{c} = \frac{b^2}{a^2} - 4\frac{c}{a} = \frac{1}{a^2}(b^2-4ac) = 0$

SIIS $\tilde{b}^2 = 4\tilde{c}$ SIIS $\tilde{c} \geq 0$

VALITAAN UUSI MUUTTUJA $\alpha^2 = \tilde{c}$

NIINPÄ $\tilde{b}^2 = 4\alpha^2 \Rightarrow$ VALITAAN $\tilde{b} = -2\alpha$

SIIS YHTÄLÖ SAA MUODON

$$y'' - 2\alpha y' + \alpha^2 y = 0$$

JONKA KARAKTERISTINEN POLYNOMI ON

$$\lambda^2 - 2\alpha\lambda + \alpha^2 \Rightarrow (\lambda-\alpha)^2 = 0$$

SIIS EKA RATKAISU ON MUOTOA

$$y_1(t) = e^{\alpha t}$$

TOINEN RATKAISU HAETAAN MUODOSSA:

$$Y_2(t) = Y_1(t)\,u(t) = e^{\alpha t} u(t)$$ SITTEN DERIVOIDAAN

$$Y_2' = \alpha e^{\alpha t} u(t) + e^{\alpha t} u'(t)$$

$$Y_2'' = \alpha^2 e^{\alpha t} u(t) + 2\alpha\, e^{\alpha t} u'(t) + e^{\alpha t} u''(t)$$

SIJOITETAAN YHTÄLÖÖN $y'' - 2\alpha y' + \alpha^2 y$

$$y'' - 2\alpha y' + \alpha^2 y = \left(e^{\alpha t} u(t)\right)'' - 2\alpha\left(e^{\alpha t} u(t)\right)' + \alpha^2 e^{\alpha t} u(t)$$

$$= \cancel{\alpha^2 e^{\alpha t} u(t)} + \cancel{2\alpha e^{\alpha t} u'(t)} + e^{\alpha t} u''(t) - \cancel{2\alpha \alpha e^{\alpha t} u(t)} - \cancel{2\alpha e^{\alpha t} u'(t)}$$

$$+ \cancel{\alpha^2 e^{\alpha t} u(t)} = e^{\alpha t} u''(t)$$

JOTEN SIIS JOS HALUTAAN RATKAISU

$$y'' - 2\alpha y' + \alpha^2 y = 0 \Rightarrow e^{\alpha t} u''(t) = 0$$

$$\Rightarrow u''(t) = 0 \quad \forall t \quad , \text{ KOSKA } e^{\alpha t} \neq 0 \ \forall t$$

JOLLOIN $u(t)$:n OLTAVA MUOTOA $at + b$

NIINPÄ $Y_2 = e^{\alpha t} \cdot (at + b) = a t e^{\alpha t} + b e^{\alpha t}$

VOIDAAN PÄÄTELLÄ PERUSRATKAISUKSI

$$Y(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}$$

$(ay'' + by' + cy) \Rightarrow a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$

3°) Kompleksiset juuret $b^2 - 4ac < 0$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm i\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$$

merkitään $\beta = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$, $\alpha = \frac{-b}{2a}$

$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ ovat karakteristisen (huom $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$)
polynomin kompleksiset juuret tapauksessa,
jolloin toisen-asteen käyrä ei leikkaa x-akselia

$\Downarrow$

Saadaan ratkaisut muodossa

$$y_1(t) = e^{\lambda_1 t} = e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t}e^{i\beta t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t)$$
$$y_2(t) = e^{\lambda_2 t} \quad \text{samoin} \quad = e^{\alpha t}(\cos\beta t - i\sin\beta t)$$

Niinpä saadaan perusratkaisu kompleksisilla juurilla

$$\underline{y(t) = C_1 e^{(\alpha+i\beta)t} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)t}}$$

Koska fysikaalisesti usein etsitään
reaaliarvoisia ratkaisuja saadaan tällöin
olkoon $y(t) = u(t) + iv(t)$ DY:n ratkaisu
missä $u(t)$ ja $v(t)$ ovat reaaliarvoisia
silloin myös $u(t)$ ja $v(t)$ ratkaisee DY:n

tod: $ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0 \iff$

$a(u(t)+iv(t))'' + b(u(t)+iv(t))' + c(u(t)+iv(t)) = 0 \iff$

$au''(t) + iav''(t) + bu'(t) + ibv'(t) + cu(t) + icv(t) = 0 \iff$

$au''(t) + bu'(t) + cu(t) + i(av''(t) + bv'(t) + cv(t)) = 0$

Jotta edellinen olisi totta on siis

myös $y(t) = u(t) = iv(t)$ realinen osa $u(t)$

ja kompleksinen osa $v(t)$ ratkaisuita pyille

Niinpä realiset ratkaisut jos

$$y_1 = e^{\lambda_1(t)} = e^{\alpha t}\cos\beta t + i\, e^{\alpha t}\sin\beta t$$

$$\Rightarrow \quad u_1 = e^{\alpha t}\cos\beta t \quad \text{on ratkaisu}$$

$$v_1 = e^{\alpha t}\cos\beta t \quad \text{on ratkaisu}$$

Joten perusratkaisu olisi muotoa

$$y(t) = C_1 e^{\alpha t}\cos\beta t + C_2 e^{\alpha t}\sin\beta t$$

missä, $\alpha = \frac{-b}{2a}$ ja $\beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$

Tän pitkähkön räpellyksen, siis edellä ja perässä, tarkoitus on kait ehkä kuvata ratkaisuprosessia

... siis tää ei ole varmaakaan kummoinen teoreettisesti .... mutta siitä vois ehkä nähdä miten minä yritän taistella tällaisten arvoitusten parissa!

1) $y''(t) + \lambda y(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

KARAKTERISTINEN POLYNOMI ON

$$\mu^2 + \lambda = 0 \iff \mu^2 = -\lambda$$

KUN $\underline{\lambda < 0}$ SILLOIN $\mu = \pm\sqrt{|\lambda|}$ $(-\lambda = |\lambda|)$

YHTÄLÖN PERUSRATKAISU ON (Realiset KAKSI eri JUURTA)

$$y(t) = \underline{C_1 e^{\sqrt{|\lambda|}t} + C_2 e^{-\sqrt{|\lambda|}t}}$$

toisaalta funktio $y(t) = Ae^{kt} + Be^{kt} = (A+B)e^{kt}$

toteuttaa Dif-yht. JOS $\underline{k = \sqrt{|\lambda|}}$ tai $\underline{k = -\sqrt{|\lambda|}}$

KUN PERUSRATKAISUSSA VALITAAN $\underline{C_2 = 0}$ ja $\underline{C_1 = (A+B)}$

tai $\underline{C_1 = 0}$ JA $\underline{C_2 = (A+B)}$

KUN $\lambda > 0$ SILLOIN $\mu = \pm i\sqrt{\lambda}$ (eli RATKAISTAAN $\mu^2 = -\lambda$)

SILLOIN YHTÄLÖN PERUSRATKAISU ON

$$y(t) = \underline{C_1 e^{i\sqrt{\lambda}t} + C_2 e^{-i\sqrt{\lambda}t}}$$

Joten, KUN HALUTTU RATKAISU OLI muotoa $(A+B)e^{kt}$

Jollain VALINNALLA $C_1 = (A+B)$, $C_2 = 0$ JA $\underline{k = i\sqrt{\lambda}}$

tai $C_1 = 0$, $C_2 = (A+B)$ JA $\underline{k = -i\sqrt{\lambda}}$ Haluttu on. toteutuu

---

KUN $\lambda = 0$ SILLOIN $\mu^2 = 0 \Rightarrow \mu = 0$ (KAKSOISJUURI)

TÄLLÖIN YHTÄLÖN PERUSRATKAISU ON

$$y(t) = C_1 e^{\mu t} + C_2 t e^{\mu t} = C_1 e^0 + C_2 t e^0 = \underline{C_1 + C_2 t}$$

Joten HALUTTU RATKAISU $y(t) = (A+B)e^{kt}$

SAADAAN, KUN $C_1 = A+B$ ja $k = 0$, $C_2 = 0$

2) $\lambda < 0$ RATKAISU ON MUOTOA (1. tent per.)

$$\underline{y(t) = C_1 e^{\sqrt{|\lambda|}t} + C_2 e^{-\sqrt{|\lambda|}t}}$$

ALKARVO $y(0) = 0$

SIIS $y(0) = C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_1 = -C_2$

$y(1) = 1$

SIIS $y(1) = C_1 e^{\sqrt{|\lambda|}} + C_2 e^{-\sqrt{|\lambda|}} = 1$

Joten $C_1 e^{\sqrt{|\lambda|}} - C_1 e^{-\sqrt{|\lambda|}} = 1$

$$\underline{C_1 = \frac{1}{e^{\sqrt{|\lambda|}} - e^{-\sqrt{|\lambda|}}}} \text{ ja } \underline{C_2 = \frac{1}{e^{-\sqrt{|\lambda|}} - e^{\sqrt{|\lambda|}}}} \quad \left(\begin{array}{c} e^{\sqrt{|\lambda|}} - e^{-\sqrt{|\lambda|}} \neq 0 \\ \lambda < 0 \end{array} \right)$$

RATKEAA $\underline{\forall \lambda < 0}$

$\lambda > 0$ Silloin RATKAISU ON MUOTOA

$$\underline{y(t) = C_1 e^{i\sqrt{\lambda}t} + C_2 e^{-i\sqrt{\lambda}t}}$$

$$y(t) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}t + C_1 i \sin\sqrt{\lambda}t + C_2 \cos\sqrt{\lambda}t - C_2 i \sin\sqrt{\lambda}t$$

$$y(t) = (C_1 + C_2)\cos\sqrt{\lambda}t + (C_1 - C_2) i \sin\sqrt{\lambda}t$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_1 = -C_2$$

Joten $y(t) = (C_1 - C_2) i \sin\sqrt{\lambda}t$

$$y(1) = 1 \Rightarrow (C_1 - C_2) i \sin\sqrt{\lambda} = 1$$

$$2C_1 = \frac{1}{i \sin\sqrt{\lambda}} \Rightarrow \underline{C_1 = \frac{-i}{2\sin\sqrt{\lambda}}}$$

Ratkeaa

Kun $\underline{\lambda \neq \pi^2 n^2}$ $\qquad \underline{C_2 = \frac{i}{2\sin\sqrt{\lambda}}}$

2c) $\lambda = 0$ YLEINEN RATKAISU ON MUOTOA

$$y(t) = C_1 + C_2 t$$

KUN $y(0) = C_1 + C_2 \cdot 0 = C_1 = 0$

$y(1) = C_2 \cdot t = C_2 = 1$

JOTEN $y(t) = t$ ON RATKAISU

---

3 SEURAAVASSA EI NIIN LYHYT RATKAISU KUN LASKAREISSA ESITETTIIN

LASKAREISSAAN RATKAISU ...

Se muuten oli MAINIO JA MENI JOTAKUINKIN NÄIN :

$$x' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

FORMAALISTI $x'' = \begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2' \\ x_1' \end{pmatrix}$

joten $\begin{cases} x_1'' = x_1 \\ x_2'' = x_2 \end{cases}$ SIIS RATKAISTAAN

$$x_1'' - x = 0$$

yleinen RATKAISU OLI edellä esitetyn perusteella $x_1(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{-t} \Rightarrow x_1'(t) = x_2 = c_1 e^{t} - c_2 e^{-t}$

joten $x = \begin{bmatrix} c_1 e^{t} + c_2 e^{-t} \\ c_1 e^{t} - c_2 e^{-t} \end{bmatrix}$

SEURAAVASSA SAMA PARIN MUTKAN KAUTTA :

3) $$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

Joten systeemi voidaan esittää myös

$$X' = AX \quad , \text{ missä } X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \quad , A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

siis X on vektoriarvoinen

Yritetään esittää oikea puoli ominaisarvojen avulla. ts etsitään vektoreita, joille

$$A\tilde{x} = \lambda \tilde{x} \quad , \text{ jolloin } \lambda \in \mathbb{C} \, , \, \tilde{x} \neq 0$$

on sama, kuin etsitään ratkaisua

$$A\tilde{x} - \lambda\tilde{x} = 0 \iff (A - \lambda I)\tilde{x} = 0$$

Etsitään siis $\tilde{x} \in \ker(A - \lambda I)$

Jotta matriisi $(A-\lambda I)$ ei ole kääntyvä siis, että kerneliin kuuluu muitakin kuin nollavektori täytyy $\det(A-\lambda I) = 0$, joten

$$(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix} \quad \text{joten}$$

$$\lambda^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm 1$$

(Huom, noi ominaisarvot olis nähnyt suoraan vihjeestä)

Ominaisarvoa 1 vastaava ominaisvektori saadaan

$$A\tilde{x} = 1\tilde{x} \iff \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = x_1 \\ x_1 = x_2 \end{cases}$$

valitaan vaikka $\tilde{x}_1 = \begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{R}$

Ominaisvarvoa -1 vastaava ominaisvektori

$$A\tilde{x} = -1 \cdot \tilde{x} \iff \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -x_1 \\ x_2 = -x_2 \end{cases}$$

$\tilde{x}_{-1} = \begin{pmatrix} -c \\ +c \end{pmatrix}$ vaikkapa, $c \in \mathbb{R}$

3.2 OMINAISVEKTORIT OVAT KOHTISUORASSA

$$\langle (c,c), (-c,+c) \rangle_{\mathbb{R}^2} = -c^2 + c^2 = 0 \quad \text{ok} \quad (\langle \cdot,\cdot \rangle = \mathbb{R}^2 \text{ sisätulo})$$

VALITAAN c s.e VEKTORIN PITUUS SAADAAN 1:KSI

ts. $|\tilde{x}_1| = \sqrt{c^2+c^2} = 1 \iff 2c^2 = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{2}}$

TÄLLÖIN SAADAAN OMINAISVEKTOREISTA ON-KANTA $\mathbb{R}^2$:n

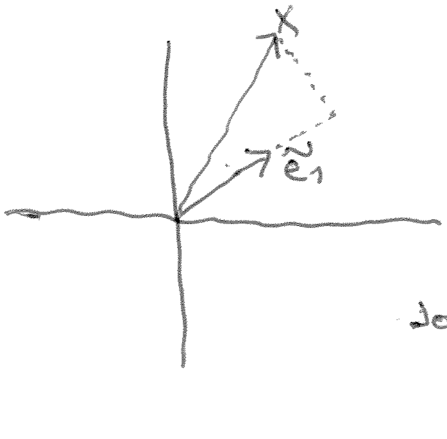
Valitaan $\tilde{e}_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $\tilde{e}_2 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, +\frac{1}{\sqrt{2}})$

Jolloin ALKUPERÄINEN MATRIISI VOIDAAN ESITTÄÄ MUODOSSA

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}}_{V^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{\Lambda} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}}_{V}$$

Mitäs tapahtuu m.v $x \in \mathbb{R}^2$ KUN sitä kuvataan matriisilla V ? ts $x \to Vx$

Sen vois ajatella tätä kautta!



Valitaan sellainen $\alpha \in \mathbb{R}$, että

$$\langle x - \alpha \tilde{e}_1, \alpha \tilde{e}_1 \rangle_{\mathbb{R}^2} = 0$$

joten

$$\langle x, \alpha \tilde{e}_1 \rangle - \langle \alpha \tilde{e}_1, \alpha \tilde{e}_1 \rangle = 0$$

$$\iff \langle x, \tilde{e}_1 \rangle_{\mathbb{R}^2} = \alpha \langle \tilde{e}_1, \tilde{e}_1 \rangle_{\mathbb{R}^2} = \alpha \|\tilde{e}_1\|^2_{\mathbb{R}^2}$$

siis $\alpha = \langle x, \tilde{e}_1 \rangle_{\mathbb{R}^2}$

Siis sisätulo x:n ja kantavektorin välillä antaa uuden "koordinaatin" uudessa kannassa

3.3 toisaalta jos $\tilde{e}_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ ja $x = (x_1, x_2)$

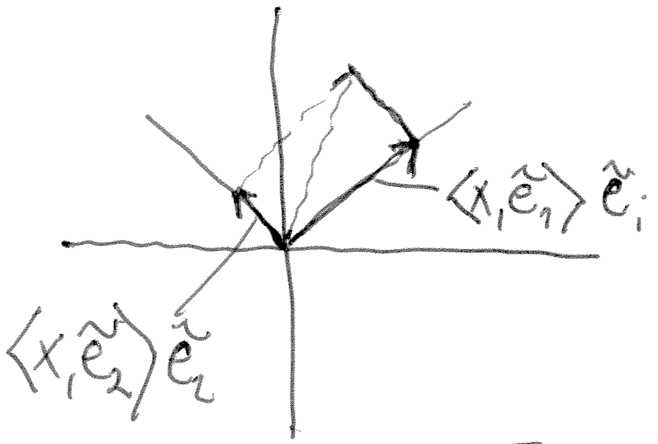
$$\langle x, \tilde{e}_1 \rangle = \frac{x_1}{\sqrt{2}} + \frac{x_2}{\sqrt{2}}$$ (siis koordinaatti $\tilde{e}_1$- suunnassa ~~kannassa~~)

$$\langle x, \tilde{e}_2 \rangle = -\frac{x_1}{\sqrt{2}} + \frac{x_2}{\sqrt{2}}$$ (siis koordinaatti $\tilde{e}_2$- suunnassa

$$\tilde{e}_2 = (-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}})$$

matriisi V kuvaa x:n Vx:ksi:

$$Vx = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_1}{\sqrt{2}} + \frac{x_2}{\sqrt{2}} \\ -\frac{x_1}{\sqrt{2}} + \frac{x_2}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \langle x, \tilde{e}_1 \rangle \\ \langle x, \tilde{e}_2 \rangle \end{pmatrix}$$



Siis V tekee koordinaattimuunnoksen "ominaisvektorikantaan"

Takaisin itse probleemaan

Jos määritellään apumuuttuja

$$\forall\, x(t) \in \mathbb{R}^2, \quad z(t) := V x(t)$$

$$x'(t) = V^{-1} \Lambda V x(t) \Rightarrow V x'(t) = \Lambda V x(t)$$

mutta $(Vx(t))' = V x'(t)$

niin saadaan, että

$$z'(t) = \Lambda V x(t) = \Lambda z(t)$$

$$\begin{bmatrix} z_1'(t) \\ z_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 z_1(t) \\ \lambda_2 z_2(t) \end{bmatrix}$$

3.4 Siis $z_1'(t) = \lambda_1 z_1(t) \Rightarrow z_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}$

$z_2'(t) = \lambda_2 z_2(t) \Rightarrow z_2(t) = c_2 e^{\lambda_2 t}$

eli $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$,

$$z = \begin{bmatrix} c_1 e^{t} \\ c_2 e^{-t} \end{bmatrix}$$

Koska kuvaus V^{-1} tekee koordinaatistomuutoksen takaisin standardikantaan ja lisäksi

$$z(t) = Vx(t) \Rightarrow V^{-1}z(t) = V^{-1}Vx(t)$$

Siis $x(t) = V^{-1}z(t)$

Joten $x(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 e^{t} \\ c_2 e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c_1}{\sqrt{2}} e^{t} - \frac{c_2}{\sqrt{2}} e^{-t} \\ \frac{c_1}{\sqrt{2}} e^{t} + \frac{c_2}{\sqrt{2}} e^{-t} \end{bmatrix}$

Siis $x(t) = \begin{bmatrix} \tilde{c}_1 e^{t} - \tilde{c}_2 e^{-t} \\ \tilde{c}_1 e^{t} + \tilde{c}_2 e^{-t} \end{bmatrix}$ on perusratkaisu