Matematiikan sovelluksia, syksy 2012
2. harjoitus 28.9.2012

1. (a) Kun $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ja $A, B \in \mathbb{C}$, etsi $K \in \mathbb{C}$ siten, että funktio:

$$y(t) = Ae^{kt} + Be^{kt}$$

Toteuttaa differentiaaliyhtälön:

$$y''(t) + \lambda y(t) = 0, \qquad t \in \mathbb{R}$$

(b) Minkälaisia ratkaisuja on olemassa, kun $\lambda = 0$

2. Tutki, millä $\lambda \in \mathbb{R}$, yhtälöllä

$$\begin{cases} y''(t) + \lambda y(t) = 0, \qquad t \in [0,1] \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

on ratkaisu ja kerro, mikä ratkaisu tällöin on?

3. Ratkaise

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix}$$

Vihje:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. In 1963, Edward Lorenz developed a simplified mathematical model for atmospheric convection. The model is a system of three ordinary differential equations now known as the Lorenz equations:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} = x(\sigma - z) - y \\ \frac{dz}{dt} = xy - \beta \mathrm{z} \end{cases}$$

Pyri selvittämään, mikä tällaselle systeemille on ominaista? Mitkä ominaisuudet tekevät systeemin matemaattisesta käsittelystä haastavan? Käy asiaa läitse, vaikkapa seuraavilta nettisivuilta:

http://en.wikipedia.org/wiki/Lorenz_system

http://www.um.es/fem/EjsWiki/Main/ExamplesLorenzAttractor

http://en.wikipedia.org/wiki/Butterfly_effect