MATEMAATTINEN ANALYYSI

Juha Partanen

1. Joukko-opin alkeet ja kuvauksen käsite

Logiikan merkintöjä ja nimityksiä.

Jos A ja B ovat lauseita, joilla on totuusarvo (tosi tai epätosi), merkitään seuraavasti:

$A \wedge B$ (A ja B; A:n ja B:n *konjunktio*, joka on tosi, kun sekä A että B ovat tosia ja muulloin epätosi).

$A \vee B$ (A tai B; A:n ja B:n *disjunktio*, joka on tosi, kun joko A tai B tai molemmat ovat tosia ja muulloin epätosi).

$A \Rightarrow B$ (jos A niin B; *implikaatio*; A implikoi B:n; A:sta seuraa B. Implikaatio on epätosi, kun A on tosi ja B epätosi; muulloin tosi).

$A \Leftrightarrow B$ (A jos ja vain jos B; *ekvivalenssi*. Ekvivalenssi on tosi jos A:lla ja B:llä on sama totuusarvo muulloin epätosi. $A \Leftrightarrow B$ on sama kuin $(A \Rightarrow B)$ ja $(B \Rightarrow A)$).

$\neg A$ (ei A; A:n negaatio. Negaatio on tosi jos A on epätosi ja epätosi kun A on tosi).

Näistä matematiikassa on keskeistä ymmärtää implikaatio oikein, sillä matemaattinen teoria etenee peruslauseista (aksioomista tai jo todistetuista lauseista) uusiin seuraavalla päättelysäännöllä:

$$(P \text{ ja } (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q \tag{p}$$

toisin sanoen P:n totuus ja implikaation $P \Rightarrow Q$ totuus takaa myös Q:n totuuden. Sitä ei riitä takaamaan implikaation $P \Rightarrow Q$ totuus, sillä lause "jos P, niin Q" tarkoittaa samaa kuin disjunktio "(ei P) tai Q ". Näin ollen $P \Rightarrow Q$ on tosi, jos P on epätosi!

Esimerkki. Epätodesta väitteestä $1 < 0$ saadaan todet implikaatiot

$$1 < 0 \Rightarrow \text{Tarja ei ole naisen nimi}$$
$$1 < 0 \Rightarrow \text{Tämä kurssi on hyödytön}$$

vaikkei kumpikaan johtopäätöksistä ole tosi.

Implikaation $P \Rightarrow Q$ *todistamiseksi* riittää siis olettaa P ja päätellä siitä Q, sillä jos P ei ole tosi, implikaatio on tosi. *Johtopäätöksen* Q totuus saadaan matematiikan teoriassa päättelemällä *tosista premisseistä* P yllä mainitulla päättelysäänöllä (p) että Q on myös tosi.

Usein lauseen P totuus riippuu siinä esiintyvistä muuttujista, esimerkiksi x:stä. Tällöin käytetään merkintöjä:

$\forall x : P(x)$, "kaikilla x, $P(x)$ tosi"

$\exists x : P(x)$, "on olemassa x s.e. $P(x)$ tosi" (s.e. = "siten että")

Symboli $\forall$ (kaikilla, kaikille, jokaiselle) on ns. *universaalikvanttori*, symboli $\exists$ (on olemassa) ns. *eksistenssikvanttori*. Opimme myöhemmin käytännössä niiden käyttöä.

Joukko-oppia.

Omaksumme naivin lähtökohdan: puhumme joukoista ja niiden alkioista ilman tarkempaa selitystä. Tästä ei tällä kurssilla käytännössä aiheudu loogisia ongelmia.

Joukkoja merkitään yleensä isoilla ja niiden alkioita pienillä kirjaimilla. Merkintä $x \in A$ luetaan "x kuuluu A:han" tai "x on joukon A alkio". Vastakohta $\neg x \in A$ merkitään $x \notin A$ ja luetaan "x ei kuulu A:han" tai "x ei ole A:n alkio". Jos $P(x)$ on alkiota x koskeva väite, joka on tosi tai epätosi joukon A alkioilla, merkitään niiden $x \in A$ joukkoa, joilla $P(x)$ on tosi, symbolilla

$$\{x \in A \mid P(x)\}$$

tai vain $\{x \mid P(x)\}$, jos asiayhteydestä on selvää, että puhutaan joukon A alkioista.

Esimerkki 1.1.

i) $\{1, 2, 3\}$ = luonnollisten lukujen 1, 2 ja 3 joukko; $1 \in \{1, 2, 3\}$; $4 \notin \{1, 2, 3\}$.

ii) Jos $A = \{1, 2, 3\}$, niin $\{x \in A \mid x > 2\} = \{3\}$.

iii) *Erityisiä joukkoja*:

$\emptyset$ = joukko, jossa ei ole alkioita, *tyhjä joukko*,
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, luonnolliset luvut,
$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, luonnolliset luvut ja 0,
$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$, kokonaisluvut,
$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z} \text{ ja } q \neq 0\}$, rationaaliluvut
(= $\{x \mid x = \frac{p}{q}$ joillain $p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z}$ ja $q \neq 0\}$),
$\mathbb{R}$, reaaliluvut,
$\mathbb{C} = (\{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ ja } i = \sqrt{-1}\})$, kompleksiluvut.

Avoimet välit.

$]a, b[\, = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$, $(a, b \in \mathbb{R};\ a < b)$

$]-\infty, a[\, = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$, $(a \in \mathbb{R})$

$]a, \infty[\, = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$, $(a \in \mathbb{R})$

$]-\infty, \infty[\, = \mathbb{R}$.

Puoliavoimet välit.

$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$, $(a, b \in \mathbb{R};\ a < b)$

$[a, b[\, = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$, $(a, b \in \mathbb{R};\ a < b)$

$]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$, $(a \in \mathbb{R})$

$[a, \infty[\, = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$, $(a \in \mathbb{R})$

Suljetut välit.
$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$, $(a, b \in \mathbb{R};\ a \leq b)$
(Joissain yhteyksissä voi olla mukava sallia myös yksipisteinen joukko $\{a\}$ suljetuksi väliksi $[a,a]$.)
Välien $[a,b]$, $]a,b[$, $[a,b[$ ja $]a,b]$ $(a, b \in \mathbb{R};\ a < b)$ *pituus* $= b - a$.

Määritelmä 1.2. Joukkojen A ja B
i) *yhdiste* $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ tai } x \in B\}$.
ii) *leikkaus* $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ ja } x \in B\}$.
iii) *erotus* $A \setminus B (= A - B) = \{x \mid x \in A \text{ ja } x \notin B\}$.
Joukko A on joukon B *osajoukko*, $A \subset B$, jos jokainen A:n alkio on myös B:n alkio, ts. jos $\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B$.

Huomautus. Erityisesti osajoukon määritelmästä seuraa, että A *ei ole* B*:n osajoukko*, $A \not\subset B$, jos ja vain jos on olemassa ainakin yksi $x \in A$ niin, että $x \notin B$.

Esimerkki 1.3.
i) $\emptyset \subset A$ kaikilla joukoilla A, sillä $\forall x : x \in \emptyset \Rightarrow x \in A$. [Implikaatio $x \in \emptyset \Rightarrow x \in A$ on aina tosi, sillä se tarkoittaa samaa kuin ”$x \notin \emptyset$ tai $x \in A$” ja tässä $x \notin \emptyset$ on aina tosi.]
ii) $\emptyset \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
iii) $A \subset A \cup B$, $B \subset A \cup B$, $A \cap B \subset A$, $A \cap B \subset B$, $A \setminus B \subset A$ ja $B \setminus A \subset B$.

Useissa yhteyksissä tarkastellaan jonkin kiinteän *perusjoukon* E (esim. $\mathbb{R}$) osajoukkoja. Tällöin joukkoa $E \setminus A$ nimitetään myös A:n *komplementiksi* (joukossa E) ja merkitään A^c (tai $C_E(A)$, $C(A)$, $\complement_E(A)$, $\complement(A)$, ...).

Kaksi joukkoa A ja B ovat samat, jos niillä on samat alkiot, ts. jos $\forall x : x \in A \Leftrightarrow x \in B$ (eli $A \subset B$ ja $B \subset A$).

Lause 1.4. *Olkoot A, B ja C E:n osajoukkoja. Tällöin*
(a) $A \cap A = A \cup A = A$
(b) $A \cap A^c = \emptyset$ *ja* $A \cup A^c = E$
(c) $(A^c)^c = A$
(d) $A \cap B = B \cup A$ *ja* $A \cup B = B \cup A$
(e) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
(f) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
(g) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
(h) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
(i) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ *ja* $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Todistus. Todistetaan malliksi väite (g). On siis osoitettava, että $A \cap (B \cup C) \overset{(1)}{\subset} (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ja $(A \cap B) \cup (A \cap C) \overset{(2)}{\subset} A \cap (B \cup C)$.

(1) Olkoon $x \in A \cap (B \cup C)$. Tällöin

$$
\begin{aligned}
&x \in A \text{ ja } (x \in B \cup C) \;\Rightarrow\; x \in A \text{ ja } (x \in B \text{ tai } x \in C) \;\Rightarrow \\
&(x \in A \text{ ja } x \in B) \text{ tai } (x \in A \text{ ja } x \in C) \;\Rightarrow\; x \in A \cap B \text{ tai } x \in A \cap C \;\Rightarrow \\
&x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)
\end{aligned}
$$

$\therefore \forall x : x \in A \cap (B \cup C) \;\Rightarrow\; x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ eli
$A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
(2) Olkoon $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Tällöin

$$
\begin{aligned}
&x \in A \cap B \text{ tai } x \in A \cap C \;\Rightarrow\; (x \in A \text{ ja } x \in B) \text{ tai } (x \in A \text{ ja } x \in C) \;\Rightarrow \\
&x \in A \text{ ja } (x \in B \text{ tai } x \in C) \;\Rightarrow\; x \in A \text{ ja } x \in B \cup C \;\Rightarrow\; x \in A \cap (B \cup C).
\end{aligned}
$$

$\therefore \forall x : x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \;\Rightarrow\; x \in A \cap (B \cup C)$ eli
$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$. $\square$

Indeksoidut joukkoperheet.
Olkoon I joukko (*indeksijoukko*) ja olkoon kutakin $i \in I$ kohti annettu joukko A_i.

Määritelmä 1.5. $(A_i)_{i \in I}$ on *indeksoitu joukkoperhe* jonka *yhdiste* on

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I : x \in A_i\}$$

ja *leikkaus*

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid \forall i \in I : x \in A_i\}$$

Todennäköisyyslaskennassa esiintyy usein indeksijoukkona $I = \mathbb{N}$. Tällöin merkitään myös

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \quad \text{ja} \quad \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Esimerkki. $[0, \infty[\;= \mathbb{N}_0 \cup (\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i)$, kun $I_i = \;]i-1, i[$ $(i \in \mathbb{N})$, ja tämä yhdiste on *pistevieras* (*erillinen*), sillä $\mathbb{N}_0 \cap I_i = \emptyset \; \forall i \in \mathbb{N}$ ja $I_i \cap I_j = \emptyset$ kun $i, j \in \mathbb{N}$ ja $i \neq j$.

Jos $\mathcal{F}$ on kokoelma joukkoja, merkitään myös

$$\bigcap \mathcal{F} = \{x \mid x \in F \; \forall F \in \mathcal{F}\}$$

$$\bigcup \mathcal{F} = \{x \mid x \in F \text{ jollain } F \in \mathcal{F}\}$$

Esimerkki. Merkitään $\mathcal{F} = \big\{\{x\} \mid x \in \mathbb{R}\big\}$. Tällöin

$$\bigcup \mathcal{F} = \bigcup_{x\in\mathbb{R}} \{x\} = \mathbb{R}.$$

Karteesinen tulo.
Olkoot $A_1, \ldots, A_n$ joukkoja $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Määritelmä 1.6. Joukkojen $A_1, \ldots, A_n$ *karteesinen tulo* $A_1 \times \ldots \times A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i$ on sellaisten järjestettyjen n-jonojen $(a_1, \ldots, a_n)$ muodostama joukko, että $a_i \in A_i$ $\forall i$:

$$A_1 \times \ldots \times A_n = \big\{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}\big\}$$

Jos $A_1 = \ldots = A_n = A$, merkitään myös $\prod_{i=1}^{n} A_i = A^n$.

Esimerkki 1.7.
i) $\mathbb{R}^n = \{x \mid x = (x_1, \ldots, x_n),\ x_i \in \mathbb{R}\ \forall i\}$. Erityisesti

$$\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in \mathbb{R},\ x_2 \in \mathbb{R}\} = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}$$

on *xy-taso* ja

$$\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 \in \mathbb{R},\ x_2 \in \mathbb{R},\ x_3 \in \mathbb{R}\} = \{(x, y, z) \mid x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{R}\}$$

on *xyz-avaruus*.
Luvut $x_i \in \mathbb{R}$ ovat *vektorin* (*pisteen*) $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *koordinaatit*.
ii) Jos $A = \{1, 2\}$ ja $B = \{a, b\}$ $(a \neq b)$ niin

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b)\}.$$

iii) $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset \times A_1 \times \ldots \times A_n = \emptyset$.
iv) $A \times B \neq B \times A$, jos $A \neq \emptyset$ ja $B \neq \emptyset$ ja $A \neq B$.

Lause 1.8.
i) $A \subset C$ *ja* $B \subset D \ \Rightarrow\ A \times B \subset C \times D$.
ii) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.
iii) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

Todistus. Malliksi ehdon ii) todistuksen juoni:

$$x \in A \times (B \cap C) \ \Leftrightarrow\ x = (a, y)\ (a \in A,\ y \in B \cap C) \ \Leftrightarrow$$
$$x = (a, y)\ (a \in A,\ y \in B \text{ ja } y \in C) \ \Leftrightarrow\ x = (a, y) \in (A \times B) \cap (A \times C). \quad \square$$

Kuvaukset.

Intuitiivisesti *funktio* eli *kuvaus* $f : A \to B$ *lähtöjoukolta* A *maalijoukkoon* B on "sääntö", joka liittää jokaiseen lähdön alkioon x maalin alkion $y = f(x)$, x:n *kuvan*. Tällöin käytetään myös merkintöjä

$$\begin{aligned} A &\longrightarrow B \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned} \quad \text{tai } x \mapsto f(x) \text{ tai vain } f(x)$$

Esimerkki 1.9.

i) Jos $A = [0,1]$, niin $x \mapsto x^3$ eli $f(x) = x^3$ on kuvaus $A \to A$, sillä $0 \le x \le 1 \Rightarrow 0 \le x^3 \le 1$. Toisaalta merkintä $f(x) = x^3$ ei riitä f:n määrittelemiseen ilman lähtö -ja maalijoukkoja, sillä $f(x) = x^3$ on tulkittavissa myös kuvaukseksi $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tai $]-\infty, 0] \to]-\infty, 0]$ tai ....

ii) Joukon A *identtinen kuvaus* $\mathrm{id_A} : A \to A$ on se kuvaus, jolle $\mathrm{id_A}(x) = x \ \forall x \in A$.

iii) Jos $B \subset A$ ja $f : A \to C$ on kuvaus, saadaan f:n *rajoittumakuvaus* $(f|B) : B \to C$ joukkoon B asettamalla

$$(f|B)(x) = f(x) \ \forall x \in B.$$

Huomautus. Joukko-opin avulla kuvaukselle $f : A \to B$ saadaan täsmällisempi määritelmä samaistamalla kuvaus $f : A \to B$ *graafinsa*

$$\Gamma(f) = \{(x, y) \in A \times B \mid y = f(x)\} \subset A \times B$$

kanssa. Havaitaan, että kuvauksen graafeja ovat tarkalleen ne osajoukot $C \subset A \times B$, joille pätee: $\forall x \in A \ \exists$ tasan yksi $y \in B$ s.e. $(x, y) \in C$. Jokainen tällainen $C \subset A \times B$ antaa siis "säännön" $(x, y) \in C$ ehdolle $y = f(x)$, ts. määrittelee kuvauksen $f : A \to B$. Kääntäen jokainen kuvaus $f : A \to B$ määrittelee tällaisen $C = \Gamma(f) \subset A \times B$.

Pitäydymme tällä kurssilla yksinkertaisemmassa "sääntö"-sanaan nojaavassa kuvauskäsitteessä.

Jos $f : X \to Y$ on kuvaus $A \subset X$ ja $B \subset Y$, niin määritellään

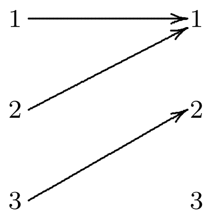
$$\begin{aligned} f(A) &= \{f(x) \mid x \in A\}, \ A\text{:n } \textit{kuva(joukko)} \\ f^{-1}(B) &= \{x \in X \mid f(x) \in B\}, \ B\text{:n } \textit{alkukuva(joukko)} \end{aligned}$$

Tällöin $f(A) \subset Y$ ja $f^{-1}(B) \subset X$. Joukkoa $f(X) \subset Y$ sanotaan f:n *kuvajoukoksi*.

Esimerkki.

i) Jos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on kuvaus $f(x) = x^2$, niin $f(\mathbb{R}) = [0, \infty[$, $f([0,1]) = [0,1] = f([-1,1])$ ja $f^{-1}([0,1]) = [-1,1]$, $f^{-1}([0,2]) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

ii) Jos $f : \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$ on kuvan mukainen, niin



f

$f^{-1}(\{3\}) \overset{\text{merk.}}{=} f^{-1}(3) = \emptyset$
$f(\{1,3\}) = \{1,2\}$
$f^{-1}(2) = \{3\}$
f:n kuvajoukko on {1,2}.

Lause 1.10. *Olkoon $f : A \to B$ kuvaus, $X \subset A$, $X' \subset A$, $Y \subset B$ ja $Y' \subset B$. Tällöin*

(i) $$f(X \cap X') \subset f(X) \cap f(X')$$

(ii) $$f(X \cup X') = f(X) \cup f(X')$$

(iii) $$f^{-1}(Y \cap Y') = f^{-1}(Y) \cap f^{-1}(Y')$$

(iv) $$f^{-1}(Y \cup Y') = f^{-1}(Y) \cup f^{-1}(Y')$$

Todistus. Malliksi iii):n juoni: Olkoon $x \in A$. Tällöin

$$\begin{aligned} &x \in f^{-1}(Y \cap Y') \;\Leftrightarrow\; f(x) \in Y \cap Y' \;\Leftrightarrow\; f(x) \in Y \text{ ja } f(x) \in Y' \;\Leftrightarrow \\ &x \in f^{-1}(Y) \text{ ja } x \in f^{-1}(Y') \;\Leftrightarrow\; x \in f^{-1}(Y) \cap f^{-1}(Y'). \quad \square \end{aligned}$$

Jos $f : A \to B$ ja $g : B \to C$ ovat kuvauksia, voidaan muodostaa niiden *yhdistetty kuvaus* $g \circ f : A \to C$ asettamalla

$$g \circ f(x) = g(f(x)) \; \forall x \in A.$$

Yhdistetty kuvaus $g \circ f$ operoi siis A:n alkioon x kuvaamalla sen ensin alkioksi $f(x) \in B$ ja edelleen alkioksi $g(f(x)) \in C$:

$$\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C \\ x & \longmapsto & f(x) & \longmapsto & g(f(x)) = (g \circ f)(x) \end{array}$$

Määritelmä 1.11. Kuvaus $f : A \to B$ on
a) *injektio*, jos f kuvaa eri alkiot eri alkioille, ts. jos

$$\forall x_1, x_2 \in A : x_1 \neq x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \neq f(x_2),$$

mikä voidaan lausua myös muodossa:

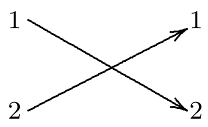
$$\forall x_1, x_2 \in A : f(x_1) = f(x_2) \;\Rightarrow\; x_1 = x_2,$$

b) *surjektio*, jos $f(A) = B$, ts. jos $\forall y \in B \; \exists x \in A$ siten, että $f(x) = y$,
c) *bijektio*, jos se on injektio ja surjektio.

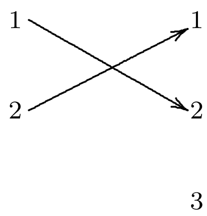
Esimerkki 1.12.
i) Kuvaus $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, on injektio: jos $x, y \in \mathbb{R}$ ja $f(x) = f(y)$, niin

$$\begin{aligned}
&x^3 = y^3 \;\Rightarrow\; x^3 - y^3 = 0 \;\Rightarrow\; (x-y)(x^2+xy+y^2) = 0 \;\Rightarrow\\
&x - y = 0 \text{ tai } x^2 + xy + y^2 = 0 \;\Rightarrow\; x = y \text{ tai } (x + \frac{1}{2}y)^2 + \frac{3}{4}y^2 = 0 \;\Rightarrow\\
&x = y \text{ tai } (x + \frac{1}{2}y = 0 \text{ ja } y = 0) \;\Rightarrow\; x = y \text{ tai } x = 0 = y \;\Rightarrow\; x = y.
\end{aligned}$$

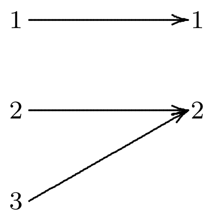
Itse asiassa (myöhemmin osoitetaan, että) f on myös surjektio ja siis bijektio: jos $y \in \mathbb{R}$, on $y = f(\sqrt[3]{y}) \in \mathbb{R}$.

ii) 

f bijektio

iii) 

f injektio
ei surjektio

iv) 

f surjektio
ei injektio

v) $f : [-1, 1] \to [0, 1]$, $f(x) = x^2$, on surjektio, mutta ei injektio, sillä alkion $y \in [0, 1]$ alkukuvajoukossa

$$f^{-1}(y) = \{x \in [0, 1] \mid f(x) = x^2 = y\} = \{-\sqrt{y}, \sqrt{y}\}$$

on enemmän kuin yksi alkio (nimittäin kaksi) kun $y > 0$ (ja vain yksi alkio ainoastaan tapuksessa $y = 0$).
vi) $f : [0, 1] \to [0, 1]$, $f(x) = x^2$, on bijektio.
vii) $f : [0, \frac{1}{2}] \to [0, 1]$, $f(x) = x^2$, on injektio, mutta ei surjektio.

Lause 1.13. *Seuraavat ehdot kuvaukselle $f : A \to B$ ovat yhtäpitävät:*
(a) *f on bijektio,*
(b) *yhtälöllä $y = f(x)$ on kullakin $y \in B$ tasan yksi ratkaisu $x \in A$,*
(c) *on olemassa yksi ja vain yksi kuvaus $g : B \to A$ siten, että $f \circ g = \mathrm{id}_B$ ja $g \circ f = \mathrm{id}_A$.*
Kuvausta g sanotaan f:n käänteiskuvaukseksi ja sitä merkitään $g = f^{-1}$.

Todistus. Riittää osoittaa, että (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (a).
(a) $\Rightarrow$ (b): Olkoon $y \in B$. Koska $f : A \to B$ on surjektio, niin on olemassa sellainen $x \in A$, että $y = f(x)$. Koska f on lisäksi injektio, niin kyseinen x on yksikäsitteinen.
(b) $\Rightarrow$ (c): Asetamme "säännön" g, joka liittää alkioon $y \in B$ alkion $x \in A$ seuraavasti:

Jokaisella $y \in B$ $g(y)$ on yhtälön $y = f(x)$ ratkaisu x.

Tällöin ”sääntö” g on kuvaus $B \to A$, sillä $g(y)$ on määritelty ja oletuksen nojalla, yksikäsitteinen jokaisella $y \in B$.

Suoraan g:n määrittelyn perusteella

$$f(g(y)) = y \ \forall y \in B,$$

joten $f \circ g = \mathrm{id_B}$. Jos $x_0 \in A$, niin merkitään $y_0 = f(x_0)$, jolloin $x = x_0$ on yhtälön $y_0 = f(x)$ yksikäsitteinen ratkaisu. Määrittelmän nojalla $g(y_0) = x_0$, joten $g(f(x_0)) = x_0$. Koska $x_0 \in A$ oli mielivaltainen, niin

$$g(f(x)) = x \ \forall x \in A,$$

joten $g \circ f = \mathrm{id_A}$.

Funktion g yksikäsitteisyys: Olkoon $g_1 : B \to A$ mielivaltainen funktio, jolle $g_1 \circ f = \mathrm{id_A}$ ja $f \circ g_1 = \mathrm{id_B}$. Olkoon lisäksi $y \in B$. Tällöin

$$\begin{aligned} g_1(y) &= g_1(\mathrm{id_B}(y)) = g_1((f \circ g)(y)) \\ &= g_1(f(g(y))) = (g_1 \circ f)(g(y)) = \mathrm{id_A}(g(y)) = g(y) \end{aligned}$$

Siis $g_1(y) = g(y) \ \forall y \in B$, joten $g_1 = g$.

(c) $\Rightarrow$ (a): Olkoon $y \in B$. Tällöin $g(y) \in A$ ja

$$y = \mathrm{id_B}(y) = (f \circ g)(y) = f(g(y)),$$

joten f on surjektio. Jos $x, x' \in A$ ja $f(x) = f(x')$, niin

$$x = \mathrm{id_A}(x) = g(f(x)) = g(f(x')) = \mathrm{id_A}(x') = x',$$

joten f on injektio. Siis f on bijektio. $\square$

Jos siis yhtälö $y = f(x)$ osataan ratkaista, ja lisäksi ratkaisu on yksikäsitteinen kyseeseen tulevilla y:n arvoilla, niin ylläolevasta lauseesta seuraa välittömästi funktion f bijektiivisyys ja lisäksi käänteisfunktion f^{-1} olemassaolo. Tällöin $f^{-1}(y) = g(y)$, missä $g(y)$ on yhtälön $y = f(x)$ (yksikäsitteinen) ratkaisu, kuten ylläolevan lauseen todistuksesta ilmenee. Tästä seuraava esimerkki.

Esimerkki 1.14. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 6x + 8$ ja olkoon $y \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$f(x) = y \ \Leftrightarrow \ x^2 + 6x + 8 = y \ \Leftrightarrow \ (x+3)^2 - 1 = y \ \Leftrightarrow \ (x+3)^2 = y + 1$$

Koska $(x+3)^2 \geq 0$, niin yhtälöllä

$$(*) \qquad y = f(x)$$

on ratkaisuja vain jos $y+1 \geq 0$ eli $y \geq -1$. Tällöin

$$
\begin{aligned}
&(x+3)^2 = y+1 \;\Leftrightarrow\; x+3 = \pm\sqrt{y+1} \;\Leftrightarrow \\
&x = g_1(y) = -3 - \sqrt{y+1} \;\text{ tai }\; x = g_2(y) = -3 + \sqrt{y+1}
\end{aligned}
$$

Erityisesti $g_1(-1) = g_2(-1) = -3$ ja $g_1(y) < -3$ ja $g_2(y) > -3$ kun $y > -1$. Näin ollen yhtälöllä $(*)$ ei ole ratkaisua kaikilla $y \in \mathbb{R}$ ja lisäksi ratkaisu on yksikäsitteinen vain yhdellä y:n arvolla. Jotta lausetta 1.14 voitaisiin soveltaa on siis rajoitettava sekä funktion f määrittelyjoukkoa että maalijoukkoa. Tätä varten merkitsemme

$$A_1 = \,]-\infty, -3]\,,\; A_2 = [-3, \infty[\; \text{ ja } \; B = [-1, \infty[$$

ja määrittelemme funktiot $f_1 : A_1 \to B$, $f_1(x) = (f|A_1)(x) = f(x)$, ja $f_2 : A_2 \to B$, $f_2(x) = (f|A_2)(x) = f(x)$. Nyt yhtälöllä $y = f_1(x)$ on yksikäsitteinen ratkaisu $x = g_1(y) \in A_1$ kaikilla $y \in B$ joten f_1 on bijektio ja sillä on käänteiskuvaus $f_1^{-1} : B \to A_1$. Lisäksi $f_1^{-1} = g_1$. Vastaavasti yhtälöllä $y = f_2(x)$ on yksikäsitteinen ratkaisu $x = g_2(y) \in A_2$ kaikilla $y \in B$ joten f_2 on myös bijektio ja sillä on käänteiskuvaus $f_2^{-1} : B \to A_2$. Lisäksi $f_2^{-1} = g_2$.

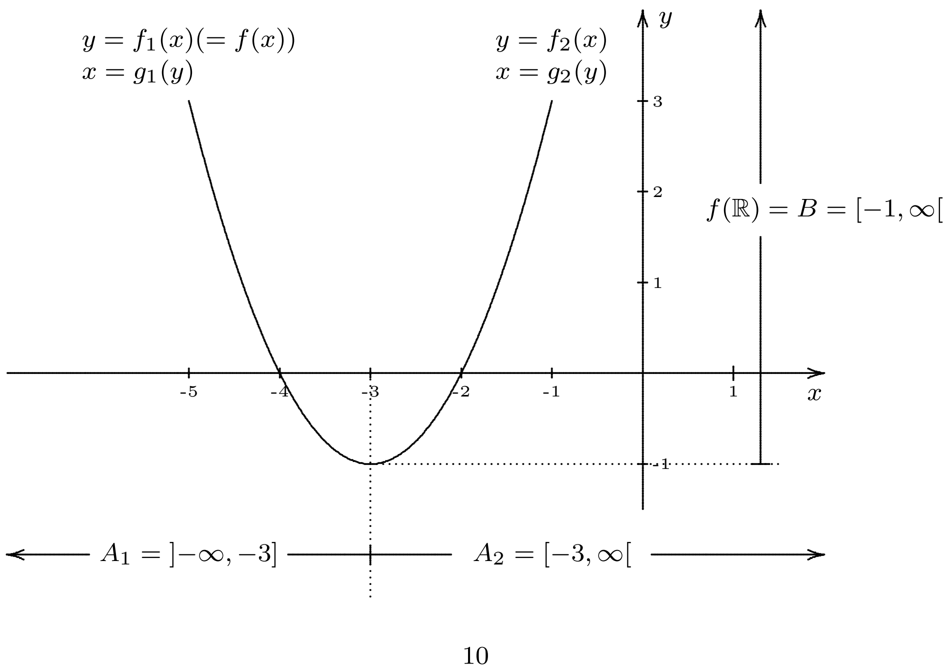
Funktioiden f_1 ja f_2 määrittelyn nojalla kuvajoukoille pätee

$$f(A_i) = (f|A_i)(A_i) = f_i(A_i) = B,\; i = 1, 2$$

Toisaalta $f(x) = (x+3)^2 - 1 \geq -1 \;\forall x \in \mathbb{R}$, joten $f(\mathbb{R}) \subset B$. Toisaalta $B = f(A_1) \subset f(\mathbb{R})$, joten

$$f(\mathbb{R}) = f(A_1) = f(A_2) = B.$$

Kuva :



Katsotaan vielä, miten ehdot 1.14 (c) tässä tapauksessa toteutuvat:

$$\begin{aligned}(f_2 \circ g_2)(y) &= f_2(\sqrt{y+1}-3) = f(\sqrt{y+1}-3)\\ &= (\sqrt{y+1}-3)^2 + 6(\sqrt{y+1}-3) + 8\\ &= y+1-6\sqrt{y+1}+9+6\sqrt{y+1}-18+8\\ &= y+18-18 = y,\ \forall y \geq -1.\end{aligned}$$

Lähes samoin osoitetaan, että $(f_1 \circ g_1)(y) = y$, $\forall y \geq -1$ Edelleen

$$\begin{aligned}(g_1 \circ f_1)(x) &= g_1(f_1(x)) = g_1(f(x)) = g_1(x^2+6x+8) = -\sqrt{(x^2+6x+8)+1}-3\\ &= -\sqrt{(x+3)^2}-3 = -|x+3|-3 = x+3-3 = x,\ \forall x \leq -3.\end{aligned}$$

Samaan tapaan osoitetaan $(g_2 \circ f_2)(x) = x$, $\forall x \geq -3$.

Edellisessä esimerkissä osoitettiin käänteiskuvauksen olemassaolo ja samalla myös löydettiin käänteiskuvauksen lauseke, ratkaisemalla yhtälö $y = f(x)$. Toinen tapa on arvata f^{-1}:n lauseke ja sen jälkeen tarkistaa arvauksen oikeellisuus verifioimalla kuvausyhtälöt $f \circ f^{-1} = \mathrm{id_B}$ ja $f^{-1} \circ f = \mathrm{id_A}$.

Esimerkki. Identtinen kuvaus $\mathrm{id_A} : A \to A$ on bijektio ja oma käänteiskuvauksensa, sillä $\mathrm{id_A} \circ \mathrm{id_A} = \mathrm{id_A}$, koska kaikilla $x \in A$ on

$$(\mathrm{id_A} \circ \mathrm{id_A})(x) = \mathrm{id_A}(\mathrm{id_A}(x)) = \mathrm{id_A}(x) = x.$$

Monotoniset funktiot.

Määritelmä 1.15. Olkoon $A \subset \mathbb{R}$ ja $B \subset \mathbb{R}$. Kuvaus $f : A \to B$ on

(1) *kasvava*, jos $x \leq x' \ \Rightarrow\ f(x) \leq f(x')\ \forall x, x' \in A$,
(2) *vähenevä*, jos $x \leq x' \ \Rightarrow\ f(x) \geq f(x')\ \forall x, x' \in A$,
(3) *aidosti kasvava*, jos $x < x' \ \Rightarrow\ f(x) < f(x')\ \forall x, x' \in A$,
(4) *aidosti vähenevä*, jos $x < x' \ \Rightarrow\ f(x) > f(x')\ \forall x, x' \in A$.

f on *monotoninen*, jos f on kasvava tai vähenevä ja *aidosti monotoninen*, jos f on aidosti kasvava tai aidosti vähenevä.

Esimerkki.

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, on aidosti kasvava.

(b) $f :]-\infty, 0] \to [0, \infty[$, $f(x) = x^2$, on aidosti vähenevä.

(c) $f : [0, \infty[\to [0, \infty[$, $f(x) = x^2$, on aidosti kasvava.

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, ei ole monotoninen.

Lause 1.16. *Olkoon $A \subset \mathbb{R}$ ja $B \subset \mathbb{R}$.*

(a) Jos $f : A \to B$ on aidosti monotoninen, f on injektio.

(b) Jos $f : A \to B$ on aidosti kasvava (vähenevä) bijektio, f^{-1} on myös aidosti kasvava (vähenevä) bijektio.

Todistus. (a) Jos $x, y \in A$ ja $x \neq y$, on $x < y$ tai $y < x$. Jos f on aidosti monotoninen, on tällöin siis myös $f(x) < f(y)$ tai $f(x) > f(y)$, joten $f(x) \neq f(y)$.

(b) Olkoon $f : A \to B$ aidosti kasvava bijektio, $y, y' \in B$, $y < y'$. Jos olisi $f^{-1}(y) \geq f^{-1}(y')$, saataisiin ristiriita

$$y = f(f^{-1}(y)) \geq f(f^{-1}(y')) = y'$$

Siis: $\forall y, y' \in B : y < y' \;\Rightarrow\; f^{-1}(y) < f^{-1}(y')$. Näin ollen f^{-1} on aidosti kasvava kuvaus $B \to A$.

Vastaavasti käsitellään aidosti vähenevän bjektion $f : A \to B$ tapaus; tällöin $f^{-1} : B \to A$ on aidosti vähenevä. $\square$

Yleishuomautus reaalimuuttujan reaalifunktioon liittyvistä merkintäkäytännöistä. Tällä kurssilla käsitellään pääasiassa *reaalimuuttujan reaaliarvoisia* funktioita $f : A \to B$ $(A, B \subset \mathbb{R})$. Määrittelyjoukko A on yleensä väli tai välien yhdiste. Jos f on tällöin määritelty jollain lausekkeella, esim. $f(x) = \frac{1}{x}$, ymmärretään A yleensä ilman eri mainintaa mahdollisimman laajaksi, jos sitä ei ole määrittelyn yhteydessä tarkemmin nimetty. A:n laajuudelle voi asettaa rajoituksia esim. funktioiden yhdistäminen tai muu asiayhteydestä ilmenevä seikka. Sama pätee maalijoukkoon $B \subset \mathbb{R}$; se voidaan yleensä ajatella koko $\mathbb{R}$:ksi, jos syytä muuhun ei ole. Tarpeen vaatiessa käytämme tietysti tarkempaa merkintätapaa $\begin{matrix} A \longrightarrow B \\ x \longmapsto f(x) \end{matrix}$, jossa lähtö -ja maalijoukot A ja B on esitelty kunnolla.

Relaatiot.

Määritelmä 1.17. Joukkojen A ja B välinen *relaatio* R on mikä tahansa $A \times B$:n osajoukko R. Alkiot $x \in A$ ja $y \in B$ ovat *relaatiossa* R keskenään, jos $(x, y) \in R$. Tällöin käytetään myös merkintää xRy.

Esimerkki.
i) Jokainen kuvaus $f : A \to B$ on relaatio, kun samaistetaan f graafinsa

$$\Gamma(f) = \{(x, y) \in A \times B \mid y = f(x)\}$$

kanssa.

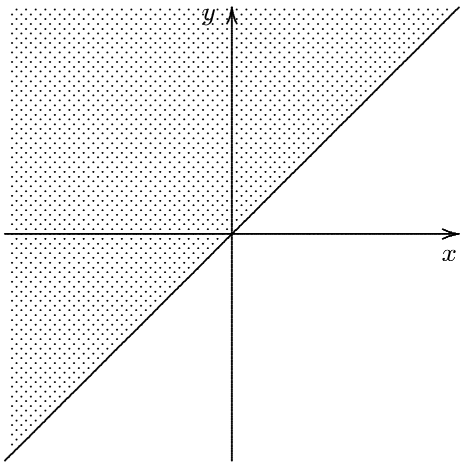
ii) $\mathbb{R}$:n järjestys $\leq$ on *$\mathbb{R}$:n relaatio* (ts. $\mathbb{R}$:n ja $\mathbb{R}$:n välinen). Merkitsemme sitä seuraavassa symbolilla $R_{\leq}$. Siis

$$R_{\leq} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\}$$

Tästä ja eräistä muista $\mathbb{R}$:n relaatioista on kuvia seuraavassa.

Kuvia eräistä $\mathbb{R}$:n relaatioista $R \subset \mathbb{R}^2$.

i) Järjestysrelaation $R_\leq$ kuva alla on viivoitettu tason osa, joka koostuu reunasuorasta $y = x$ ja sen yläpuolisesta puolitasosta $y > x$.

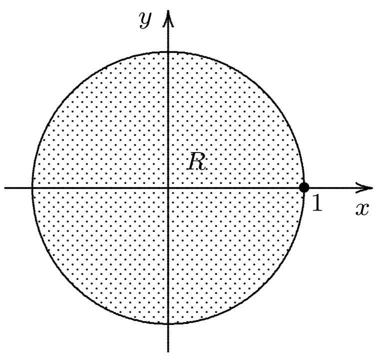


Järjestysrelaatio $R_\leq$ voidaan siis esittää pistevieraana yhdisteenä relaatioista

$$\mathrm{id}_\mathbb{R} = \{(x, y) \mid x = y\} \text{ ja } R_< = \{(x, y) \mid x < y\}.$$

Siis $R_\leq = \mathrm{id}_\mathbb{R} \cup R_<$ ja $\mathrm{id}_\mathbb{R} \cap R_< = \emptyset$.

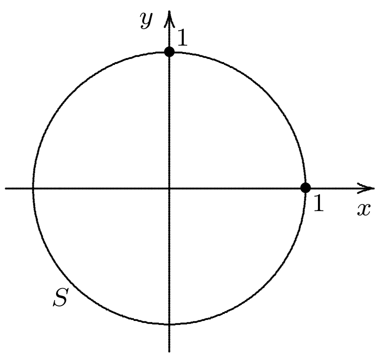
ii) Relaation $R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ kuva on origokeskinen yksikkökiekko reunaympyröineen (varjostettu tason osa):



Relaation R osajoukko,

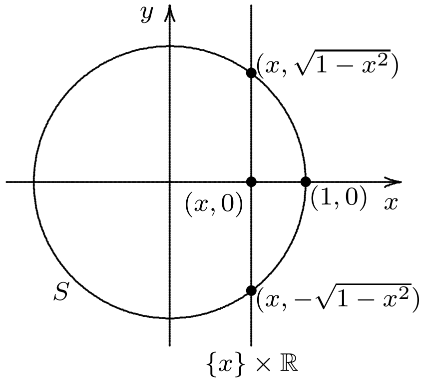
$$S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

joka on myös relaatio, on origokeskinen yksikköympyrä.



Kysymys: Onko S jonkin funktion $y = f(x)$ kuvaaja $\Gamma(f)$?

Vastaus: Ei ole. Jos nimittäin tällainen funktio olisi olemassa, niin geometrisesti kuvaajan $\Gamma(f)$ piste $(x, f(x))$, missä x on funktion määrittelyjoukon piste, on pisteen $(x, 0)$ kautta kulkevan y-akselin suuntaisen suoran, ja $\Gamma(f)$:n leikkauspiste. Tällaisia leikkauspisteitä voi (kiinteällä x) olla vain yksi (funktion arvojen yksikäsitteisyys!). Esillä olevassa tapauksessa niitä on selvästikin kaksi poislukien tapaukset $x = \pm 1$ (kuva alla).



Täsmällisemmin sanottuna $S \subset [-1, 1] \times \mathbb{R}$ ja kiinteällä x yllä mainittu pisteen $(x, 0)$ kautta kulkeva y-akselin suuntainen suora on joukko $\{x\} \times \mathbb{R}$. Sen ja S:n leikkauspisteet ovat

$$(\{x\} \times \mathbb{R}) \cap S = \{(x, \sqrt{1 - x^2}), (x, -\sqrt{1 - x^2})\},$$

joita siis on <u>kaksi</u> kaikilla $x \in]-1, 1[$. Jos S olisi jonkin funktion f kuvaaja, niin f:n määrittelyjoukko olisi ilmeisesti $[-1, 1]$. Tällöin funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ kuvaajalla

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)) \mid -1 \leq x \leq 1\}$$

olisi tasan yksi $\{x\} \times \mathbb{R}$:n piste, nimittäin juuri piste $(x, f(x))$, mikä on ristiriidassa edellä todetun kanssa.

Toisaalta S voidaan esittää kahden funktion kuvaajien yhdisteenä:

$$S = \Gamma(f_1) \cup \Gamma(f_2),$$

missä $f_1 : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = \sqrt{1 - x^2}$, ja $f_2 : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}$. Siis S on y-akselin ”ylä -ja alapuolisten” puoliympyröiden yhdiste.

2. Reaaliluvut ($\mathbb{R}$)

Koulukurssista osin tuttu reaalilukujen joukko ominaisuuksineen (laskutoimitukset, järjestys) voidaan konstruoida joukko-opin avulla. Emme tällä kurssilla voi tehdä tätä vaan tyydymme esittämään aksioomat, jotka karakterisoivat $\mathbb{R}$:n (laskutoimituksineen ja järjestyksineen). Ennen sitä on syytä käsitellä lyhyesti luonnollista lukua $n \in \mathbb{N}$ koskeviin väitteisiin liittyvää todistusmenetelmää, *induktiota n:n suhteen.*

Induktiotodistus.

Olkoon $P(n)$ luonnollista lukua n koskeva väittämä, joka on tosi tai epätosi kullakin $n \in \mathbb{N}$. Väitteen

$$\text{"}P(n) \text{ on tosi kaikilla } n \in \mathbb{N}\text{"}$$

todistamiseen käytetään usein induktiotodistusta: Jos ehdot

1° $P(1)$ on tosi ja

2° $\forall k \in \mathbb{N} : P(k) \;\Rightarrow\; P(k+1)$

ovat voimassa, niin $P(n)$ on tosi kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Väitteen "$\forall n : P(n)$" todistamiseksi riittää siis osoittaa, että se pätee luvulla 1 (tai yleisemmin ensimmäisellä tarkasteltavalla luvulla $n \in \mathbb{N}$) ja että sen pätiessä jollakin $k \in \mathbb{N}$ (k kiinteä, mielivaltainen), se pätee seuraavallakin luonnollisella luvulla $k+1$.

Implikaation 2° todistamiseksi tehdään induktio-oletus: $k \in \mathbb{N}$ ja $P(k)$ on tosi. Tästä on sitten pääteltävä väite $P(k+1)$.

Esimerkki 2.1.

Todistetaan induktiolla *aritmeettisen jonon* $(a, a+d, a+2d, \ldots, a+(n-1)d)$ summan S_n kaava

$$(*) \qquad S_n = n \cdot \frac{a + (a + (n-1)d)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}d + na$$

(jälkimmäinen esitysmuoto saadaan helpolla laskulla edellisestä).

1° $S_1 = a = 1 \cdot \dfrac{a + (a + (1-1)d)}{2}$, joten väite pätee arvolla $n = 1$.

2° Induktio-oletus (IO): Olkoon $k \in \mathbb{N}$ ja olkoon

$$S_k = a + (a+d) + \ldots + (a + (k-1)d) = \frac{k(k-1)}{2}d + ka$$

Tällöin on

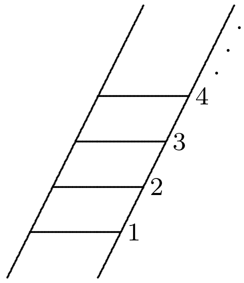
$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + (a + kd) \underset{\text{IO}}{=} \frac{k(k-1)}{2}d + ka + a + kd = \frac{k(k-1)}{2}d + (k+1)a + \frac{2k}{2}d \\ &= \frac{k^2 - k + 2k}{2}d + (k+1)a = \frac{k^2+k}{2}d + (k+1)a = \frac{(k+1)k}{2}d + (k+1)a \\ &= \frac{(k+1)((k+1)-1)}{2}d + (k+1)a \end{aligned}$$

eli kaava $(*)$ pätee myös arvolla $n = k + 1$.

Induktioperiaatteen nojalla kaava $(*)$ pätee nyt kaikilla $n \in \mathbb{N}$, ts. aritmeettisen jonon summa on termien määrä $\times$ ensimmäisen ja viimeisen termin keskiarvo. $\square$

Tikapuuvertaus:

Jos henkilö pystyy nousemaan tikapuiden ensi askelmalle ja jos hän lisäksi tietää, miten noustaan edelliseltä askelmalta seuraavalle, hän pääsee niin ylös kuin haluaa.



Binomikaava.

Tärkeänä esimerkkinä induktioperiaatteen käytöstä johdamme nyt ns. binomikaavan. Ensin eräitä merkintöjä:

Olkoon I äärellinen joukko ja $x_i \in \mathbb{R}$ kaikilla $i \in I$.

Summa $\sum_{i \in I} x_i =$ lukujen x_i $(i \in I)$ summa. Jos $I = \{0, \ldots, n\}$, merkitään yleensä $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{i=0}^{n} x_i$. Vastaavasti merkitään lukujen x_i $(i \in I)$ *tuloa* $\prod_{i \in I} x_i$ tai $\prod_{i=1}^{n} x_i$, jos $I = \{1, \ldots, n\}$.

Kertoma $n! = \prod_{i=1}^{n} i = 1 \cdot \ldots \cdot n$ $(n \in \mathbb{N})$ ja lisäksi sovitaan, että $0! = 1$.

Binomikerroin $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ $(n, k \in \mathbb{N}_0;\ 0 \leq k \leq n)$.

Esimerkki.

(i) $$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1} \cdot 2 \cdot 1} = 10; \qquad \binom{5}{0} = \frac{5!}{0!\,(5-0)!} = \frac{5!}{5!} = 1.$$

(ii) Binomikertoimet nähdään ns. *Pascalin kolmiosta*:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & \ldots & & & & &
\end{array}$$

$n+1$. rivin alkiot saadaan n. rivin alkioista säännöllä

$$\text{(P)} \qquad \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

(todistetaan induktiolla; harjoitustehtävä).

Lause 2.2. *(Binomikaava) Jos $a, b \in \mathbb{R}$ ja $n \in \mathbb{N}$, niin*

$$(*) \qquad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Todistus. Todistetaan kaava $(*)$ induktiolla luvun $n \in \mathbb{N}$ suhteen.

1° Jos $n = 1$, kaava $(*)$ pätee sillä

$$(a+b)^1 = a + b = \binom{1}{0} a^{1-0} b^0 + \binom{1}{1} a^{1-1} b^1$$

(jos $a = 0$ tai $b = 0$, sovitaan että tässä yhteydessä $0^0 = 1$; raja-arvolaskuissa 0^0 ei ole ns. "sallittu muoto").

2° Induktio-oletus (IO): $m \in \mathbb{N}$ ja $(a+b)^m = \sum\limits_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{m-k} b^k$.

Tällöin on

$$\begin{aligned}(a+b)^{m+1} &= (a+b)(a+b)^m \underset{\text{IO}}{=} (a+b) \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{m-k} b^k \\ &= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{m-k+1} b^k + \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{m-k} b^{k+1}\end{aligned}$$

Merkitään jälkimmäisessä summassa $i = k+1$ ja edellisessä $i = k$, jolloin jälkimmäisessä summassa $1 \le i \le m+1$ ja edellisessä $0 \le i \le m$. Saadaan

$$(a+b)^{m+1} = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} a^{m-i+1} b^i + \sum_{i=1}^{m+1} \binom{m}{i-1} a^{m-i+1} b^i$$

Ottamalla erikseen ensimmäisen summan ensimmäinen termi ja jälkimmäisen summan viimeinen termi saadaan molempien summien summausindeksille rajoitus $1 \le i \le m$, jolloin summat voidaan yhdistää:

$$(a+b)^{m+1} = a^{m+1} + \sum_{i=1}^{m} \left[\binom{m}{i} + \binom{m}{i-1} \right] a^{m-i+1} b^i + b^{m+1}$$

Soveltamalla Pascalin kolmion yhteydessä esiintynyttä kaavaa (P) saadaan edelleen

$$(a+b)^{m+1} = a^{m+1} + \sum_{i=1}^{m} \binom{m+1}{i} a^{m+1-i} b^i + b^{m+1}.$$

Lopuksi liitetään summaan ensimmäinen ja viimeinen termi

$$(a+b)^{m+1} = \sum_{i=0}^{m+1} \binom{m+1}{i} a^{m+1-i} b^i$$

ja havaitaan että on saatu kaava $(*)$ arvolla $n = m+1$.

Kohdista 1° ja 2° seuraa induktioperiaatteen nojalla, että $(*)$ pätee kaikilla $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Esimerkki 2.3. Mikä on termin x^3y^2 kerroin lausekkeessa $(2x+y)^5 + (x+y)^6$, kun samanmuotoiset termit on ensin yhdistetty.

Ratkaisu. Lausekkeessa $(x+y)^6 = \sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} x^{6-k} y^k$ ei esiinny termiä x^3y^2. Lausekkeessa $(2x+y)^5 = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} (2x)^{5-k} y^k$ se esiintyy täsmälleen valinnalla $k = 2$ muodossa

$$\binom{5}{2} (2x)^{5-2} y^2 = \frac{5!}{3!\,2!} 2^3 x^3 y^2 = 80x^3y^2$$

Näin ollen termin x^3y^2 kerroin annetussa lausekkeessa on $\underline{\underline{80}}$.

Rationaaliluvut ja irrationaaliluvut. Rationaaliluvut määriteltiin yllä kahden kokonaisluvun osamääriksi:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \right\}.$$

Myöhemmin esiteltävän sarjateorian avulla voi helposti osoittaa, että ne voidaan karakterisoida myös desimaalikehitelmänsä avulla sellaisina reaalilukuina, joiden desimaalikehitelmä on joko päättyvä tai päättymätön ja jaksollinen. Näin ollen voisi odottaa, että "valtaosa" reaaliluvuista on *irrationaalisia* eli joukon $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ alkioita (desimaalikehitelmää muuttamalla jaksot on helppo "poistaa", joten jaksollisuus jää harvinaiseksi erikoistapaukseksi).

Konkreettisesta reaaliluvusta (esim. $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{7}$, π, $\ldots$) on usein vaikea todistaa sen irrationaalisuutta. Osoitamme melko helpon $\sqrt{2}$:n irrationaalisuuden, jonka Pythagoralaiset aistivat jo antiikin aikaan: neliön sivulla ja lävistäjällä ei ole yhteistä mittaa (pienempää janaa, jonka monikertoja molemmat ovat).

Esimerkki 2.4. Osoita, että $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Ratkaisu. Tehdään vastaoletus: "$\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$" ja kumotaan se hakemalla ristiriita. Ratkaisussa käytetään koulukurssista tuttua kokonaislukujen jakoa alkutekijöihin.

Olkoon siis $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ $(p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0)$. Voi olettaa, että $p, q \in \mathbb{N}$ (koska $\sqrt{2} > 0$). Saadaan $\sqrt{2} \cdot q = p$, josta $2q^2 = p^2$. Jaetaan vasen ja oikea puoli alkutekijöihin ja tutkitaan, montako kertaa alkuluku 2 on niissä tekijänä. Jos se on q:ssa k kertaa tekijänä se on q^2:ssa $2k$ kertaa tekijänä ja siten vasemmassa puolessa $2q^2$ se on parittoman monta $(2k+1)$ kertaa tekijänä. Samoin päätellen 2 on oikeassa puolessa p^2 parillisen monta kertaa tekijänä. Kokonaislukujen alkutekijöihin jaon yksikäsitteisyys antaa tällöin ristiriidan $2q^2 \neq p^2$. Näin ollen ei voi olla $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ ja siis $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. $\square$

Reaalilukujen aksioomat. Voidaan osoittaa, että on olemassa "oleellisesti yksikäsitteinen" (selitetään luennolla) joukko $\mathbb{R}$ varustettuna *yhteenlaskulla*

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x + y$$

ja *kertolaskulla*

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x \cdot y = xy$$

sekä *järjestyksellä* $\leq$ (määritellään myös $<$ seuraavasti: $x < y \ \Leftrightarrow\ (x \leq y$ ja $x \neq y)$) niin, että seuraavat aksioomat ovat voimassa:

(1) $x + (y + z) = (x + y) + z \ \forall x, y, z \in \mathbb{R}$,

(2) $\exists\, 0 \in \mathbb{R}$ siten, että $x + 0 = x \ \forall x \in \mathbb{R}$,

(3) $\forall\, x \in \mathbb{R}\ \exists - x \in \mathbb{R}$ siten, että $x + (-x) = 0$ (merkitään $x + (-x) = x - x$),

(4) $x + y = y + x \ \forall x, y \in \mathbb{R}$,

(5) $x(y + z) = xy + xz \ \forall x, y, z \in \mathbb{R}$,

(6) $x(yz) = (xy)z \ \forall x, y, z \in \mathbb{R}$,

(7) $\exists\, 1 \in \mathbb{R}$ siten, että $1 \neq 0$ ja $1 \cdot x = x \ \forall x \in \mathbb{R}$,

(8) $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ \exists\, x^{-1} \in \mathbb{R}$ siten, että $x \cdot x^{-1} = 1$,
(merkitään $x^{-1} = \frac{1}{x}$; jakolasku: $\frac{y}{x} = y \cdot \frac{1}{x}$, kun $x \neq 0$),

(9) $xy = yx \ \forall x, y \in \mathbb{R}$,

(10) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ tasan yksi ehdoista $x < y$, $x = y$, $y < x$ on voimassa,
($y < x$ merkitään myös $x > y$),

(11) $x \leq y$ ja $y \leq z \ \Rightarrow\ x \leq z \ \forall x, y, z \in \mathbb{R}$,

(12) $x \leq y \ \Rightarrow\ x + z \leq y + z \ \forall x, y, z \in \mathbb{R}$,

(13) $0 < x$ ja $0 < y \ \Rightarrow\ 0 < xy \ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Välihuomautuksia.

I) Voi osoittaa, että 0 ja 1 ovat yksikäsitteiset ja että $-x = (-1) \cdot x$ ja x^{-1} ovat yksikäsitteiset.

II) Aksioomat (1)-(13) toteuttaa $\mathbb{R}$:n lisäksi esimerkiksi rationaalilukujen joukko $\mathbb{Q}$ varustettuna tavallisella yhteenlaskullaan, kertolaskullaan ja järjestyksellään.

III) Koulukursseissa opittu aritmetiikka ja epäyhtälöiden käsittelysäännöt seuraavat näistä aksiomista. Oletamme tällaiset perusasiat tunnetuiksi.

IV) Seuraava ns. täydellisyysaksiooma mahdollistaa $\mathbb{R}$:n samaistamisen lukusuoran kanssa ilman "aukkokohtia", joita esim. rationaaliseen lukusuoraan jäisi ($\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ olisi eräs puuttuva piste). Selitämme aksioomaa (14) heti sen jälkeen.

(14) (**Täydellisyysaksiooma**) Ylhäältä rajoitetulla epätyhjällä $\mathbb{R}$:n osajoukolla A on *pienin yläraja*, A:n *supremum*, $\sup A$.

Määritelmä 2.5.
i) Joukko $A \subset \mathbb{R}$ on *ylhäältä rajoitettu*, jos on olemassa $M \in \mathbb{R}$ niin, että $x \leq M$ kaikilla $x \in A$. Jokainen tällainen luku M on A:n *yläraja*.

ii) Vastaavasti määritellään *alhaalta rajoitettu* joukko $A \subset \mathbb{R}$ ja sen *alaraja* m ehdolla $x \geq m$ kaikilla $x \in A$.

iii) Jos A:ssa on suurin luku M, sitä merkitään $M = \max A$.

iv) Jos A:ssa on pienin luku m, sitä merkitään $m = \min A$.

Täydellisyysaksiooma lausuu, että epätyhjän ylhäältä rajoitetun joukon $A \subset \mathbb{R}$ ylärajojen joukossa

$$\mathcal{M} = \{M \in \mathbb{R} \mid M \text{ on } A\text{:n yläraja}\}$$

on pienin luku:

$$\exists \min \mathcal{M} = \sup A.$$

Tästä seuraa helposti (sivuutan todistuksen) vastaava väite alarajoille:

Lause 2.6. *Alhaalta rajoitetun epätyhjän joukon $A \subset \mathbb{R}$ alarajojen joukossa on suurin luku, A:n suurin alaraja, $\inf A$ (A:n infimum).*

Lause 2.7. *Olkoon $A \subset \mathbb{R}$. Tällöin*

(1) $\exists M = \max A \;\Leftrightarrow\; \exists \sup A$ *ja* $\sup A \in A$. *Tällöin* $M = \sup A$.

(2) $\exists m = \min A \;\Leftrightarrow\; \exists \inf A$ *ja* $\inf A \in A$. *Tällöin* $m = \inf A$.

Todistus. Todistetaan malliksi implikaatio " $\Rightarrow$ " ehdossa (1). Olkoon siis olemassa $M = \max A$. Tällöin $M \in A$ on A:n yläraja, joten A on ylhäältä rajoitettu ja epätyhjä ja on siis olemassa $G = \sup A$. Lisäksi pätee $G \leq M$, sillä G on pienin yläraja ja M on eräs yläraja. Jos olisi $G < M$, ei G olisikaan A:n yläraja, sillä $M \in A$. Siis $G = M$. $\square$

Esimerkki 2.8.
i) $A =]0,1[$; tällöin $\nexists \max A$, $\nexists \min A$, $\sup A = 1$, $\inf A = 0$.
ii) $A = [0,1]$; tällöin $\max A = 1 = \sup A$, $\min A = 0 = \inf A$.
iii) Oletetaan $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\} = \mathbb{Q} \cap \left]-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right[$.

Pätee: $\sup A = \sqrt{2}$, $\inf A = -\sqrt{2}$ ja A:lla ei ole supremumia eikä infimumia joukossa $\mathbb{Q}$. Todistus perustuu siihen, että on olemassa mielivaltaisen lähellä $\pm\sqrt{2}$:ta olevia A:n lukuja (näitä saadaan esimerkiksi katkaisemalla $\sqrt{2}$:n desimaalikehitelmää) ja siihen, että $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (esimerkki 2.4). Sivuutamme yksityiskohtaisen tarkastelun.

Tämä esimerkki näyttää samalla sen, että $\mathbb{Q}$ ei toteuta täydellisyysaksioomaa 14.

Miten sitten osoitetaan, että $G = \sup A$? Jos A:ssa ei ole suurinta alkiota, joudutaan usein käyttämään seuraavaa lausetta

Lause 2.9. *(*sup*:n ϵ-kriteeri)*
Olkoon A ylhäältä rajoitettu ja epätyhjä. Luku $G \in \mathbb{R}$ on A:n supremum, jos ja vain jos se toteuttaa alla olevat ehdot (1) *ja* (2)*:*

(1) *G on A:n yläraja,*

(2) $\forall \epsilon > 0\ \exists x_\epsilon \in A \cap]G - \epsilon, G]$.

Todistus. Selvä, sillä (2) lausuu sen, että mikään $G - \epsilon$ ($\epsilon > 0$) ei enää ole A:n yläraja (eli yläraja G on tosiaan *pienin* yläraja). $\square$

Lause 2.10. *(*inf*:n ϵ-kriteeri)*
Olkoon A alhaalta rajoitettu ja epätyhjä. Luku $g \in \mathbb{R}$ on A:n infimum, jos ja vain jos se toteuttaa alla olevat ehdot (1) *ja* (2)*:*

(1) *g on A:n alaraja,*

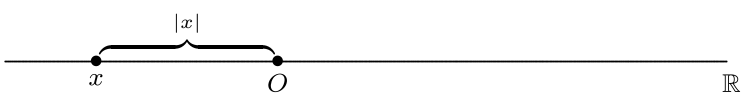
(2) $\forall \epsilon > 0\ \exists x_\epsilon \in A \cap [g, g + \epsilon[$.

Esimerkki 2.11. Olkoon $A = \{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Tällöin $0 = \min A = \inf A$, sillä $1 - \frac{1}{1} = 0 \in A$ ja $1 - \frac{1}{n} \geq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$. Sen sijaan $\nexists \max A$, koska $1 = \sup A \notin A$. Osoitetaan väite $1 = \sup A$ sup:n ϵ-kriteerillä:
(1) $1 > 1 - \frac{1}{n}\ \forall n \in \mathbb{N}$, joten 1 on A:n yläraja.
(2) Olkoon $\epsilon > 0$. Tällöin $1 - \frac{1}{n} > 1 - \epsilon \iff \epsilon > \frac{1}{n} \iff n > \frac{1}{\epsilon}$. Valitaan $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ niin, että $n_\epsilon > \frac{1}{\epsilon}$ ja merkitään $x_\epsilon = 1 - \frac{1}{n_\epsilon} \in A$. Tällöin $x_\epsilon \in A \cap]1 - \epsilon, 1]$. Siis $1 = \sup A$ sup:n ϵ-kriteerin nojalla.

Itseisarvo. Palautetaan mieliin reaaliluvun x itseisarvo $|x|$:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{jos } x \geq 0 \\ -x, & \text{jos } x < 0, \end{cases}$$

x:n etäisyys origosta *lukusuoralla* $\mathbb{R}$



Esimerkki. Ratkaise epäyhtälö $|x+3| < 1$.

Tapa 1.

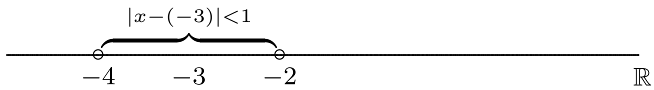
$$|x+3| = \begin{cases} x+3, & x \geq -3 \\ -x-3, & x < -3 \end{cases}$$

a) $x \geq -3$: $\quad x+3 < 1 \;\Leftrightarrow\; x < -2$; $\qquad \underline{-3 \leq x < -2}$,

b) $x < -3$: $\quad -x-3 < 1 \;\Leftrightarrow\; x > -4$; $\qquad \underline{-4 < x < -3}$.

Vastaus: $\underline{\underline{-4 < x < -2}}$.

Tapa 2. Koska $|x+3| = |x-(-3)|$ on pisteen x etäisyys -3:sta lukusuoralla, saadaan



sama ratkaisuväli $-4 < x < -2$ kuin yllä.

Lause 2.12. *(***Itseisarvon ominaisuuksia***)*

(1) $|xy| = |x||y| \;\forall x, y \in \mathbb{R}$.

(2) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|} \;\forall x \in \mathbb{R},\; y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(3) $|x| \geq 0 \;\forall x \in \mathbb{R}$ *ja* $|x| = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$.

(4) *Olkoon* $a > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$. *Tällöin*

$|x| \leq a \;\Leftrightarrow\; -a \leq x \leq a$,
$|x| < a \;\Leftrightarrow\; -a < x < a$,
$|x - x_0| \leq a \;\Leftrightarrow\; x_0 - a \leq x \leq x_0 + a$,
$|x - x_0| < a \;\Leftrightarrow\; x_0 - a < x < x_0 + a$.

(5) $|x+y| \leq |x| + |y| \;\forall x, y \in \mathbb{R}$

(6) $\big||x| - |y|\big| \leq |x-y| \;\forall x, y \in \mathbb{R}$

Epäyhtälöitä (5) ja (6) kutsutaan kolmioepäyhtälöiksi

Todistus. Väitteet (1)-(4) ovat helppoja. Todistetaan malliksi tärkeämpi kolmioepäyhtälö (5) käyttäen hyväksi ehtoa (4).

Olkoot siis $x, y \in \mathbb{R}$. Tällöin on

$$-|x| \leq x \leq |x| \text{ ja } -|y| \leq y \leq |y| \;\Rightarrow\; -(|x|+|y|) \leq x+y \leq |x|+|y|,$$

josta ehdon (4) nojalla saadaan kolmioepäyhtälö $|x+y| \leq |x| + |y|$. $\square$

Esimerkki 2.13. Kolmioepäyhtälöstä (5) seuraa, että

(i) $$|x-y| = |x+(-y)| \leq |x| + |-y| = |x| + |y|.$$

Mutkikkaampi seuraus on esimerkiksi arvio

(ii) $$|x-z| = |(x-y)+(y-z)| \leq |x-y| + |y-z|.$$

$\mathbb{R}$:n metriikka; $\mathbb{Q}$:n ja $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$:n tiheys $\mathbb{R}$:ssä.

Määritelmä 2.14. Lukujen $x \in \mathbb{R}$ ja $y \in \mathbb{R}$ välinen *etäisyys* $d(x, y) = |x - y|$.

Lause 2.15.
(i) $d(x, y) \geq 0 \ \forall x, y \in \mathbb{R}$ *ja* $d(x, y) = 0 \ \Leftrightarrow \ x = y$.
(ii) $d(x, y) = d(y, x) \ \forall x, y \in \mathbb{R}$.
(iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Todistus. Helppo; ehto (iii) johdettiin yllä 2.13 (ii):ssa. □

Määritelmä 2.16. Pisteen $x_0 \in \mathbb{R}$ *ϵ-ympäristö* ($\epsilon > 0$) on avoin väli

$$]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[\ \ (\overset{\text{merk.}}{=} U_\epsilon(x_0) = U(\epsilon, x_0) = B_\epsilon(x_0) \ \ldots)$$

ja pisteen $x_0 \in \mathbb{R}$ *punkteerattu ϵ-ympäristö* on joukko

$$]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[\setminus \{x_0\} \ (\overset{\text{merk.}}{=} U'_\epsilon(x_0) = B'_\epsilon(x_0) = \mathring{U}(\epsilon, x_0) \ \ldots).$$

Pisteen x_0 *oikean - ja vasemmanpuoleiset ϵ-ympäristöt* ovat puoliavoimet välit

$$[x_0, x_0 + \epsilon[\ \ (\overset{\text{merk.}}{=} U^+_\epsilon(x_0) = U_+(\epsilon, x_0) \ \ldots)$$

$$]x_0 - \epsilon, x_0] \ \ (\overset{\text{merk.}}{=} U^-_\epsilon(x_0) = U_-(\epsilon, x_0) \ \ldots).$$

Määritelmistä 2.14 ja 2.16 sekä lauseesta 2.15 seuraa heti:

Korollaario 2.17.
(a) $x \in U_\epsilon(x_0) \ \Leftrightarrow \ d(x, x_0) < \epsilon \ \Leftrightarrow \ |x - x_0| < \epsilon$.
(b) $x \in U'_\epsilon(x_0) \ \Leftrightarrow \ 0 < d(x, x_0) < \epsilon \ \Leftrightarrow \ 0 < |x - x_0| < \epsilon$.

Lause 2.18.
Olkoon $x_0 \in \mathbb{R}$ ja $\epsilon > 0$. Tällöin on $\mathbb{Q} \cap U_\epsilon(x_0) \neq \emptyset$ ja $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap U_\epsilon(x_0) \neq \emptyset$. (Siis jokainen $\mathbb{R}$:n väli sisältää sekä rationaalilukuja että irrationaalilukuja eli $\mathbb{Q}$ ja $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ovat tiheät joukossa $\mathbb{R}$).

Todistus. Tuloksen voi todistaa lukujen $\frac{1}{n} \in \mathbb{Q}$ ja $\frac{\sqrt{2}}{n} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ($n \in \mathbb{N}$) monikertoja $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ ja $\frac{m\sqrt{2}}{n} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ($m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$) tarkastelemalla. Koska nämä sijaitsevat $\frac{1}{n}$:n ja $\frac{\sqrt{2}}{n}$:n välein, niitä löytyy 2ϵ:n pituiselta väliltä $U_\epsilon(x_0)$ kyllin suurilla n:n arvoilla. Sivuutan yksityiskohdat; harjoituksen 4 tehtävässä 2 käsitellään tapausta $x_0 = \sqrt{2}$ vaihtoehtoisella desimaalikehitelmään nojaavalla idealla. □

Reaalifunktion raja-arvo. Olkoon $f : A \to \mathbb{R}$ funktio, jonka lähtöjoukko $A \subset \mathbb{R}$ sisältää pisteen $x_0 \in \mathbb{R}$ kyllin pienet punkteeratut ympäristöt ts. on olemassa $h > 0$ niin, että $U_h'(x_0) =]x_0 - h, x_0 + h[\setminus \{x_0\} \subset A$. Sanomme, että f:llä on x_0:ssa raja-arvo $a \in \mathbb{R}$, jos "$f(x)$ sijaitsee mielivaltaisen lähellä lukua a, kunhan x sijaitsee kyllin lähellä lukua x_0 ja $x \neq x_0$". Täsmällisemmin ilmaisten ja raja-arvomerkinnän samalla esitellen saadaan määritelmä

Määritelmä 3.1. Funktiolla f on *raja-arvo* a pisteessä $x_0 \in A$, jos kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ niin, että $|f(x) - a| < \epsilon$, kun $0 < |x - x_0| < \delta$. Tällöin merkitään $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ (painetussa tekstissä usein myös $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$). Formaalisti

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \;\Leftrightarrow\; \forall \epsilon > 0 \;\exists \delta > 0 \text{ s.e. } |f(x) - a| < \epsilon, \text{ kun } 0 < |x - x_0| < \epsilon$$

tai

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \;\Leftrightarrow\; (\forall \epsilon > 0 \;\exists \delta > 0 \text{ s.e. } 0 < |x - x_0| < \epsilon \;\Rightarrow\; |f(x) - a| < \epsilon)$$

tai

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \;\Leftrightarrow\; \forall \epsilon > 0 \;\exists \delta > 0 \text{ s.e. } f(x) \in U_\epsilon(a) \;\forall x \in U_\delta'(x_0).$$

Huomautuksia.
1) Yllä ajatellaan aina valituksi $\delta < h$, jotta $f(x)$ olisi määritelty $U_\delta'(x_0)$:ssa.
2) f:n ei tarvitse olla määritelty x_0:ssa. Jos f on määritelty x_0:ssa, arvo $f(x_0)$ ei vaikuta mitenkään raja-arvokäsitteeseen.
3) Jos raja-arvo on olemassa, se on yksikäsitteinen (todistus harjoitustehtäväksi).

Esimerkki 3.2.
i) Jos f on *vakiofunktio* a $U_h'(x_0)$:ssa, ts. $f(x) = a \;\forall x \in U_h'(x_0)$ niin

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a.$$

Perustelu: Jos $\epsilon > 0$, niin $0 < |x - x_0| < \delta = \epsilon \;\Rightarrow\; |f(x) - a| = |a - a| = 0 < \epsilon$. (Itse asiassa mikä tahansa $\delta > 0$ käy; muista kuitenkin yllä olevan huomautuksen kohta 1).
ii) Jos $f(x) = x \;\forall x \in U_h'(x_0)$, niin

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = x_0.$$

Perustelu: Jos $\epsilon > 0$, niin $0 < |x - x_0| < \delta = \epsilon \;\Rightarrow\; |f(x) - x_0| = |x - x_0| = 0 < \epsilon$.

Jo esimerkissä 3.2 mainitut yksinkertaiset raja-arvotulokset antavat mahdollisuuden mekaanisempaan raja-arvolaskentaan yhdessä seuraavan peruslauseen kanssa.

Lause 3.3. *Olkoot f ja g $U_h'(x_0)$:ssa määriteltyjä reaaliarvoisia funktioita ja olkoon* $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = b$ $(a, b \in \mathbb{R})$. *Tällöin*

(i) $$\lim_{x\to x_0} \big(f(x) + g(x)\big) = a + b,$$

(ii) $$\lim_{x\to x_0} \big(f(x) - g(x)\big) = a - b,$$

(iii) $$\lim_{x\to x_0} \big(f(x)g(x)\big) = ab \quad \textit{ja}$$

(iv) $$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}, \ \textit{kunhan } b \neq 0,$$

Todistus. Malliksi (i). Olkoon $\epsilon > 0$. Koska $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$, niin on olemassa $\delta_1 > 0$ siten, että

$$0 < |x - x_0| < \delta_1 \ \Rightarrow\ |f(x) - a| < \frac{\epsilon}{2}$$

ja samoin koska $\lim_{x\to x_0} g(x) = b$, niin on olemassa $\delta_2 > 0$ siten, että

$$0 < |x - x_0| < \delta_2 \ \Rightarrow\ |g(x) - a| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Näin ollen

$$0 < |x - x_0| < \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} \ \Rightarrow\ |f(x) - a| < \frac{\epsilon}{2} \text{ ja } |g(x) - b| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Kun $0 < |x - x_0| < \delta$, niin kolmioepäyhtälön nojalla saadaan arvio

$$\begin{aligned} |(f(x) + g(x)) - (a + b)| &= |(f(x) - a) + (g(x) - b)| \\ &\leq |(f(x) - a)| + |(g(x) - b)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Väite (i) on nyt todistettu, koska $\epsilon > 0$ oli mielivaltainen. □

Funktio $P : A \to \mathbb{R}$ ($A \subset \mathbb{R}$; yleensä $A = \mathbb{R}$) on *polynomi*, jos on olemassa *kertoimet* $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ s.e.

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \ \forall x \in A.$$

Jos tässä lisäksi $a_n \neq 0$, polynomin *aste* $\deg(f) = n$.

Funktio $f : A \to \mathbb{R}$ ($A \subset \mathbb{R}$) on *rationaalifunktio*, jos on olemassa P ja Q s.e. $Q(x) \neq 0$ $\forall x \in A$ ja $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ $\forall x \in A$.

Seuraava lause osoittaa, että rationaalifunktioilla raja-arvo on arvo ts. ne ovat *jatkuvia* laajimmassa mahdollisessa määrittelyjoukossaan, jossa $\mathbb{R}$:stä on poistettu nimittäjäpolynomin Q kaikki nollakohdat (niitä on enintään $\deg(Q)$ kappaletta).

Lause 3.4. *Olkoon* $f : A \to \mathbb{R}$ $(A \subset \mathbb{R})$ *rationaalifunktio,* $x_0 \in A$ *ja* $U_h(x_0) \subset A$ $(h > 0)$. *Tällöin on* $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Todistus. Oletuksen nojalla on olemassa polynomit $P, Q : A \to \mathbb{R}$ s.e. $Q(x) \neq 0$ $\forall x \in A$ ja $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ $\forall x \in A$. Osamäärän raja-arvosäännön 3.3 (iv) nojalla on

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \frac{\lim_{x \to x_0} P(x)}{\lim_{x \to x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)},$$

sillä vakion raja-arvo 3.2 i), funktion $f(x) = x$ raja-arvo 3.2 ii) sekä summan ja tulon raja-arvosäännöt 3.3 (i) ja (iii) toistuvasti sovellettuina osoittavat, että yleisesti polynomin raja-arvo on sen arvo. Jätämme yksityiskohdat lukijoille. □

Esimerkki. Olkoon $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$. Laske $\lim_{x \to x_0} f(x)$, kun a) $x_0 = 0$, b) $x_0 = 1$.

Ratkaisu. a) $f : \mathbb{R} \backslash \{-1, 1\} \to \mathbb{R}$ on rationaalifunktio, sillä $f = \dfrac{P}{Q}$, $P(x) = x^2 + x - 2$, $Q(x) = x^2 - 1$ ja $Q(x) = 0 \iff x = 1$ tai $x = -1$. Koska $0 \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ saadaan suoraan lauseen 3.4 nojalla, että

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = \frac{0^2 + 0 - 2}{0^2 - 1} = \underline{\underline{2}}$$

b) Koska $Q(1) = 0$, lausetta 3.4 ei voi käyttää (f ei ole edes määritelty pisteessä 1). Tässä tapauksessa kuitenkin myös $P(1) = 0$ ja paljastuu, että f:n esitys $f = \dfrac{P}{Q}$ ei ole loppuun supistettu:

$$P(x) = x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2) \text{ ja } Q(x) = x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1),$$

joten

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x + 2}{x + 1} \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

Siten lause 3.4 sovellettuna supistettuun lausekkeeseen $g(x) = \dfrac{x + 2}{x + 1}$ antaa

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} g(x) = g(1) = \frac{1 + 2}{1 + 1} = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}.$$

Toispuoliset raja-arvot.

Määritelmä 3.5. Olkoon reaalifunktio f määritelty välillä $]x_0, x_0+h[$, missä $h > 0$. Tällöin f:llä on pisteessä x_0 *oikeanpuoleinen raja-arvo* $a \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to x_0+} f(x)$ jos kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ niin, että $x_0 < x < x_0 + \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - a| < \epsilon$. Formaalisti

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) \;\Leftrightarrow\; \forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0 \text{ s.e. } |f(x) - a| < \epsilon\ \forall x \in\,]x_0, x_0+\delta[\,.$$

Vastaavasti määritellään *vasemmanpuoleinen raja-arvo* a pisteessä x_0 ehdolla

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) \;\Leftrightarrow\; \forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0 \text{ s.e. } |f(x) - a| < \epsilon\ \forall x \in\,]x_0-\delta, x_0[\,.$$

Havaintojen 3.2–3.4 vastineet pätevät samanlaisin todistuksin myös oikeanpuolisille ja vasemmanpuolisille raja-arvoille. Helposti todistetaan myös seuraava tulos:

Lause 3.6. *Jos on olemassa* $\lim_{x\to x_0} f(x)$, *niin on olemassa* $\lim_{x\to x_0-} f(x)$ *ja* $\lim_{x\to x_0+} f(x)$ *ja*

$$(*)\qquad \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0-} f(x) = \lim_{x\to x_0+} f(x)$$

Kääntäen: Jos on olemassa $\lim_{x\to x_0-} f(x)$ *ja* $\lim_{x\to x_0+} f(x)$ *ja* $\lim_{x\to x_0-} f(x) = \lim_{x\to x_0+} f(x)$, *niin on olemassa* $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *ja* $(*)$ *pätee.*

Esimerkki 3.7.
i) $\lim_{x\to 0} |x| = 0$, sillä

$$x > 0 \;\Rightarrow\; |x| = x \to 0, \text{ kun } x \to 0; \text{ siis } \lim_{x\to 0+} |x| = 0 \quad \text{ja}$$
$$x < 0 \;\Rightarrow\; |x| = -x \to 0, \text{ kun } x \to 0; \text{ siis } \lim_{x\to 0-} |x| = 0$$

ii) $\lim_{x\to 0+} \sqrt{x} = 0 = \sqrt{0}$, sillä kaikilla $\epsilon > 0$ pätee:

$$|\sqrt{x} - 0| = \sqrt{x} < \epsilon\ \forall x \in \left]0, \epsilon^2\right[$$

(määritelmässä kaivatuksi ϵ:ia vastaavaksi δ:ksi voi siis valita $\delta = \epsilon^2$).
iii) Olkoon $x_0 > 0$. Tällöinkin (vrt. kohta ii)) on $\lim_{x\to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$. Jos näet $\epsilon > 0$, niin

$$|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \frac{|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}|(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} < \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}} < \epsilon$$

kun $|x - x_0| < \delta = \min\{x_0, \epsilon\sqrt{x_0}\}$.

Huomautus. Myöhemmässä terminologiassa kohdat 3.7 ii) ja iii) merkitsevät, että funktio $f(x) = \sqrt{x}$ on jatkuva koko määrittelyjoukossaan $[0, \infty[$.

Lause 3.8. *(Yhdistettyjen funktioiden raja-arvot)*

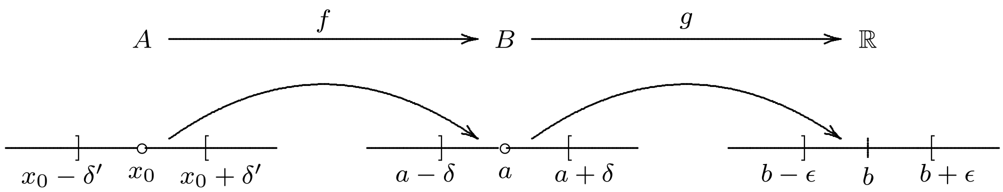
Olkoot $g : B \to \mathbb{R}$ *ja* $f : A \to B$ $(A, B \subset \mathbb{R})$ *kuvauksia,* $x_0 \in \mathbb{R}$, $U_h'(x_0) \subset A$ $(h > 0)$, $a \in \mathbb{R}$, $U_k'(a) \subset B$ $(k > 0)$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{y\to a} g(y) = b$. *Jos* $f(x) \neq a$ $\forall x \in U_h'(x_0)$, *niin yhdistetty funktio* $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ *toteuttaa ehdon*

$$\lim_{x\to x_0} (g \circ f)(x) = \lim_{x\to x_0} g(f(x)) = b.$$

Todistus. Olkoon $\epsilon > 0$. Koska $\lim\limits_{y\to a} g(x) = b$, löytyy $\delta > 0$ s.e. $0 < |y - a| < \delta \Rightarrow |g(y) - b| < \epsilon$. Koska $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, löytyy edelleen $\delta' > 0$ s.e. $0 < |x - x_0| < \delta' \Rightarrow |f(x) - a| < \delta$. Oletuksesta $f(x) \neq a$ $\forall x \in U_h'(x_0)$ ja δ:n valinnasta seuraa nyt, että

$$0 < |x - x_0| < \delta' \;\Rightarrow\; 0 < |f(x) - a| < \delta \;\Rightarrow\; |g(f(x)) - b| < \epsilon,$$

joten δ' käy raja-arvon määrittelyssä haetuksi ϵ:ia vastaavaksi positiiviluvuksi ja väite on todistettu. Lopuksi vielä kuva päättelyn juonesta:



Huomautus 3.9. (i) Koska ehto $\lim\limits_{y\to a} g(y) = b$ ei takaa mitään mahdollisesta arvosta $g(a)$ (jos $a \in B$), on selvää, että yllä tarvitaan rajoitus $f(x) \neq a$ "lähellä x_0:aa"

(ii) Jos g on määritelty myös a:ssa (ts. $a \in B$) ja jos $\lim\limits_{y\to a} g(y) = b = g(a)$, väite $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x)) = b$ pätee yllä myös ilman oletusta $f(x) \neq a$ "lähellä pistettä x_0". Todistuksessa mahdollisuus $f(x) = a$ ei tuo ongelmia, sillä silloin $g(f(x)) = g(a) = b$.

Esimerkki. i) $\lim\limits_{x\to 3} \sqrt{x^2+3} = \sqrt{3^2+3} = \sqrt{12}$ lauseen 3.8, huomautuksen 3.9 ii) ja esimerkin 3.7 iii) nojalla.

ii) Myös esimerkiksi yleisesti käytetyssä "neliöjuurilavennuksessa" käytetään samoja tietoja päättelyn pohjana. Esimerkkinä tästä laskemme raja-arvon $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{1-\sqrt{x-3}}{x^2-16}$. Nyt

$$\frac{1-\sqrt{x-3}}{x^2-16} = \frac{(1-\sqrt{x-3})(1+\sqrt{x-3})}{(x^2-16)(1+\sqrt{x-3})} = \frac{1^2-(\sqrt{x-3})^2}{(x^2-16)(1+\sqrt{x-3})} =$$

$$= \frac{4-x}{(x-4)(x+4)(1+\sqrt{x-3})} = -\frac{1}{(x+4)(1+\sqrt{x-3})} \underset{x\to 4}{\longrightarrow} -\frac{1}{8\cdot 2} = \underline{\underline{-\frac{1}{16}}}.$$

Esimerkissä 3.7 ii) ja iii) todettu funktion $f(x) = \sqrt{x}$ jatkuvuus pätee myös funktiolle $f(x) = \sqrt[n]{x}$. Esitämme tuloksen jo tässä, vaikka todistukseen tarvittaisiin myöhempää tulosta käänteisfunktion jatkuvuudesta.

Lause 3.10. (i) *Jos $n \in \mathbb{N}$ on parillinen niin*

$$\lim_{x \to x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0} \quad \forall x_0 \in [0, \infty[$$

(*pisteessä $x_0 = 0$ raja-arvo on tietysti oikeanpuoleinen*).
(i) Jos $n \in \mathbb{N}$ on pariton niin

$$\lim_{x \to x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0} \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}.$$

Todistus. Seuraus myöhemmästä käänteisfunktion jatkuvuustuloksesta. □

Yhdessä yhdistettyjen funktioiden raja-arvotulosten 3.8 ja 3.9 ii) kanssa sovellettuna lause 3.10 mahdollistaa monia raja-arvolaskuja.

Esimerkki 3.11. Laske $\lim_{x \to -1} \dfrac{\sqrt[3]{x} + 1}{x + 1}$

Ratkaisu.

$$\frac{\sqrt[3]{x} + 1}{x + 1} = \frac{\sqrt[3]{x} + 1}{(\sqrt[3]{x} + 1)(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1)} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1} \underset{x \to -1}{\longrightarrow} \frac{1}{1 + 1 + 1} = \frac{1}{\underline{\underline{3}}}.$$

Laajennetut reaaliluvut $\overline{\mathbb{R}}$ ja niihin liittyvät erityiset raja-arvokäsitteet.

Määritelmä 3.12. $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\}$ $(-\infty \neq \infty)$ seuraavin sopimuksin ("sallitut muodot"):

$$\begin{aligned}
&\infty > x \quad \forall x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{\infty\}, \qquad -\infty < x \quad \forall x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{-\infty\}, \\
&x + \infty = \infty + x = \infty + \infty = \infty \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\
&x + (-\infty) = x - \infty = (-\infty) + x = (-\infty) + (-\infty) = -\infty - \infty = -\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\
&a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty \quad \forall a > 0, \qquad a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = -\infty \quad \forall a > 0, \\
&a \cdot \infty = \infty \cdot a = -\infty \quad \forall a < 0, \qquad a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = \infty \quad \forall a < 0, \\
&\frac{\infty}{a} = \frac{1}{a} \cdot \infty \quad \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \qquad \frac{-\infty}{a} = \frac{1}{a} \cdot (-\infty) \quad \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\
&\infty^n = \sqrt[n]{\infty} = \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}, \\
&(-\infty)^n = (-1)^n \infty^n = (-1)^n \infty, \quad \sqrt[n]{-\infty} = -\infty \quad (n \text{ pariton}), \\
&\frac{a}{\infty} = \frac{a}{-\infty} = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}, \\
&\infty \cdot \infty = (-\infty)(-\infty) = \infty, \quad \infty \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot \infty = -\infty.
\end{aligned}$$

Raja-arvokäsitteissä ∞ ja $-\infty$ voivat olla joko lähestyttävän pisteen $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ roolissa tai raja-arvon roolissa tai molemmissa. Annamme perusmääritelmiä:

Määritelmä 3.13.

(i) $$\lim_{x\to\infty} f(x) = a \ (a \in \mathbb{R}) \iff$$
$$(\forall \epsilon > 0 \ \exists M > 0 \text{ s.e. } x > M \ \Rightarrow \ |f(x) - a| < \epsilon)$$

(ii) $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = a \ (a \in \mathbb{R}) \iff$$
$$(\forall \epsilon > 0 \ \exists m < 0 \text{ s.e. } x < m \ \Rightarrow \ |f(x) - a| < \epsilon)$$

(iii) $$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty \ (x_0 \in \mathbb{R}) \iff$$
$$(\forall M > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ s.e. } 0 < |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow \ f(x) > M)$$

(iv) $$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \ (x_0 \in \mathbb{R}) \iff$$
$$(\forall m < 0 \ \exists \delta > 0 \text{ s.e. } 0 < |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow \ f(x) < m)$$

(v) $$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \iff$$
$$(\forall M > 0 \ \exists a_M > 0 \text{ s.e. } x > a_M \ \Rightarrow \ f(x) > M)$$

(vi) $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty \iff$$
$$(\forall M > 0 \ \exists b_M < 0 \text{ s.e. } x < b_M \ \Rightarrow \ f(x) > M)$$

Loput käsitteet $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to x_0+} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to x_0+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to x_0-} f(x) = \infty$ ja $\lim_{x\to x_0-} f(x) = -\infty$ jätämme lukijan itsensä muotoiltaviksi yo. mallin avulla.

Voidaan osoittaa, että raja-arvojen laskulausekkeet 3.3, 3.8 ja 3.10 pätevät myös $\overline{\mathbb{R}}$:ssa, kunhan lasketaan määritelmän 3.12 "sallituilla muodoilla". "Kiellettyjä muotoja" ovat esimerkiksi $\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$ ja $0 \cdot \infty$, joita vastaavissa raja-arvolaskuissa tulos voi olla mitä tahansa (tai raja-arvoa ei tarvitse edes olla olemassa).

Esimerkki 3.14. Laske $\lim_{x\to\infty} \frac{ax^n + 1}{bx^n + 2}$, $(n \in \mathbb{N})$, $(a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$.

Ratkaisu. Suora sijoitus antaa osoittajaksi

$$a \cdot \infty^n + 1 = a \cdot \infty + 1 = \begin{cases} \infty, & a > 0 \\ -\infty, & a < 0 \end{cases}$$

ja nimittäjäksi

$$b \cdot \infty^n + 2 = b \cdot \infty + 2 = \begin{cases} \infty, & b > 0 \\ -\infty, & b < 0 \end{cases}$$

ja osamääräksi kielletyn muodon $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{-\infty}{\infty}$, $\frac{\infty}{-\infty}$ tai $\frac{-\infty}{-\infty}$. On siis laskettava toisin:

$$\frac{ax^n + 1}{bx^n + 2} = \frac{a + \frac{1}{x^n}}{b + \frac{2}{x^n}} \xrightarrow[x\to\infty]{} \frac{a + \frac{1}{\infty}}{b + \frac{2}{\infty}} = \frac{a + 0}{b + 0} = \underline{\underline{\frac{a}{b}}},$$

ts. muoto $\frac{\infty}{\infty}$ (vast. $\frac{-\infty}{\infty}$, $\frac{\infty}{-\infty}$ tai $\frac{-\infty}{-\infty}$) voi tuottaa raja-arvoksi minkä tahansa luvun $\frac{a}{b} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Tietysti raja-arvoksi voisi tulla myös 0 tai ∞ tai $-\infty$, esim.

$$\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{x+\frac{1}{x}} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\infty+0} = \frac{1}{\infty} = 0,$$

$$\frac{x^2+1}{x} = x + \frac{1}{x} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} \infty + 0 = \infty,$$

$$-\frac{x^2+1}{x} = -x - \frac{1}{x} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} -\infty + 0 = -\infty.$$

Raja-arvoa ei myöskään tarvitse olla olemassa: Jos

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{x^2+2}, & \forall x \in \mathbb{Q}, \\ \dfrac{2x^2+1}{x^2+2}, & \forall x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}, \end{cases}$$

niin helposti nähdään, että

$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ x\in\mathbb{Q}}} f(x) = 1 \text{ ja } \lim_{\substack{x\to\infty \\ x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}} f(x) = 2$$

(tällaisten uusien raja-arvokäsitteiden ilmeisen määritelmän jälkeen), mutta

$$\nexists \lim_{x\to\infty} f(x) \ (= \lim_{\substack{x\to\infty \\ x\in\mathbb{R}}} f(x))$$

ja tämä raja-arvo on kiellettyä muotoa $\frac{\infty}{\infty}$.

Esimerkki.

(i) $$\lim_{x\to\infty}(x^4 - x^3) = \lim_{x\to\infty} x^3(x-1) = \infty^3(\infty-1) = \infty^4 = \underline{\underline{\infty}}$$

tai toisin laskien

$$x^4 - x^3 = x^4(1-\frac{1}{x}) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} \infty^4(1-\frac{1}{\infty}) = \infty^4 = \underline{\underline{\infty}}$$

(ii) $$\lim_{x\to-\infty}(x^2 - x^3) = (-\infty)^2 - (-\infty)^3 = \infty^2 - (-\infty) = \infty + \infty = \underline{\underline{\infty}}$$

tai toisin laskien

$$x^2 - x^3 = x^2(1-x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} (-\infty)^2(1-(-\infty)) = \infty^2(1+\infty) = \infty\cdot\infty = \underline{\underline{\infty}}$$

tai vielä toisin laskien

$$x^2 - x^3 = x^3(\frac{1}{x}-1) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} (-\infty)^3(\frac{1}{-\infty}-1) = (-\infty)(-1) = \underline{\underline{\infty}}$$

Joskus vaikeasti laskettava raja-arvo löytyy käyttäen "*kuristusta*":

Lause 3.15. *Olkoon* $x_0 \in \mathbb{R}$ *ja olkoon*

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x) \ \forall x \in U'_r(x_0) \ (r > 0),$$

jos $\lim_{x \to x_0} g(x) = a = \lim_{x \to x_0} h(x)$ $(a \in \mathbb{R})$, *niin* $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$.

Todistus. Koska

$$(*) \qquad |f(x) - a| \leq \max\{|g(x) - a|, |h(x) - a|\} \ \forall x \in U'_r(x_0),$$

väite saadaan helposti raja-arvon määritelmää soveltaen: kun $\epsilon > 0$, niin $|g(x)-a| < \epsilon$ ja $|h(x) - a| < \epsilon$, kun x on riittävän lähellä x_0:aa raja-arvo oletusten ollessa voimassa. Jätämme yksityiskohtaisen päättelyn lukijalle tämän vihjeen jälkeen. $\square$

Huomautus. Ehto $(*)$ seuraa siitä, että $f(x)$ on $g(x)$:n ja $h(x)$:n välissä.

Huomautus 3.16. Lausetta 3.15 vastaava tulos pätee myös, kun $x_0 = \infty$ tai $x_0 = -\infty$ tai kun raja-arvo $a = \infty$ tai $a = -\infty$ (tai molemmat ovat $\pm\infty$).

Esimerkki 3.17. Laske $\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x}$, kun tiedetään, että $-1 \leq \sin y \leq 1$ eli $|\sin y| \leq 1 \ \forall y \in \mathbb{R}$.

Ratkaisu. Koska $|\sin \frac{1}{x}| \leq 1 \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ niin $|x \sin \frac{1}{x}| \leq |x| \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Siis

$$-|x| \leq |x \sin \frac{1}{x}| \leq |x| \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

ja koska $\lim_{x \to 0} |x| = 0 = \lim_{x \to 0}(-|x|)$ (esimerkki 3.7i), niin kuristusperiaate takaa, että myös $\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$. $\square$

Esimerkki 3.18. Funktiolla $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ ei ole raja-arvoa origossa, sillä origon jokaisessa ympäristössä $U'_\delta(0)$ f saa kaikki arvot välillä $[-1, 1]$ (esim. $f(\frac{1}{n\pi}) = \sin(n\pi) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, $f\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}\right) = \sin(\frac{\pi}{2} + 2n\pi) = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$ ja $f\left(\frac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2n\pi}\right) = \sin(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi) = -1 \ \forall n \in \mathbb{N}$). Valitsemalla $\epsilon < 1$ nähdään siis, ettei $f(x)$ voi pysyä a:n ϵ-ympäristössä millään valinnalla $a \in \mathbb{R}$. Päättelyn yksityiskohdat lukija voi itse täydentää (sinifunktion tultua jatkossa määritellyksi).

Seuraavaa lausetta on oikeastaan jo tarvittu tukemaan osamäärän raja-arvosäännön muotoilutapaa lauseessa 3.3. Sen mukaan funktio on raja-arvon merkkinen lähestyttävän pisteen pienessä ympäristössä (jos raja-arvo ei ole 0).

Lause 3.19. *Jos* $a > 0$ *ja* $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ $(x_0 \in \mathbb{R})$, *niin on olemassa* $\delta > 0$ *siten, että* $f(x) > 0$ *kaikilla* $x \in U'_\delta(x_0)$.

Todistus. Valitaan $\epsilon = a$ ja sovelletaan raja-arvon määritelmää: $\exists \delta > 0$ s.e. $|f(x) - a| < a \ \forall x \in U'_\delta(x_0)$. Tällöin $f(x) > 0 \ \forall x \in U'_\delta(x_0)$. $\square$

Huomautus 3.20. Vastaava tulos pätee tapauksissa $x_0 = \infty$ ja $x_0 = -\infty$.

Jatkuvuus.

Intuitiivisesti reaalifunktion $f : I \to \mathbb{R}$ ($I \subset \mathbb{R}$ väli) jatkuvuus tarkoittaa, että sen kuvakäyrä $y = f(x)$ on katkeamaton "jatkuva" käyrä. Tämä idea on mahdollista saattaa täsmälliseen muotoon raja-arvokäsitteeseen perustuvalla määritelmällä, johon yllä on jo useaan kertaan viitattu:

Määritelmä 3.21. Olkoon $A \subset \mathbb{R}$ väli tai avointen välien pistevieras yhdiste. Funktio $f : A \to \mathbb{R}$ on *jatkuva pisteessä* $x_0 \in A$, jos sen raja-arvo x_0:ssa on on sen arvo $f(x_0)$ ts. jos pätee ehto

$$(*) \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Tapauksessa, jossa $x_0 \in I$ on välin $A = I$ päätepiste, ehdolla $(*)$ tarkoitetaan toispuolista raja-arvoa.

Jos f on jatkuva jokaisessa $x_0 \in A$, f on jatkuva A:ssa (tai vain "f on jatkuva").

Esimerkki 3.22. Funktio $f(x) = |x|$ on jatkuva $\mathbb{R}$:ssä, sillä $\lim_{x \to x_0} |x| = |x_0| \ \forall x_0 \in \mathbb{R}$. Perustelu:

$$\big||x| - |x_0|\big| \overset{2.12.(6)}{\leq} |x - x_0| < \epsilon, \text{ kun } 0 < |x - x_0| < \delta = \epsilon. \quad \square$$

Seuraavat lauseet on yllä oleellisesti jo todistettu raja-arvotuloksina.

Lause 3.23. *Olkoot $f : A \to \mathbb{R}$ ja $g : A \to \mathbb{R}$ kuvauksia ja $x_0 \in A$. Jos f ja g ovat jatkuvia x_0:ssa (vast. A:ssa), niin myös $f + g$, $f - g$, fg ja $\frac{f}{g}$ ovat jatkuvia x_0:ssa (vast. A:ssa). Osamäärän $\frac{f}{g}$ tapauksessa tarvitaan lisäoletus, että $g(x_0) \neq 0$ (vast. $g(x) \neq 0 \ \forall x \in A$).*

Todistus. Seuraus lauseesta 3.3. $\square$

Seuraus 3.24. *Rationaalifunktio $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, ($P, Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polynomeja) on jatkuva koko määrittelyjoukossaan $A = \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\}$,*

Todistus. Lauseen 3.4 nojalla

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \ \forall x_0 \in A$$

ja A on äärellisen monen erillisen avoimen välin yhdiste. $\square$

Jatkuvien funktioiden yhdistetty kuvaus on aina jatkuva:

Lause 3.25. *Jos $f : A \to B$ on jatkuva pisteessä $x_0 \in A$ ja $g : B \to \mathbb{R}$ jatkuva pisteessä $f(x_0) \in B$, niin yhdistetty kuvaus $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ on jatkuva pisteessä x_0*

Todistus. Seuraa lauseesta 3.8, katso myös huomautus 3.9 ii). $\square$

Esimerkki 3.26. Funktio $f(x) = \sqrt{|x| + x^2}$ on jatkuva $\mathbb{R}$:ssä, sillä f voidaan esittää yhdistettynä kuvauksena jatkuvista funktioista $h : \mathbb{R} \to [0, \infty[$, $h(x) = |x| + x^2$, ja $g : [0, \infty[\to \mathbb{R}$, $g(y) = \sqrt{y}$:

$$f(x) = \sqrt{|x| + x^2} = g(h(x)) = (g \circ h)(x).$$

Jatkuvien funktioiden ominaisuuksia.

Koska seuraavien lauseiden todistaminen veisi kurssin kannalta liian syvälle teoreettisiin tarkasteluihin, annamme ne ilman todistuksia.

Lause 3.27. *Jos $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ on jatkuva, niin $f([a, b]) = [m, M]$, missä m on f:n pienin ja M f:n suurin arvo välillä $[a, b]$.*

Suljetulla välillä jatkuva funktio saa siis tällä välillä suurimman arvon ja pienimmän arvon. Lisäksi se saa kyseisellä välillä kaikki suurimman ja pienimmän arvon välisetkin arvot. Jos erityisesti $f(a)$ ja $f(b)$ ovat erimerkkiset, pätee ns. *Bolzanon lause*:

Lause 3.28. *(Bolzano) Jos $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ on jatkuva ja $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, niin on olemassa $x_0 \in]a, b[$ s.e. $f(x_0) = 0$.*

Todistus. Annamme suoran todistuksen juonen, koska yleensä tätä lausetta käytetään apuna edellistä todistettaessa.

Merkitään $A = \{t \in [a, b] \mid f(x) < 0 \ \forall x \in [a, t]\}$. Tällöin $A \neq \emptyset$ ($a \in A$) ja A on ylhäältä rajoitettu (b on A:n yläraja), joten on olemassa $x_0 = \sup A \leq b$. Voidaan osoittaa, että $a < x_0 < b$ (ks. lause 3.19) ja $f(x_0) = 0$. (Tämä x_0 on f:n pienin nollakohta $[a, b]$:ssä. "Toiseksi pienintä" ei muuten tarvitse edes olla olemassa, jos nollakohtia on äärettömän monta!) $\square$

Esimerkki 3.29. Tutki onko funktiolla $f(x) = x^2 + x$ suurinta tai pienintä arvoa $\mathbb{R}$:ssä.

Ratkaisu.
Tapa 1: $f(x) = x^2 + x = (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ ja $f(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$, joten on olemassa $\underline{\underline{\min f(\mathbb{R}) = -\frac{1}{4}}}$. Koska $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty^2 + \infty = \infty + \infty = \infty$, *suurinta arvoa ei ole.*
Tapa 2: Koska $f(1) = 2$ ja $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ ja $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x(x + 1) = (-\infty)(-\infty) = \infty$, on olemassa $M > 0$ ja $m < 0$ siten, että välin $[m, M]$ ulkopuolella $f(x) > f(1) = 2$. Välillä $[m, M]$ f saa pienimmän arvon $a = \min f([m, M])$. Nyt $1 \in [m, M]$ (koska $f(x) > f(1)$ $\forall x \in \mathbb{R} \setminus [m, M]$). Siten $f(x) > f(1) \geq a$ $\forall x \in \mathbb{R} \setminus [m, M]$ ja $f(x) \geq a$ $\forall x \in [m, M]$. Siis $f(x) \geq a$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Näin ollen: $\exists a = \min f(\mathbb{R})$ ja $\nexists$ $\max f(\mathbb{R})$.

Tavan 2 perusajatus oli, että "lähellä pisteitä ∞ ja $-\infty$ $f(x)$ on suurempi kuin $f(1)$", jonka avulla voitiin pienintä arvoa haettaessa rajoittua sopivaan 1:n sisältävään suljettuun väliin ja käyttää siellä lausetta 3.27.

Välillä määritellyn jatkuvan bijektion käänteisbijektio on jatkuva:

Lause 3.30. *Olkoon $f : I \to \mathbb{R}$ ($I \subset \mathbb{R}$ väli) kuvaus. Jos f on jatkuva, niin kuvajoukko $I' = f(I)$ on myös väli (tai piste, jonka voi ajatella yksipisteiseksi suljetuksi "väliksi"). Jos lisäksi f on injektio, niin rajoittuma $f : I \to I'$ on aidosti monotoninen bijektio, jonka käänteisbijektio $f^{-1} : I' \to I$ on jatkuva ja aidosti monotoninen (kasvava, jos f on kasvava, ja vähenevä, jos f on vähenevä).*

Huomautus 3.31. Lauseen 3.10 väite juurifunktion jatkuvuudesta seuraa nyt siitä, että $g(x) = \sqrt[n]{x}$ on funktion $f(x) = x^n$ käänteisfunktio. Jos n on parillinen, $f : [0, \infty[\to [0, \infty[$ on jatkuva, aidosti kasvava bijektio ja $y = f(x) = x^n \Leftrightarrow x = g(y) = \sqrt[n]{y}$ $\forall x, y \in [0, \infty[$. Siten $g = f^{-1}$ on jatkuva ja aidosti kasvava.

Jos taas n on pariton, niin $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$ on jatkuva ja aidosti kasvava bijektio ja $g = f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(y) = \sqrt[n]{y}$, on siis myös jatkuva ja aidosti kasvava.

Kummassakin tapauksessa aidon kasvun voi todistaa suoraankin, mutta helpompi todistus saadaan myöhemmin derivaatan avulla. Funktion $f(x) = x^n$ surjektiivisuus seuraa kummassakin tapauksessa siitä, että jatkuva funktio saa kahden arvonsa väliset arvot. Todistus sujuu seuraavan esimerkin tyyliin.

Esimerkki. Olkoon $n \in \mathbb{N}$ ja olkoon $c > 0$. Tällöin funktio $f(x) = x^n$ on jatkuva, $f(0) = 0$ ja $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$. Siten on olemassa sellainen $M > 0$, että $f(x) > c$ aina kun $x \geq M$. Nyt $0 = f(0) < c < f(M)$ ja f on jatkuva välillä $[0, M]$, joten on olemassa sellainen $x_0 \in [0, M]$, että $f(x_0) = c$.

Esimerkki 3.32. i) Esimerkin 3.17 nojalla on $\lim\limits_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$. Näin ollen funktio $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, on jatkuva origossa, sillä $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$.

(Se on jatkuva myös origon ulkopuolella, sillä $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on jatkuva (myöhempi asia), joten yhdistettyjen funktioiden jatkuvuussääntö takaa funktion $\sin \frac{1}{x}$ jatkuvuuden pisteissä $x_0 \neq 0$. Edelleen tulon jatkuvuussäännöstä seuraa, että myös $x \sin \frac{1}{x}$ on jatkuva tällöin.)

ii) Esimerkin 3.18 nojalla ei ole olemassa raja-arvoa $\lim\limits_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$. Siten ei ole olemassa $\mathbb{R}$:ssä määriteltyä jatkuvaa funktiota f, joka olisi muotoa $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$, ($a \in \mathbb{R}$), sillä ehto $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$ ei voi toteutua, koska raja-arvoa $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ ei ole. Toisin sanoen funktiota $\sin \frac{1}{x}$ ei voi "laajentaa" origossa jatkuvaksi funktioksi.

Esimerkki 3.33. Millä a:n arvolla funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \geq a \\ 2x, & x < a \end{cases}$ on jatkuva?

Ratkaisu. Jos $x_0 \neq a$, f yhtyy x_0:n kokonaisessa ympäristössä jatkuvaan funktioon $g(x) = x + 1$ tai $h(x) = 2x$. Tällöin $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, sillä raja-arvo ei riipu funktion arvoista "etäällä" x_0:sta. Näin ollen f on jatkuva x_0:ssa ainakin silloin kun $x_0 \neq a$. Ratkaisevaksi muodostuu siis f:n jatkuvuus pisteessä $x_0 = a$. Tätä täytyy tutkia laskemalla erikseen toispuoliset raja-arvot a:ssa, sillä a:n ympäristössä f:llä on eri lausekkeet a:sta vasemmalle ja oikealle. Nyt

$$\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+}(x+1) = a+1 = f(a) \quad \text{ja} \quad \lim_{x\to a-} f(x) = \lim_{x\to a-} 2x = 2a,$$

joten

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) = f(a) \;\Leftrightarrow\; a+1 = 2a \;\Leftrightarrow\; a = 1$$

Siis f on jatkuva a:ssa $\Leftrightarrow$ $a = 1$. *Siis f on jatkuva $\mathbb{R}$:ssä* $\Leftrightarrow$ $\underline{\underline{a=1}}$.

Lukujonon raja-arvo.

Määritelmä 3.34. *Lukujono* on kuvaus $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f(n) = a_n$, $(n \in \mathbb{N})$. Arvo $f(n) = a_n$ on jonon n:s *jäsen* ja jonoa merkitään myös $(a_n)_{n=1}^{\infty} = (a_n)$. Jos $n_1 < n_2 < \ldots$ on aidosti kasvava jono luonnollisia lukuja, saadaan jonon (a_n) *osajono* $(a_{n_i})_{i=1}^{\infty}$.

Esimerkki. i) Jonossa $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ on $a_n = \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
ii) Jono $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{1+x_n}$ $(n \in \mathbb{N})$, on määritelty *palautuskaavalla* (*rekursiolla*) antamalla seuraava jäsen edellisten avulla. Itse asiassa näillä kaavoilla annettu jono toteuttaa ehdon $x_n = \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$! Todistetaan tämä induktiolla:
1° $x_1 = 1 = \frac{1}{1}$, joten väite $x_n = \frac{1}{n}$ pätee kun $n = 1$.
2° Tehdään induktio-oletus: $n \in \mathbb{N}$ ja $x_n = \frac{1}{n}$. Tällöin saadaan

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{1+x_n} \overset{\text{ind. ol.}}{=} \frac{1/n}{1+1/n} = \frac{n\cdot\frac{1}{n}}{n(1+\frac{1}{n})} = \frac{1}{n+1}.$$

1°&2°&ind. $\Rightarrow$ $x_n = \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Määritelmä 3.35. Jono $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *suppenee* kohti lukua $a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$,

$$\text{jos } \forall \epsilon > 0 \; \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \text{ s.e. } n > n_\epsilon \;\Rightarrow\; |a_n - a| < \epsilon.$$

Jono $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *suppenee* (*hajaantuu*) kohti ääretöntä, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$,

$$\text{jos } \forall M > 0 \; \exists n_M \in \mathbb{N} \text{ s.e. } n > n_M \;\Rightarrow\; a_n > M.$$

Jono $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *suppenee* (*hajaantuu*) kohti miinus ääretöntä, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$,

$$\text{jos } \forall m < 0 \; \exists n_m \in \mathbb{N} \text{ s.e. } n > n_m \;\Rightarrow\; a_n < m.$$

Suppenevan jonon osajonot suppenevat myös:

Lause 3.36. *Jos* $(a_{n_i})_{i=1}^{\infty}$ *on jonon* (a_n) *osajono ja jos* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ *(*$a \in \overline{\mathbb{R}}$*), niin* $\lim_{i\to\infty} a_{n_i} = a$.

Todistus. Käsitellään malliksi tapaus $a \in \mathbb{R}$. Olkoon $\epsilon > 0$. Koska $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\exists n_\epsilon$ s.e. $n > n_\epsilon \;\Rightarrow\; |a_n - a| < \epsilon$. Valitaan $i_\epsilon \in \mathbb{N}$ s.e. $n_{i_\epsilon} > n_\epsilon$. Tällöin

$$i > i_\epsilon \;\Rightarrow\; n_i > n_{i_\epsilon} \;\Rightarrow\; |a_{n_i} - a| < \epsilon. \quad \square$$

Käänteiseen suuntaan pätee (todistus harjoitustehtäväksi):

Lause 3.37. $\lim_{n\to\infty} a_n = a \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty} a_{2n} = a$ *ja* $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = a$.

Toisin sanoen, jonon (a_n) suppenemiselle on välttämätöntä ja riittävää ”parillisten” ja ”parittomien” jäsenten muodostamien osajonojen suppeneminen kohti samaa raja-arvoa.

Jonojen raja-arvoille pätee samanlainen laskulause kuin funktioiden raja-arvoille:

Lause 3.38. *Jos* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ *ja* $\lim_{n\to\infty} b_n = b$*, niin*

(i) $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$,

(ii) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab$,

(iii) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$, jos $b_n \neq 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$ ja $b \neq 0$.

Itse asiassa monet jonojen raja-arvolaskut voi ajatella funktioiden raja-arvoina ∞:ssä, jos n:n pystyy halutessaan tulkitsemaan reaaliseksi variaabeliksi tarkasteltavassa tilanteessa.

Esimerkki 3.39. (i) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0$.

(ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$, sillä ”parillisten osajono” $\frac{1}{2n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ ja samoin ”parittomien osajono” $\frac{-1}{2n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Myös voisi soveltaa kuristusperiaatetta:

$$\frac{-1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n} \text{ ja } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ ja } \lim_{n\to\infty} (-\frac{1}{n}) = 0 \text{ joten } \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$$

Määritelmä 3.40. Jono $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ on *nouseva* (*kasvava*), jos $a_{n+1} \geq a_n \; \forall n \in \mathbb{N}$. Jono $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ on *laskeva* (*vähenevä*), jos $a_{n+1} \leq a_n \; \forall n \in \mathbb{N}$. Jono (a_n) on *ylhäältä rajoitettu* (vast. *alhaalta rajoitettu*), jos joukko $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ on vastaavanlainen.

Esimerkki. Jono $\left(\frac{n}{n+1}\right)$ on ylhäältä rajoitettu, kasvava jono, sillä $\frac{n}{n+1} < 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ja $\frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2} \; \forall n \in \mathbb{N}$, (sillä $n^2 + 2n < (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \; \forall n \in \mathbb{N}$).

Perustulos nousevien ja laskevien jonojen suppenemisesta on yksinkertainen:

Lause 3.41. (i) *Nouseva jono* (a_n) *suppenee kohti* ∞, *kun* (a_n) *ei ole ylhäältä rajoitettu ja kohti lukua*

$$a = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\},$$

kun (a_n) *on ylhäältä rajoitettu.*
(ii) *Laskeva jono* (a_n) *suppenee kohti* $-\infty$, *kun* (a_n) *ei ole alhaalta rajoitettu ja kohti lukua*

$$a = \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\},$$

kun (a_n) *on alhaalta rajoitettu.*
Yhteenveto

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \infty, & \textit{kun } (a_n) \textit{ on nouseva ja ei ole ylhäältä rajoitettu,} \\ \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}, & \textit{kun } (a_n) \textit{ on nouseva ja ylhäältä rajoitettu,} \\ -\infty, & \textit{kun } (a_n) \textit{ on laskeva ja ei ole alhaalta rajoitettu,} \\ \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}, & \textit{kun } (a_n) \textit{ on laskeva ja alhaalta rajoitettu.} \end{cases}$$

Todistus. Malliksi (i). Jos (a_n) ei ole ylhäältä rajoitettu ja $M > 0$, niin on olemassa $n_M \in \mathbb{N}$ siten, että $a_{n_M} > M$. Tällöin $n > n_M \;\Rightarrow\; a_n \geq a_{n_M} > M \;\Rightarrow\; a_n > M$, joten $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Jos taas (a_n) on ylhäältä rajoitettu, on olemassa $a = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Jos $\epsilon > 0$, on sup:n ϵ-kriteerin (2.8) nojalla olemassa $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ s.e. $a_{n_\epsilon} > a - \epsilon$. Tällöin $n > n_\epsilon \;\Rightarrow\; a \geq a_n \geq a_{n_\epsilon} > a - \epsilon \;\Rightarrow\; |a - a_n| < \epsilon$, joten $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. $\square$

Huomautus. Tiiviimpi sanonta: Nouseva lukujono suppenee aina kohti supremumiansa. Tapaus "jono ei ole ylhäältä rajoitettu" ilmaistaan tässä sopimuksella "$\sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \infty$". Vastaavasti laskeva lukujono suppenee aina kohti infimumiansa, jolloin tapauksessa "jono ei ole alhaalta rajoitettu" on sovittu "$\inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = -\infty$". Nyt lauseen 3.41 tulos voidaan pelkistää muotoon:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}, & \text{kun } (a_n) \text{ on nouseva,} \\ \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}, & \text{kun } (a_n) \text{ on laskeva.} \end{cases}$$

Esimerkki 3.42. (Neperin luku e) Tarkastellaan jonoa $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Binomilauseen nojalla on

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2}\,\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\,\frac{1}{n^3} + \ldots + \frac{1}{n^n},$$

josta helposti johdetaan

$$(*) \qquad \begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 &+ \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots \\ &+ \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \ldots \\ &+ \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \end{aligned}$$

Yhtälön $(*)$ oikean puolen termit ovat positiivisia. Kun n kasvaa, suurenee jokainen termi kolmannesta alkaen (sillä tekijät $1-\frac{1}{n}$, $1-\frac{2}{n}$, ... kasvavat tekijöiksi $1-\frac{1}{n+1}$, $1-\frac{2}{n+1}$, ...) ja loppuun tulee uusi positiivinen termi. Jono (a_n) on siis nouseva.

Yhtälön $(*)$ nojalla on myös

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!} \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}.$$

Edelleen havaitaan, että

$$\frac{1}{1!}=\frac{1}{2^{1-1}},\ \frac{1}{2!}=\frac{1}{2^{2-1}},\ \frac{1}{3!}<\frac{1}{2\cdot 2}=\frac{1}{2^2},\ \frac{1}{4!}<\frac{1}{2^3}$$

ja samaan tapaan

$$\frac{1}{n!}\le\frac{1}{2^{n-1}} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Siten saadaan arvio

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le 1+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots\frac{1}{2^{n-1}}\right) \overset{\text{(i)}}{=} 1+\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} = 3-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Jono (a_n) on siis myös ylhäältä rajoitettu ja $\sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \le 3$. Kohdassa (i) on sovellettu geometrisen sarjan teoriaa (ks. MAOL tai seuraava luku). Lauseen 3.40 nojalla on olemassa raja-arvo

$$e=\sup\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \,\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

ns. *Neperin luku*. Se on irrationaaliluku ja sen eräs likiarvo on $e \approx 2{,}71828$. Huomattakoon, että kyseiseen raja-arvoon liittyy "kielletty muoto" 1^∞.

Jatkuvien funktioiden soveltamisesta suppeneviin jonoihin pätee seuraava lause

Lause 3.43. *Olkoon* $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ *ja olkoon* f *a:ssa jatkuva reaalifunktio. Tällöin* $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$.

Todistus. Olkoon $\epsilon > 0$. Koska f on jatkuva a:ssa, on olemassa $\delta > 0$ siten, että jos $|x-a| < \delta$ (tai toispuolisesti, $a \le x < a+\delta$ (vast. $a-\delta < x \le a$), jos a on määrittelyvälin päätepiste), niin $|f(x)-f(a)| < \epsilon$. Koska $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$, on olemassa $n_\delta \in \mathbb{N}$ siten, että jos $n > n_\delta$, niin $|a_n - a| < \delta$ (tai toispuolisesti $a \le a_n < a+\delta$ (vast. $a-\delta < a_n \le a$)). Tällöin $n > n_\delta \Rightarrow |f(a_n)-f(a)| < \epsilon$. $\square$

Esimerkki. Koska $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n^2-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{1}{n^2}}=1$, on $\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{n^2+1}{n^2-1}}=\sqrt[3]{1}=1$, sillä funktio $f(x)=\sqrt[3]{x}$ on jatkuva pisteessä 1.

4. Sarjat

Sarja on summa $x_1 + x_2 + \ldots + x_k + \ldots = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$, jossa on ääretön määrä *termejä* x_k. Tarkemmin:

Määritelmä 4.1. Sarja on pari $\big((x_k), (S_n)\big)$, jossa $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ on *termien* $x_k \in \mathbb{R}$ jono ja $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ *osasummien*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k = x_1 + \ldots + x_n \in \mathbb{R}$$

jono. Tätä sarjaa merkitään yleensä symbolilla $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$. Sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ *suppenee* ja sen summa on luku $S \in \mathbb{R}$, jos osasummien jono (S_n) suppenee kohti S:ää, ts. jos on olemassa $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$. Muuten sanomme, että sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ *hajaantuu.*

Huomautus 4.2. i) Symbolilla $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ merkitään suppenemistapauksessa sekä sarjaa että summaa. Asiayhteydestä on yleensä selvää, kummasta milloinkin puhutaan.
ii) Jos $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, sarja siis *hajaantuu* kohti ääretöntä. Hajaantuvassa sarjassa osasummien jonolla joko ei ole raja-arvoa tai raja-arvo on ∞ tai $-\infty$.

Suppenevassa sarjassa termien jonolla täytyy olla raja-arvona 0:

Lause 4.3. *Jos sarja* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ *suppenee kohti* $S \in \mathbb{R}$, *niin* $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0$.

Todistus. Jos $k \geq 2$, niin $x_k = S_k - S_{k-1} \to S - S = 0$, kun $k \to \infty$, lauseen 3.36 nojalla. $\square$

VAROITUS. Lausetta 4.3 ei voi kääntää. Siitä, että $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0$ ei seuraa sarjan $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ suppeneminen:

Esimerkki 4.4. (Harmoninen sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ hajaantuu kohti ∞.)

Tarkastellaan ns. harmonista sarjaa $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$, $x_k = \dfrac{1}{k}$. Havaitaan, että

$$\begin{aligned}
&x_1 = 1 > \frac{1}{2},\\
&x_2 = \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2},\\
&x_3 + x_4 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2},\\
&x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

ja yleisesti

$$x_{2^n+1} + \ldots + x_{2^n+2^n} > 2^n \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}.$$

Näiden arvioiden avulla osasummille S_{2^n} $(n \in \mathbb{N})$ pätee $S_{2^n} > n \cdot \frac{1}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (tämän ilmeisen havainnon voi todistaa induktiolla). Kaikkien osasummien jonolla $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ on siis kohti ∞ suppeneva osajono (S_{2^n}), sillä $S_{2^n} > n \cdot \frac{1}{2} \to \infty$, kun $n \to \infty$ (kuristusperiaate). Koska termit $x_k = \frac{1}{k}$ ovat positiivisia, osasummien jono on kasvava ja koska sen osajono ei ole ylhäältä rajoitettu, se ei ole itsekään ylhäältä rajoitettu. Siten (ks. 3.41) $S_n \to \infty$, kun $n \to \infty$ eli harmoninen sarja hajaantuu kohti ∞. $\square$

Geometriset sarjat. Osasumman $S_n = x_1 + \ldots + x_n$ lauseke n:n funktiona on mahdollista laskea vain harvinaisissa poikkeustapauksissa, joista tärkein on *geometrinen sarja.*

Määritelmä 4.5. *Geometriseen jonoon* $(a, aq, aq^2, \ldots) = \big(aq^{n-1}\big)_{n=1}^{\infty}$ $(a \in \mathbb{R},\ q \in \mathbb{R})$ *liittyvä sarja*

$$\sum_{k=0}^{\infty} aq^k = a + aq + aq^2 + \ldots$$

on geometrinen sarja, jonka ensimmäinen termi on a ja suhdeluku q.

Lause 4.6. *Geometrisen sarjan* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} aq^k$ *n:s osasumma*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} aq^k = a + aq + \ldots + aq^{n-1} = \begin{cases} \dfrac{a(1-q^n)}{1-q}, & \text{kun } q \neq 1, \\ na, & \text{kun } q = 1. \end{cases}$$

Geometrinen sarja $\sum\limits_{k=0}^{\infty} aq^k$ *suppenee, jos ja vain jos $a = 0$ tai $|q| < 1$.*

Todistus. Tapauksessa $a = 0$ sarja on nollasarja $0 + 0 + \ldots$, joka suppenee kohti 0, sillä myös kaikki osasummat ovat nollia.

Olkoon siis $a \neq 0$.

Jos $q \neq 1$, voidaan laskea seuraavasti:

$$\begin{array}{r@{\;}l} S_n &= a + aq + \ldots + aq^{n-1} \\ -\,qS_n &= -(aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + aq^n) \\ \hline (1-q)S_n &= a - aq^n = a(1-q^n), \end{array}$$

josta saadaan $S_n = a\,\dfrac{1-q^n}{1-q}$, kuten pitikin (ja joka pätee myös tapauksessa $a = 0$).

Jos $|q| > 1$, niin

$$|S_n| = |a| \left| \frac{1-q^n}{1-q} \right| \xrightarrow[n\to\infty]{} |a| \cdot \frac{\infty}{|1-q|} = \infty,$$

sillä tällöin $|1-q^n| = |q^n - 1| \geq \big||q|^n - 1\big| \to \infty$, kun $n \to \infty$, koska $|q|^n \to \infty$, kun $n \to \infty$ ("sallittujen muotojen" listaan voisi lisätä muodon b^∞, $b > -1$, $b \neq 1$:

$$b^\infty = \begin{cases} 0, & \text{kun } -1 < b < 1 \\ \infty, & \text{kun } b > 1; \end{cases}$$

tämän todistus sujuisi esimerkiksi ns. Bernoullin epäyhtälön "$(1+x)^n \geq 1 + nx$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $x > -1$" avulla, mutta pidän asian tunnettuna jo koulukurssin pohjalta). Siis ei voi olla olemassa reaalista raja-arvoa $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, joten sarja hajaantuu, kun $|q| > 1$.

Tapauksessa $q = 1$ osasummille S_n pätee

$$S_n = na \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} \infty, & a > 0 \\ -\infty, & a < 0, \end{cases}$$

joten sarja hajaantuu.

Jos $q = -1$, on

$$S_n = a\,\frac{1-(-1)^n}{2} = \begin{cases} a \neq 0, & \text{kun } n \text{ pariton} \\ 0, & \text{kun } n \text{ parillinen,} \end{cases}$$

joten myös tällöin sarja hajaantuu (lause 3.37).

Jos $-1 < q < 1$, on $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ ja tällöin

$$S_n = a\,\frac{1-q^n}{1-q} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{a}{1-q}.$$

Sarja siis suppenee tällöin kohti lukua

$$\underline{\underline{S = \frac{a}{1-q} = \frac{\text{ensimmäinen termi}}{1 - \text{suhdeluku}}}}. \quad \square$$

Huomautus. Geometrisen sarjan osasummakaavat sekä summakaava suppenemistapauksessa pätevät myös kun $a = 0$. Sen sijaan hajaantumistapauksiin liittyvät tarkastelut ovat voimassa vain oletuksella $a \neq 0$, kuten yllä nähtiin.

Korollaari 4.7. *Suppenevan geometrisen sarjan* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} aq^k = a + aq + aq^2 + \ldots$ ($|q| < 1$ *tai* $a = 0$) *summa on*

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} aq^k = \frac{a}{1-q}.$$

Esimerkki 4.8. i) $\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{5}\right)^k = \frac{\left(-\frac{1}{5}\right)^0}{1-\left(-\frac{1}{5}\right)} = \frac{1}{\frac{6}{5}} = \frac{5}{6}$, sillä sarja on geometrinen, 1. termi on $\left(-\frac{1}{5}\right)^0 = 1$ ja suhdeluku $q = -\frac{1}{5}$ toteuttaa $|q| = \frac{1}{5} < 1$.

ii) Geometrinen sarja $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k$ ei suppene, sillä $|q| = |-1| = 1$ ja sarja ei ole nollasarja.

Esimerkki 4.9. Millä x:n arvoilla sarja

$$\frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^3} + \dots$$

suppenee ja mikä on tällöin sen summa? (Kevään 2006 ylioppilaskirjoitustehtävä).

Ratkaisu. Jos $x = 0$ sarja suppenee nollasarjana ja tällöin sen summa on 0.

Olkoon $x \neq 0$. Tällöin sarja on nollasarjasta eroava geometrinen sarja, jonka suhdeluku $q = (1+x^2)^{-1}$ toteuttaa

$$|q| = \left|\frac{1}{1+x^2}\right| = \frac{1}{1+x^2} < 1,$$

sillä $1 + x^2 > 1$, kun $x \neq 0$. Sarja siis suppenee myös arvoilla $x \neq 0$ ja tällöin sen summa on

$$S(x) = \frac{\frac{x^2}{1+x^2}}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = \frac{x^2}{1+x^2-1} = 1.$$

Vastaus: Sarja suppenee kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja sen summa on

$$S(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1, & x \neq 0. \end{cases}$$

Huomautus. Esimerkistä 4.9 nähdään samalla, että koko $\mathbb{R}$:ssä jatkuvien funktioiden $f_n(x)$ summafunktio $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ voi olla epäjatkuva koko $\mathbb{R}$:ssä määritelty funktio $\left(\text{tässä } f_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n}\right)$.

Lukujonojen laskulauseesta 3.38 ja määritelmästä 4.1 seuraa sarjoille laskulause:

Lause 4.10. *Olkoot $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ ja $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ kaksi sarjaa. Jos ne molemmat suppenevat, niin suppenevat myös sarjat $\sum_{k=1}^{\infty}(x_k + y_k)$ ja $\sum_{k=1}^{\infty}(ax_k)$ $(a \in \mathbb{R})$. Tällöin sarjojen summille pätevät kaavat*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(x_k + y_k) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k + \sum_{k=1}^{\infty} y_k \quad \text{ja} \quad \sum_{k=1}^{\infty}(ax_k) = a\sum_{k=1}^{\infty} x_k.$$

Todistus. Osasummille on selvästi voimassa $\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k + y_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k + \sum\limits_{k=1}^{n} y_k$ ja $\sum\limits_{k=1}^{n}(ax_k) = a\sum\limits_{k=1}^{n} x_k$. Jätämme lopun päättelystä lukijan harjoitukseksi. $\square$

Positiivitermiset sarjat. Jos sarjan $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ termit x_k ovat ei-negatiivisia, $x_k \geq 0$ $\forall k$, niin osasummien $S_n = x_1 + \ldots x_n$ jono on nouseva lukujono. Lauseen 3.41 nojalla saamme tästä heti keskeisen perustuloksen positiivitermisten sarjojen teoriassa:

Lause 4.11. *Positiiviterminen sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenee, jos ja vain jos sen osasummat S_n ovat ylhäältä rajoitetut:*

$$\exists M \in \mathbb{R} \text{ s.e. } S_n \leq M \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Tällöin $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k = \sup\{S_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Muussa tapauksessa positiiviterminen sarja hajaantuu kohti ∞: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$.

Todistus. HT (Vihje yllä; lause 3.41). $\square$

Helpoilla arvioilla johdetaan lauseesta 4.11 ns. majorantti- ja minoranttiperiaatteet:

Lause 4.12. *Olkoot $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ ja $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ kaksi lukujonoa.*

(i) (*Majoranttiperiaate*) *Jos $0 \leq x_k \leq y_k$ $\forall k \in \mathbb{N}$ ja jos sarja $\sum y_k$ suppenee kohti $Y \in [0, \infty[$, niin myös sarja $\sum x_k$ suppenee ja $X = \sum x_k \leq Y$.*

(ii) (*Minoranttiperiaate*) *Jos $0 \leq x_k \leq y_k$ $\forall k \in \mathbb{N}$ ja jos sarja $\sum x_k$ hajaantuu, niin myös sarja $\sum y_k$ hajaantuu (kohti ∞).*

Todistus. (i) Jos $0 \leq x_k \leq y_k$ $\forall k \in \mathbb{N}$ ja jos sarja $\sum y_k$ suppenee ja $\sum y_k = Y \in [0, \infty[$, niin osasummille $S_n = x_1 + \ldots x_n$ ja $T_n = y_1 + \ldots + y_n$ saadaan arviot

$$0 \leq S_n \leq T_n \leq Y \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Lauseen 4.11 nojalla tästä seuraa, että

$$\exists X = \sum_{k=1}^{\infty} x_k = \sup\{S_n \mid n \in \mathbb{N}\} \leq Y.$$

(ii) Seuraa välittömästi (i):stä epäsuoralla päättelyllä. $\square$

Esimerkki 4.13. (i) Sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{3^k-1}$ suppenee majoranttiperiaatteen nojalla, sillä

$$0 < x_k = \frac{2^k}{3^k-1} \leq y_k = \frac{2 \cdot 2^k}{3^k} \ \forall k \in \mathbb{N}$$

(sillä $2 \cdot 2^k(3^k-1) = 2 \cdot 2^k 3^k - 2 \cdot 2^k = 2^k 3^k + 2^k 3^k - 2 \cdot 2^k \geq 2^k 3^k$, koska $2^k 3^k - 2 \cdot 2^k = 2^k(3^k - 2) > 0$) ja sarja $\sum_{k=1}^{\infty} y_k = \sum_{k=1}^{\infty} 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^k$ suppenee geometrisen sarjan teorian ja lauseen 4.10 nojalla.

(ii) Sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2k^2-1} = \sum_{k=1}^{\infty} y_k$ hajaantuu minoranttiperiaatteen nojalla, sillä $\forall k \in \mathbb{N}$

$$0 < x_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k} = \frac{k}{2k^2} < \frac{k}{2k^2-1} = y_k$$

ja sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k}\right)$ hajaantuu (lause 4.10 ja esimerkki 4.4).

Lause 4.14. (*Suhdetesti, osamäärätesti*) *Olkoon $x_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Jos $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ s.e. arvosta n_0 alkaen seuraavan termin suhde edelliseen on ykköstä pienemmän vakion alapuolella, sarja $\sum x_k$ suppenee. Symbolisemmin:*
$\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $0 < q < 1$ s.e. $\frac{x_{n+1}}{x_n} < q$ $\forall n \geq n_0$ $\Rightarrow$ positiiviterminen sarja $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenee.

Todistus. Arvosta n_0 alkaen saadaan arviot

$$x_{n_0+1} < qx_{n_0},\ x_{n_0+2} < qx_{n_0+1} < q^2 x_{n_0},\ \ldots\ ,\ x_{n_0+k} < \ldots < q^k x_{n_0},$$

joten positiivitermisellä sarjalla $\sum_{k=n_0}^{\infty} x_k$ on suppeneva (suhdeluku q toteuttaa $|q| = q < 1$) geometrinen majoranttisarja $\sum_{k=n_0}^{\infty} q^{k-n_0} x_{n_0}$. Majoranttiperiaatteen nojalla sarja $\sum_{k=n_0}^{\infty} x_k$ suppenee, joten on olemassa $T = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n_0}^{n} x_k$. Koska alkuperäisen sarjan n:s osasumma S_n toteuttaa ehdon $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} x_k + S_{n_0-1}$ $\forall n \geq n_0$, niin $\lim_{n\to\infty} S_n = T + S_{n_0-1}$, ts. myös alkuperäinen sarja $\sum_{k=1}^{\infty}$ suppenee (kohti $T + x_1 + \ldots + x_{n_0-1}$). $\square$

Korollaari 4.15. (*Suhdetestin lim-muoto*) *Olkoon $x_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Jos $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = c \geq 0$, niin sarja $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenee, jos $c < 1$ ja hajaantuu jos $c > 1$.*

Todistus. Jos $c < 1$, voi valita $q \in \,]c, 1[$ ja soveltaa raja-arvon määritelmää ($\epsilon = q - c > 0$):

$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ s.e. $n > n_0 \;\Rightarrow\; \frac{x_{n+1}}{x_n} < q = c + \epsilon$. Tällöin sarja $\sum x_k$ suppenee lauseen 4.14 nojalla.

Jos $c > 1$, valitaan $\epsilon = c - 1$ ja sovelletaan raja-arvon määritelmää: $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ s.e. $n > n_0 \;\Rightarrow\; \frac{x_{n+1}}{x_n} > 1 \;\Rightarrow\; x_{n+1} > x_n$, ts. arvosta n_0 alkaen termit kasvavat. Tällöin termi ei voi supeta kohti 0 (se on $> x_{n_0} > 0$), joten lauseen 4.3 välttämätön ehto suppenemiselle ei toteudu. Sarja $\sum x_k$ siis hajaantuu (kohti ∞). $\square$

Huomautus. Jos $c = 1$, 4.15 ei auta!

Esimerkki 4.16. Tutki sarjan $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenemista, kun a) $x_k = \frac{1}{\sqrt{k}}$, b) $x_k = \frac{2^k}{k^2}$, c) $x_k = \frac{1}{k!}$.

Ratkaisu. Kaikissa tapauksissa $x_k > 0$, joten voidaan yrittää soveltaa lauseita 4.12, 4.14 ja 4.15.

$$\text{(a)} \qquad \frac{x_{k+1}}{x_k} = \frac{\frac{1}{\sqrt{k+1}}}{\frac{1}{\sqrt{k}}} = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}} = \sqrt{\frac{k}{k+1}} = \sqrt{1 + \frac{1}{k}} \to 1, \text{ kun } k \to \infty,$$

joten lauseista 4.14 ja 4.15 ei ole nyt apua. Sen sijaan minoranttiperiaate 4.12 (ii) auttaa: $0 \le \frac{1}{k} \le \frac{1}{\sqrt{k}}$ $\forall k \in \mathbb{N}$ ja harmoninen sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ hajaantuu, joten minoranttiperiaatteen nojalla myös sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ *hajaantuu* (kohti ∞). [Sama päättely toimii kaikilla ns. *aliharmonisilla sarjoilla* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$, missä $0 < s < 1$ (yllä oli $s = \frac{1}{2}$); ne ovat siis hajaantuvia.

Sarjat $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$, missä $s > 1$ ovat ns. *yliharmonisia sarjoja*; ne voidaan osoittaa suppeneviksi, mutta kuten yllä lauseet 4.14 ja 4.15 eivät tässä auta.]

$$\text{(b)} \qquad \frac{x_{k+1}}{x_k} = \frac{2^{k+1}}{(k+1)^2} : \frac{2^k}{k^2} = \frac{2^{k+1} \cdot k^2}{2^k (k+1)^2} = 2\left(\frac{k}{k+1}\right)^2$$
$$= 2\left(\frac{1}{1+\frac{1}{k}}\right)^2 \to 2\left(\frac{1}{1+0}\right)^2 = 2, \text{ kun } k \to \infty,$$

joten lauseen 4.15 nojalla sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^2}$ *hajaantuu*, sillä $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{x_{k+1}}{x_k} = 2 > 1$.

$$\text{(c)} \qquad \frac{x_{k+1}}{x_k} = \frac{1}{(k+1)!} : \frac{1}{k!} = \frac{k!}{(k+1)!} = \frac{1}{k+1} \to \frac{1}{\infty} = 0 < 1, \text{ kun } k \to \infty,$$

joten lauseen 4.15 nojalla sarja $\sum_{k=1}^{\infty} x_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$ *suppenee.* $\big[$Voi osoittaa, että esimerkissä 3.41 määritelty Neperin luku e toteuttaa

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \ \left(= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \right),$$

joten $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} = e - 1.\big]$

Lause 4.17. *("$\lim \frac{x_k}{y_k}$-kriteeri") Olkoot $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ ja $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ kaksi positiivitermistä sarjaa: $x_k > 0$ ja $y_k > 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Jos on olemassa raja-arvo*

$$a = \lim_{k \to \infty} \frac{x_k}{y_k}$$

ja jos $0 < a < \infty$, niin sarjat $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ ja $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ joko molemmat suppenevat tai molemmat hajaantuvat.

Todistus. Väite seuraa helposti lauseesta 4.12. Todistetaan malliksi, että sarjan $\sum x_k$ suppenemisesta seuraa sarjan $\sum y_k$ suppeneminen, kun $a = \lim_{k\to\infty} \frac{x_k}{y_k} \in \,]0, \infty[$.

Lukujonon raja-arvon määritelmän nojalla (val. $\epsilon = \frac{a}{2}$) on olemassa $k_0 \in \mathbb{N}$ s.e.

$$k \geq k_0 \ \Rightarrow \ \left| \frac{x_k}{y_k} - a \right| < \frac{a}{2} \ \Rightarrow \ -\frac{a}{2} < \frac{x_k}{y_k} - a < \frac{a}{2} \ \Rightarrow \ \frac{a}{2} < \frac{x_k}{y_k} < \frac{3a}{2} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \frac{a}{2} < \frac{x_k}{y_k} \ \Rightarrow \ y_k < \frac{2x_k}{a} \ \text{(sillä } x_k > 0 \text{ ja } y_k > 0 \ \forall k \geq k_0 \text{ ja } a > 0).$$

Siis sarjalla $\sum_{k=k_0}^{\infty} y_k$ on suppeneva majoranttisarja $\sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{2}{a} x_k$, joten sarja $\sum_{k=k_0}^{\infty} y_k$ ja siis myös sarja $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ suppenee. $\square$

Esimerkki 4.18. i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+1}{n^4+n^3+2}$ hajaantuu, sillä harmoninen sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ hajaantuu ja

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^3+1}{n^4+n^3+2} : \frac{1}{n} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4+n}{n^4+n^3+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n^3}}{1+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^4}} = 1 \in \,]0, \infty[\,.$$

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4+1}$ suppenee, sillä yliharmoninen sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ suppenee (ks. 4.16) ja

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2}{n^4+1} : \frac{1}{n^2} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4}{n^4+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n^4}} = 1 \in \,]0, \infty[\,.$$

Jos sarja $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ ei ole positiiviterminen, voi yllä olevia kriteerejä koettaa soveltaa sen termien itseisarvojen muodostamaan positiivitermiseen sarjaan.

Lause 4.19. *Jos sarja* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ *on itseisesti suppeneva, ts. jos sarja* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|$ *suppenee, niin se on suppeneva eli* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ *suppenee sekin.*

Todistus. Arvio $0 \leq |x_k| - x_k \leq 2|x_k|$ ja majoranttiperiaate 4.12 (i) johtavat laskulauseen 4.10 avulla heti väitteeseen, sillä

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = \sum_{k=1}^{\infty} \big(|x_k| - (|x_k| - x_k)\big). \quad \square$$

Esimerkki 4.20. i) Sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$ suppenee jopa itseisesti, sillä sen termien itseisarvojen muodostama sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ suppenee yliharmonisena sarjana.

(ii) Voidaan osoittaa, että sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ suppenee (todistus sujuu melko helposti osasummia S_{2n} ja S_{2n+1} arvioiden ja menetelmä antaa yleisemmän ns. *Leibnizin lauseen*, jonka nojalla *vuorotteleva sarja* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k x_k$ ($x_k > 0\ \forall k$) suppenee jos sen termien itseisarvot x_k muodostavat nollaa kohti suppenevan, laskevan lukujonon). Koska kuitenkin harmoninen sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ hajaantuu, sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ ei suppene itseisesti. On siis olemassa sarjoja, jotka suppenevat, mutteivät itseisesti.

Potenssisarjat. Matemaattisessa analyysissä funktioita esitetään usein potenssisarjojen summina

Määritelmä 4.21. Olkoot $a_n \in \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N}_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Sarja

$$(*) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

on x_0-*keskinen potenssisarja*. Joukko $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{sarja } (*) \text{ suppenee}\}$ on potenssisarjan $(*)$ *suppenemisjoukko* ja funktio $f : A \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \ \forall x \in A,$$

on sen *summafunktio*.

Huomautus 4.22. (i) Aina $x_0 \in A$ ja $f(x_0) = a_0$ (ensimmäisessä termissä $a_0(x - x_0)^0$ tulkitaan $(x - x_0)^0 = 1$ myös kun $x = x_0$).

(ii) Sijoituksella $y = x - x_0$ sarja $(*)$ muuttuu origokeskiseksi sarjaksi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n y^n$. Teorian rakentelussa on mukavinta tutkia näitä. Käyttäen ym. sijoitusta x_0-keskisten sarjojen teoria palautuu origokeskisen teoriaan. Keskeinen tulos on:

Lause 4.23. (*Abelin lause*) *Jos potenssisarja*

$$(*) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (a_n \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}_0)$$

suppenee arvolla $x_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, niin se suppenee itseisesti jokaisella ehdon $|x| < |x_1|$ täyttävällä x.

Todistus. Olkoon $|x| < |x_1|$. Sovelletaan majoranttiperiaatetta. Oletuksen nojalla $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$ suppenee. Tästä seuraa, että sen termien itseisarvot ovat ylhäältä rajoitetut (HT: osoita, että termien itseisarvot suppenevat kohti 0):

$$\exists M > 0 \text{ s.e. } |a_n x_1^n| \le M\ \forall n.$$

Tästä saadaan arvio $|a_n| \le \dfrac{M}{|x_1|^n}$ ja siten edelleen arvio

$$|a_n x^n| \le M \left| \frac{x}{x_1} \right|^n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Sarjalla $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ on siis suppeneva geometrinen majoranttisarja $\sum\limits_{n=0}^{\infty} M \left| \frac{x}{x_1} \right|^n$ $\left(\left| \frac{x}{x_1} \right| < 1 \right)$, joten se suppenee. □

Abelin lauseesta seuraa, että potenssisarjan suppenemisjoukko on x_0-keskinen väli:

Lause 4.24. *Potenssisarjan $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ suppenemisjoukko $A = \{x \in \mathbb{R} \mid$ sarja suppenee x:ssä$\}$ on origokeskinen väli (erikoistapauksina $\{0\} = [0,0]$ ja $\mathbb{R} = \,]{-\infty}, \infty[$).*

Todistus. Merkitään $R = \sup A \in [0, \infty]$. (Koska $0 \in A$, $R \ge 0$; sovitaan taas, että merkinnällä $\sup A = \infty$ osoitetaan, että A ei ole ylhäältä rajoitettu, jolloin tapaus $R = \infty$ vastaa siis tätä). Abelin lauseesta seuraa nyt helposti (HT), että sarja $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ suppenee (jopa itseisesti) välillä $]{-R}, R[$ ja hajaantuu, kun $|x| > R$. (Jos $0 < R < \infty$, päätepisteissä $\pm R$ sarja voi supeta tai hajaantua; Abelin lause ei anna siitä informaatiota ja myöhemmissä esimerkeissä (harjoitustehtävissä) havaitsemme kaikki vaihtoehdot mahdollisiksi.) □

Määritelmä 4.25. Suppenemisjoukon A supremum $R = \sup A \in [0, \infty]$ on potenssisarjan $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *suppenemissäde* ja väli $]{-R}, R[$ on sen *suppenemisväli.*

Huomautus. Jos $R = 0$, $]{-R}, R[\,= \emptyset$ ja $A = \{0\}$. Jos $R = \infty$, $]{-R}, R[\,= \mathbb{R} = A$. Jos $0 < R < \infty$, on neljä mahdollisuutta: $A = \,]{-R}, R[$, $A = [-R, R[$, $A = \,]{-R}, R]$ tai $A = [-R, R]$

Suppenemissäde osataan usein laskea seuraavan lauseen avulla:

Lause 4.26. *Jos on olemassa raja-arvo* $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R$*, niin se on potenssisarjan* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *suppenemissäde.*

Todistus. Olkoon $a_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (raja-arvoehdon mielekkyyteen riittäisi olettaa, että näin on jostain n_0 alkaen) ja $R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \in [0,\infty]$.

Jos nyt $|x| < R$ (tapauksessa $R = 0$ näitä x ei ole) ja $x \neq 0$, niin saadaan

$$\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \frac{|x|}{\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|} \to \frac{|x|}{R} < 1, \text{ kun } x \to \infty,$$

joten lauseen 4.15 nojalla sarja $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ suppenee.

Jos taas $|x| > R$, nähdään saman lauseen 4.15 toisen osan avulla samaan tapaan laskien sarja $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ hajaantuvaksi. Abelin lauseen nojalla tästä seuraa, että R on sarjan $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ suppenemissäde. $\square$

Esimerkki 4.27. (i) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $a_n = \frac{1}{n!}$.

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{1}{n!} : \frac{1}{(n+1)!} = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1 \to \infty, \text{ kun } n \to \infty \;\Rightarrow\; R = \infty.$$

Siten potenssisarja $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ suppenee koko $\mathbb{R}$:ssä. (Itse asiassa sen summafunktio on e^x:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

koko $\mathbb{R}$:ssä!)

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $a_n = 2^n$.

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}, \text{ kun } n \to \infty \;\Rightarrow\; R = \frac{1}{2}.$$

Geometrisen sarjan teoriaa käyttäen saadaan täydellisempi tulos: Sarja $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n$ suppenee täsmälleen välillä $]-R, R[\;=\;]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ kohti summafunktiota $f(x) = \frac{1}{1-2x}$.

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$. Voisi laskea $R = 1$, mutta tämän näkee seuraavastikin:

Sijoitus $x = 1$ antaa sarjan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, joka suppenee (4.20 ii). Siten on oltava $R \geq 1$. Toisaalta sijoitus $x = -1$ antaa harmonisen sarjan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, joka hajaantuu. Siten $R \leq 1$. Siis $R \geq 1$ ja $R \leq 1$, joten $R = 1$. Siis suppenemisväli on $]-1, 1[$ ja suppenemisjoukko $]-1, 1]$.

(iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}(x-2)^n$. Tässä keskus $x_0 = 2$ ja $a_n = \frac{1}{n^2}$. Nyt

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{(n+1)^2}{n^2} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \to 1, \text{ kun } n \to \infty \;\Rightarrow\; R = 1.$$

Sarja suppenee myös suppenemisvälin $]1, 3[$ päätepisteissä, jopa itseisesti, sillä

$$x = 1 \text{ tai } x = 3 \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^2}(x-2)^n \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

joka on yliharmonisena sarjana suppeneva. Siis suppenemisjoukko on $[1, 3]$.

Potenssisarja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ määrittelee siis suppenemisjoukossaan summafunktion $S(x)$. Mainitsemme jo tässä seuraavan lauseen, vaikka derivointia ja integrointia ei vielä olekaan esitelty.

Lause 4.28. *Potenssisarjaa* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *saa suppenemisvälillä derivoida ja integroida termeittäin. Summafunktiolle* $S(x)$ *pätee*

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \forall x \in \,]-R, R[\text{ ja}$$

$$\int_0^x S(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \quad \forall x \in \,]-R, R[$$

Todistus. Sivuutetaan, vaatii taustatietoja derivoinnin ja integroinnin lisäksi ns. tasaisesta suppenemisesta. □

Esimerkki 4.29. Geometrisen sarjan teorian nojalla välillä $]-1, 1[$ on voimassa kehitelmä

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots\ .$$

Saadulla potenssisarjalla $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ on siis summafunktio $S(x) = \frac{1}{1+x}$ koko suppenemisjoukossaan $]-1,1[$. Termeittäin integroimalla saadaan $\ln(1+x)$:n "sarjakehitelmä":

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots,$$

joka siis on voimassa välillä $]-1,1[$. (Itse asiassa voi eri laskulla todistaa, että tämä kehitelmä pätee myös arvolla $x = 1$

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots\ .)$$

Koronkorko, diskonttaus, annuiteetti. Tarkastellaan lopuksi lyhyesti geometrisen sarjan perussovelluksia talousmatematiikassa. Koulukurssissa on jo opittu, että pääoma k kasvaa n korkojakson aikana $p\,\%$ korolla geometrisen jonon tavoin. Kasvanut pääoma K_n saadaan lausekkeella

$$K_n = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n k = kq^n, \tag{4.30}$$

missä $q = 1 + \frac{p}{100}$ on ns. *korkotekijä*.

Kasvaneen pääoman $K = K_n$ *nykyarvo* k saadaan samasta kaavasta *diskonttaamalla*:

$$k = \frac{K}{q^n} = K\nu^n, \tag{4.31}$$

missä $\nu = \frac{1}{q}$ on ns. *diskonttaustekijä*.

Tarkastellaan kysymystä, kuinka paljon henkilön on talletettava, jotta hän voi nostaa jokaisen seuraavan korkojakson alussa k euroa yhteensä n kertaa. Korkokannaksi oletetaan kiinteä $p\,\%$.

Talletettava summa A_n saadaan diskonttaamalla jokainen nosto, jolloin eri nostojen nykyarvojen summa antaa sopivan talletuksen:

$$A_n = k\nu + k\nu^2 + \ldots + k\nu^{n-1} + k\nu^n = k\nu\,\frac{1-\nu^n}{1-\nu} = a_{\overline{n}|p}k, \tag{4.32}$$

missä $\nu = \frac{1}{q} = \frac{1}{1+\frac{p}{100}}$ on diskonttaustekijä ja

$$a_{\overline{n}|p} = \nu\,\frac{1-\nu^n}{1-\nu} = \frac{q^n - 1}{q^n(q-1)}$$

on ns. *jälkeenpäin suoritettujen jaksollisten maksujen diskonttaustekijä*.

Esimerkki 4.33. Henkilö X on sijoittanut 10 000 euroa osakeyhtiöön Y. Hän arvioi vuotuisen osinkotuoton (verojen jälkeen) 400 euron suuruiseksi seuraavien 5 vuoden ajaksi. Mikä on X:n näkemyksellä sijoituksesta 5 vuodessa saatavien osinkojen nykyarvo, kun oletetaan, että sijoitus tehtiin juuri vuotuisen osingonmaksun jälkeen ja riskitön korkokanta on 2 % (verottomana).

Ratkaisu. Diskontataan vuotuiset osingot käyttäen kaavaa (4.32):

$$\begin{aligned} A_5 &= a_{\overline{5}|2} \cdot 400\,€ = \frac{1.02^5 - 1}{1.02^5(1.02-1)} \cdot 400\,€ \approx 4.7134595\ldots \cdot 400\,€ \\ &\approx \underline{\underline{1885\,€\ 38\text{ snt} \approx 1885\,€}} \end{aligned}$$

Annuiteettilainassa lainasumma maksetaan takaisin yhtä suurina *annuiteetteina* kunkin korkojakson lopussa, jolloin kukin annuiteetti sisältää korkoa ja kuoletusta. Olkoon K lainasumma, A annuiteetti, p korkokanta, $q = 1 + \frac{p}{100}$ korkokerroin ja $a_{\overline{n}|p} = \frac{q^n - 1}{q^n(q-1)}$. Jotta laina K kuoleentuisi n:ssä jaksossa lainan nostamishetkestä, täytyy annuiteettien nykyarvojen summan olla K. Kaavasta (4.32) saadaan siis yhtälö

$$K = a_{\overline{n}|p} A = \frac{q^n - 1}{q^n(q-1)} A, \tag{4.34}$$

josta

$$A = \frac{1}{a_{\overline{n}|p}} K = c_{\overline{n}|p} K = \frac{q^n(q-1)}{q^n - 1} K, \tag{4.35}$$

missä $c_{\overline{n}|p} = \frac{q^n(q-1)}{q^n - 1}$ on ns. *annuiteettitekijä.*

Esimerkki 4.36. Jos asuntovelkaa otetaan 200 000 € 20 vuodeksi kiinteällä 4 % korolla, vuotuiseksi annuiteetiksi saadaan

$$A = \frac{1.04^{20}(1.04-1)}{1.04^{20} - 1} \cdot 200\,000\,€ \approx \underline{\underline{14\,716\,€\ 35\text{ snt}}}.$$

5. Differentiaalilaskenta

Analyysin peruskäsitteiksi voidaan hyvällä syyllä luetella raja-arvo, jatkuvuus, derivaatta ja integraali. Derivaattaan liittyvää analyysin aluetta sanotaan myös differentiaalilaskennaksi. Tällä kurssilla ns. differentiaaleja esiintyy derivaatan avulla muodostettavassa differentiaalikehitelmässä. Derivaatta on erotusosamäärän raja-arvo.

Määritelmä 5.1. Olkoon f pisteen x_0 ympäristössä $]x_0 - r, x_0 + r[$ $(r > 0)$ määritelty reaaliarvoinen funktio ja olkoon $x = x_0 + h$, $0 < |h| < r$. Osamäärää

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

sanotaan f:n *erotusosamääräksi* pisteessä x_0 argumentin lisäyksellä h. Jos on olemassa erotusosamäärän raja-arvo

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R},$$

niin tätä raja-arvoa merkitään

$$f'(x_0) = (Df)(x_0) = \left[\frac{df}{dx}\right]_{x=x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

ja sanotaan *f:n derivaataksi pisteessä x_0*. Myös sanotaan, että f on *derivoituva* x_0:ssa.

Jos erotusosamäärällä on oikeanpuoleinen raja-arvo

$$f'(x_0+) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R},$$

f on *oikealta derivoituva* x_0:ssa ja $f'(x_0+)$ on *f:n oikeanpuoleinen derivaatta x_0:ssa.* Vastaavasti raja-arvo

$$f'(x_0-) = \lim_{h \to 0-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

on *f:n vasemmanpuoleinen derivaatta x_0:ssa.*

Jos $A \subset \mathbb{R}$ on väli tai avointen välien pistevieras yhdiste ja $f : A \to \mathbb{R}$ on derivoituva jokaisessa A:n pisteessä x_0 (tapauksessa, jossa A on väli ja x_0 on A:han kuuluva päätepiste tarkoitetaan toispuolista derivoituvuutta) sanomme, että *f on derivoituva joukossa A*. Tällöin funktio $Df = f' : \begin{array}{l} A \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f'(x) = Df(x) \end{array}$ on f:n *derivaattafunktio*. Yleisemmin derivaattafunktio on määritelty joukossa $\{x \mid \exists f'(x)\} \subset A$.

Lauseesta 3.6 saadaan heti seuraava lause

Lause 5.2. *Olkoon f pisteen x_0 ympäristössä määritelty reaalifunktio. Jos on olemassa $f'(x_0)$, niin on olemassa $f'(x_0+)$ ja $f'(x_0-)$ ja*

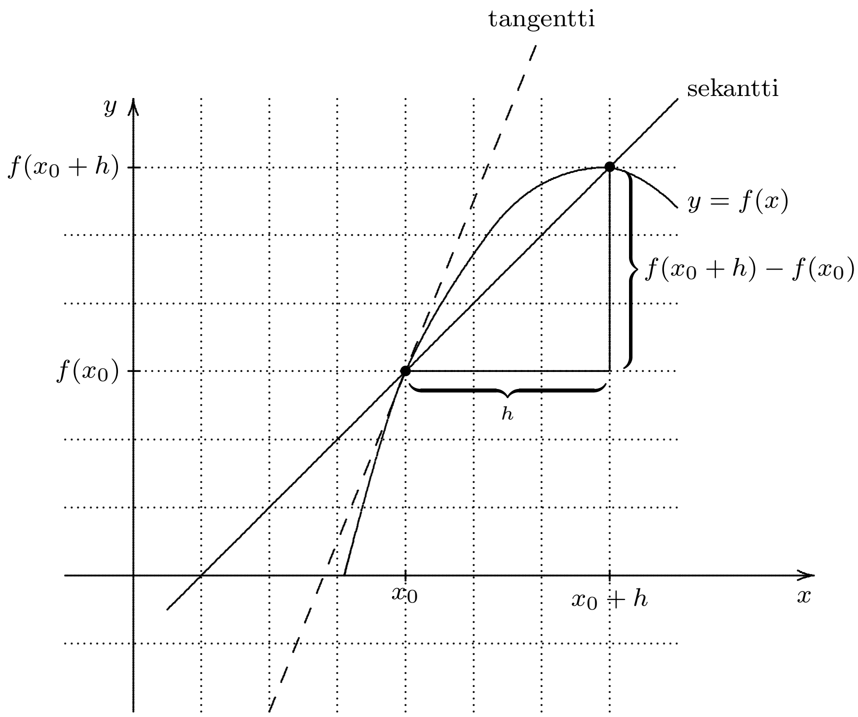
$$(*) \qquad f'(x_0) = f'(x_0+) = f'(x_0-)$$

Kääntäen: Jos on olemassa $f'(x_0+)$ ja $f'(x_0-)$ ja $f'(x_0+) = f'(x_0-)$ niin on olemassa $f'(x_0)$ ja $(*)$ pätee.

Huomautus 5.3. Erotusosamäärä on käyrän $y = f(x)$ pisteiden $\big(x_0, f(x_0)\big)$ ja $\big(x_0 + h, f(x_0 + h)\big)$ kautta kulkevan *sekanttisuoran* kulmakerroin. Sen raja-arvona derivaatta $f'(x_0)$ on pisteeseen $\big(x_0, f(x_0)\big)$ piirretyn käyrän $y = f(x)$ *tangenttisuoran*

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

kulmakerroin. Kuva valaisee näitä määritelmiä:



Kuvassa sekantti $y - y_0 = \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}(x - x_0)$ on piirretty yhtenäisellä viivalla ja tangentti $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ katkoviivalla. Kuvan tilanteessa voisi geometrisesti arvioida, että $2 < f'(x_0) < 3$. Tämä on kuitenkin liian epätarkkaa.

Esimerkki 5.4. i) Olkoot $k, b \in \mathbb{R}$ vakioita ja $f(x) = kx + b$. Tällöin

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{kx + b - kx_0 - b}{x - x_0} = k \to k, \text{ kun } x \to x_0,$$

joten f on derivoituva $\mathbb{R}$:ssä ja $f'(x_0) = k \ \forall x_0 \in \mathbb{R}$. Derivaattafunktio f' on siis vakiofunktio k. Käyrä $y = f(x)$ on suora ja se yhtyy mihin tahansa pisteeseensä $\big(x_0, f(x_0)\big)$ piirrettyyn tangenttiinsa sillä $f'(x_0) = k$ ja $f(x_0) = kx_0 + b$ ja

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \iff y - (kx_0 + b) = k(x - x_0) \iff y = kx + b.$$

ii) Funktio $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ on derivoituva jokaisessa $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, sillä tällöin f yhtyy x_0:n kokonaisessa ympäristössä derivoituvaan funktioon $kx + b$ (kohta i)), missä $k = 1$ tai $k = -1$ ja $b = 0$ ja on siten itsekin derivoituva x_0:ssa.

Sen sijaan $f(x) = |x|$ ei ole derivoituva 0:ssa lauseen 5.2 perusteella; nyt nimittäin

$$
\begin{aligned}
h > 0: \quad & \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{|h|}{h} = \frac{h}{h} = 1 \to 1, \text{ kun } h \to 0+ \\
h < 0: \quad & \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{|h|}{h} = \frac{-h}{h} = -1 \to -1, \text{ kun } h \to 0-,
\end{aligned}
$$

joten $f'(0+) = 1 \neq -1 = f'(0-)$. Itseisarvofunktion kuvaajalla on origossa "kärki" ja tangenttia ei ole.

Esimerkki 5.5. Olkoon $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ja $x_0 = 1$. Tällöin

$$
\begin{aligned}
\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{1}}{x - 1} = \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{(\sqrt[3]{x} - 1)\big((\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} + 1\big)} \\
&= \frac{1}{(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} + 1} \to \frac{1}{3}, \text{ kun } x \to 1,
\end{aligned}
$$

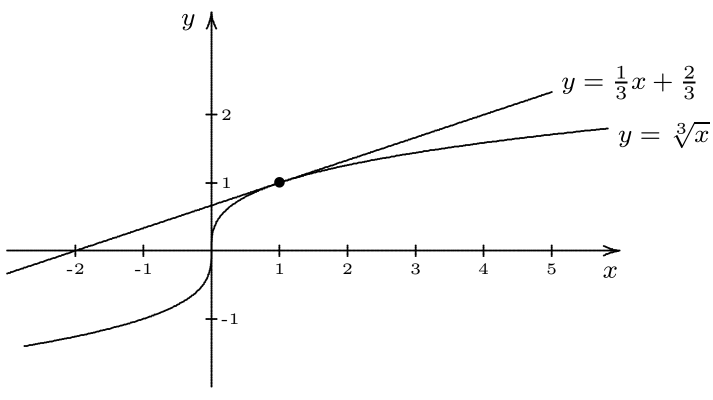
joten f on derivoituva ja

$$f'(1) = \big[D\sqrt[3]{x}\big]_{x=1} = \frac{1}{3}.$$

Käyrän $y = \sqrt[3]{x}$ pisteeseen $(1,1)$ piirretyn tangentin yhtälö on

$$y - 1 = \frac{1}{3}(x - 1) \;\Leftrightarrow\; y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}.$$

Kuva:



Yhden muuttujan funktiolla derivoituvuus on sama asia kuin ns. differentiaalikehitelmän olemassaolo:

Määritelmä 5.6. Pisteen x_0 ympäristössä määritelty reaalifunktio f on *differentioituva* x_0:ssa, jos sen muutoksella $f(x_0+h)-f(x_0)$ on ns. *differentiaalikehitelmä*: $\exists a \in \mathbb{R}$ s.e.

$$f(x_0+h)-f(x_0) = ah + h\epsilon(h), \tag{5.7}$$

missä funktiolla $\epsilon(h) = \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)-ah}{h}$ on ominaisuus $\lim_{h\to 0} \epsilon(h) = 0$.

Huomautus 5.8. Intuitiivisesti differentioituvuus tarkoittaa, että yksinkertainen lauseke ah antaa hyvän approksimaation f:n muutokselle siirryttäessä x_0:sta läheiseen pisteeseen $x_0 + h$ argumentin muutoksella h. Usein argumentin muutosta merkitään sovelluksissa dx:llä ja f:n muutosta df:llä. Näillä merkinnöillä differentiaaliapproksimaatio saa muodon $df \approx a\,dx$ ja tässä on vielä oltava $a = f'(x_0)$ seuraavan lauseen nojalla, joten $df \approx f'(x_0)dx$. Tämän approksimaation virhe $dx \cdot \epsilon(dx)$ on "pienellä dx" hyvin vähäinen, sillä myös $\epsilon(dx)$ on pieni dx:n lisäksi.

Lause 5.9. *Olkoon f pisteen x_0 ympäristössä määritelty reaalifunktio. Tällöin f on derivoituva x_0:ssa jos ja vain jos f on differentioituva x_0:ssa. Lisäksi differentiaalikehitelmä on välttämättä muotoa*

$$f(x_0+h)-f(x_0) = f'(x_0)h + h\epsilon(h).$$

Todistus. Olkoon ensin f differentioituva, ts. kehitelmä (5.7) pätee jollain $a \in \mathbb{R}$. Tällöin siis

$$\epsilon(h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - a \to 0, \text{ kun } h \to 0,$$

joten on olemassa $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = a$. Siis f on derivoituva x_0:ssa ja $f'(x_0) = a$.

Olkoon kääntäen $f'(x_0) = a \in \mathbb{R}$. Tällöin kehitelmästä (5.7) ratkaistu $\epsilon(h)$ toteuttaa

$$\epsilon(h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - a \to a - a = 0, \text{ kun } h \to 0,$$

joten f on differentioituva x_0:ssa. □

Derivoituva funktio on aina jatkuva

Lause 5.10. *Olkoon f derivoituva pisteessä x_0 (tai joukossa A, joka on väli tai avointen välien numeroituva yhdiste). Tällöin f on jatkuva x_0:ssa (tai A:ssa).*

Todistus. Riittää todistaa pistettä x_0 koskeva väite. Joukkoa A koskeva väite seuraa siitä "pisteittäin". Tapauksessa, jossa A on väli ja x_0 väliin kuuluva päätepiste tarvitaan tosin lauseen 5.9 "toispuolista soveltamista".

Olkoon siis f derivoituva x_0:ssa. Lauseen 5.9 nojalla f:llä on x_0:n ympäristössä differentiaalikehitelmä

$$f(x_0+h)-f(x_0)=f'(x_0)h+h\epsilon(h),$$

joten merkitsemällä taas $x=x_0+h$ saadaan

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+(x-x_0)\epsilon(x-x_0)\to f(x_0)+0+0=f(x_0),$$

kun $x\to x_0$. Näin ollen $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ ja f on jatkuva x_0:ssa. $\square$

Seuraava lause on ns. *ketjusääntö* yhdistettyjen funktioiden derivoimisesta:

Lause 5.11. *Jos f on differentioituva x_0:ssa ja g on differentioituva $f(x_0)$:ssa, $g\circ f$ on differentioituva x_0:ssa ja*

$$(g\circ f)'(x_0)=g'\big(f(x_0)\big)f'(x_0). \tag{K}$$

Todistus. Lauseen sanamuoto ei anna tarkasti f:n ja g:n määrittelyjoukkoja, mutta on helppo nähdä (HT), että lauseen mainitsemassa tilanteessa löytyy x_0- ja $f(x_0)$-keskiset välit I ja J s.e. yhdistetty kuvaus $g\circ f: I\to\mathbb{R}$ voidaan muodostaa seuraavan kuvauskaavion mukaisesti merkitsemällä f:llä ja g:llä niiden sopivia rajoittumafunktioita

$$I\xrightarrow{f} J\xrightarrow{g}\mathbb{R}.$$

Merkitään $y_0=f(x_0)\in J$. Koska g on differentioituva y_0:ssa, on

$$g(y)-g(y_0)=g'(y)(y-y_0)+\epsilon_1(y)(y-y_0),$$

missä $\epsilon_1(y)\to 0$, kun $y\to y_0$. Sovitaan vielä $\epsilon_1(y_0)=0$, jolloin ϵ_1 tulee jatkuvaksi y_0:ssa. Koska f on differentioituva x_0:ssa, on

$$f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)+\epsilon_2(x)(x-x_0),$$

missä $\epsilon_2(x)\to 0$, kun $x\to x_0$. Näin ollen

$$\underline{\underline{g\big(f(x)\big)-g\big(f(x_0)\big)}}=g'\big(f(x_0)\big)\big(f(x)-f(x_0)\big)+\epsilon_1\big(f(x)\big)\big(f(x)-f(x_0)\big)=$$

$$g'\big(f(x_0)\big)\big[f'(x_0)(x-x_0)+\epsilon_2(x)(x-x_0)\big]+\epsilon_1\big(f(x)\big)\big(f(x)-f(x_0)\big)=$$

$$g'\big(f(x_0)\big)f'(x_0)(x-x_0)+\big[g'\big(f(x_0)\big)\epsilon_2(x)+\epsilon_1\big(f(x)\big)\big(f'(x_0)+\epsilon_2(x)\big)\big](x-x_0)=$$

$$\underline{\underline{g'\big(f(x_0)\big)f'(x_0)(x-x_0)+\epsilon_3(x)(x-x_0)}},$$

missä $\epsilon_3(x)=g'\big(f(x_0)\big)\epsilon_2(x)+\epsilon_1\big(f(x)\big)\big(f'(x_0)+\epsilon_2(x)\big)\to 0$, kun $x\to x_0$, sillä $x\to x_0 \;\Rightarrow\; f(x)\to f(x_0)\;\Rightarrow\;\epsilon_1\big(f(x)\big)\to\epsilon_1\big(f(x_0)\big)=0$. Määritelmän 5.6 ja lauseen 5.9 nojalla $g\circ f$ on differentioituva pisteessä x_0 ja ketjusääntö (K) on voimassa. $\square$

Ketjusääntö on käytännön derivoinnissa keskeisessä roolissa. Ennen sovellusesimerkkejä tarvitsemme derivoimista koskevan laskulauseen:

Lause 5.12. *Olkoot f ja g derivoituvia x_0:ssa. Tällöin $f+g$ ja fg ovat derivoituvia x_0:ssa ja*

(i) $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

(ii) $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0)$.

Jos lisäksi $g(x_0) \neq 0$, niin osamäärä $\frac{f}{g}$ on derivoituva x_0:ssa ja

(iii) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{\big(g(x_0)\big)^2}$.

Todistus. Kaava (i) jätetään lukijalle harjoitustehtäväksi.

(ii)

$$\frac{(fg)(x_0+h) - fg(x_0)}{h} = \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h} =$$

$$\frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0+h) + f(x_0)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h} =$$

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}\, g(x_0+h) + f(x_0)\, \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \to$$

$$f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0), \text{ kun } h \to 0,$$

sillä g on myös jatkuva x_0:ssa, koska se on derivoituva x_0:ssa (lause 5.10).

(iii) Eräänä laskuharjoitustehtävänä on johtaa funktion $h(x) = \frac{1}{x}$ derivaatta $h'(x) = -\frac{1}{x^2}$ $(x \neq 0)$ suoraan erotusosamäärän avulla. Käytämme nyt tätä, tulon derivoimissääntöä ja ketjusääntöä osamäärän derivoimissäännön (iii) todistamiseen.

Osamäärä

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} = f(x) \cdot (h \circ g)(x), \text{ kun } h(y) = \frac{1}{y} \text{ ja } g(x) \neq 0.$$

Ketjusäännön 5.11 ja 5.12(ii):n nojalla saadaan, että

$$\left[D\frac{f(x)}{g(x)}\right]_{x=x_0} = f'(x_0)h\big(g(x_0)\big) + (h \circ g)'(x_0)f(x_0) =$$

$$\frac{f'(x_0)}{g(x_0)} - \frac{g'(x_0)}{\big(g(x_0)\big)^2} f(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{\big(g(x_0)\big)^2}. \quad \square$$

Kootaan nyt seuraavaan lauseeseen eräitä perusderivaattoja, jotka yllä on joko johdettu tai jotka seuraavat helposti määritelmistä ja yllä esitetystä teoriasta.

Lause 5.13. (i) *Vakiofunktion derivaatta on* 0.

(ii) *Identtisen kuvauksen* $f(x) = x$ *derivaatta* $f'(x_0) = 1$ (*jokaisessa määrittelyjoukon* $A \subset \mathbb{R}$ *sisäpisteessä* x_0).

(iii) $Dx^n = nx^{n-1}$, *kun* $n \in \mathbb{Z}$ *ja* $x \neq 0$ (*jos* $n \in \mathbb{N}_0$, *saa olla myös* $x = 0$).

(iv) $D\sqrt{x} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ (*eli* $Dx^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}$) $(x \neq 0)$.

(v) $D(af) = aDf$, *kun* $a \in \mathbb{R}$ *on vakio.*

(vi) *Polynomin* $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ *derivaatta on*

$$P'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + a_1.$$

(vii) *Rationaalifunktion* $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ (P *ja* Q *polynomeja,* $Q(x_0) \neq 0$) *derivaatta on*

$$f'(x_0) = \frac{P'(x_0)Q(x_0) - Q'(x_0)P(x_0)}{\big(Q(x_0)\big)^2}$$

Todistus. (i) ja (ii) on helppo johtaa suoraan, mutta ne ovat myös esimerkin 5.4 i) erikoistapauksia.

(iii) Tapauksessa $n \in \mathbb{N}$ joko induktiolla soveltaen kaavaa (ii) ja tulon derivoimissääntöä 5.12 (ii) tai myös suoraan binomikaavan avulla (harjoitustehtävä). Tapauksessa $n = 0$ kaava on vakion 1 derivoimissääntö. Jos $n < 0$, derivoidaan osamäärä $x^n = \dfrac{1}{x^{-n}}$, jossa $-n \in \mathbb{N}$.

(iv) Suoraan erotusosamäärän avulla (harjoitustehtävä).

(v) $D(af) = (Da) \cdot f + a \cdot Df = aDf$ $\big($5.12 (ii) ja kohta (i)$\big)$.

(vi) Sovelletaan summan derivoimissääntöä ja sääntöjä (iii) ja (v).

(vii) Sääntö (vi) ja osamäärän derivoimissääntö. $\square$

Esimerkki 5.14. Derivoi seuraavat funktiot

$$\text{a)} \quad f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2+\sqrt{3x}} \qquad \text{b)} \quad f(x) = \left(x^4 + x^2 + \frac{1}{x}\right)^3.$$

Ratkaisu.

(a)

$$f'(x) = \frac{\dfrac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}(x^2+\sqrt{3x}) - \left(2x + \dfrac{3}{2\sqrt{3x}}\right)\sqrt{x^2+1}}{(x^2+\sqrt{3x})^2}$$

$$= \frac{\dfrac{x^3+\sqrt{3}\,x\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+1}} - \dfrac{4x\sqrt{x}\sqrt{x^2+1}+\sqrt{3}\sqrt{x^2+1}}{2\sqrt{x}}}{(x^2+\sqrt{3x})^2}$$

$$= \frac{2x^3\sqrt{x} + 2\sqrt{3}\,x^2 - 4x\sqrt{x}(x^2+1) - \sqrt{3}(x^2+1)}{2\big(x^2+\sqrt{3x}\big)^2\sqrt{x}\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{-2x^3\sqrt{x} + \sqrt{3}x^2 - 4x\sqrt{x} - \sqrt{3}}{2\left(x^2+\sqrt{3x}\right)^2\sqrt{x^3+x}}, \text{ kun } x \in \,]0,\infty[\,.$$

(b) $$f'(x) = 3\left(x^4 + x^2 + \frac{1}{x}\right)^2\left(4x^3 + 2x - \frac{1}{x^2}\right), \text{ kun } x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

Laskuissa on sovellettu ketjusääntöä (useita kertoja) ja lauseiden 5.12 ja 5.13 derivoimissääntöjä.

Päästäksemme neliöjuurifunktioiden lisäksi derivoimaan muitakin juurifunktioita meidän on tutkittava käänteisfunktioiden derivoimista, sillä juurifunktiot ovat potenssifunktioiden käänteisfunktioita.

Lause 5.15. (*Käänteisfunktioiden derivoimissääntö*) *Olkoot $I, J \subset \mathbb{R}$ välejä ja $f : I \to J$ jatkuva bijektio. Jos f on derivoituva pisteessä $x_0 \in I$ ja $f'(x_0) \neq 0$, niin käänteiskuvaus $f^{-1} : J \to I$ on derivoituva pisteessä $y_0 = f(x_0) \in J$ ja*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \tag{$*$}$$

Todistus. Ketjusäännöstä seuraa heti, että jos f^{-1} on derivoituva y_0:ssa, kaavan $(*)$ täytyy olla voimassa. Yhdistetyllä kuvauksella

$$f^{-1}\circ f = \mathrm{id_I} : \begin{array}{ccccc} I & \xrightarrow{\quad f \quad} & J & \xrightarrow{\quad f^{-1} \quad} & I \\ x_0 & \longmapsto & y_0 & \longmapsto & x_0 \end{array}$$

on nimittäin derivaatta 1 (identtinen kuvaus!) ja toisaalta sen derivaatta x_0:ssa on ketjusäännön nojalla tulo $f'(x_0)\cdot(f^{-1})'(y_0)$, joten $(*)$ on ainoa mahdollinen lauseke $(f^{-1})'(y_0)$:lle.

Derivaatan $(f^{-1})'(y_0)$ olemassaolon todistamiseksi on kuitenkin tarkasteltava f^{-1}:n erotusosamäärää pisteessä y_0. Olkoon sitä varten $y \in J$, $y \neq y_0$. Merkitään $x = f^{-1}(y)$, jolloin $y = f(x)$. Koska $f : I \to J$ on bijektio niin myös $f^{-1} : J \to I$ on bijektio ja siis injektio, joten $x = f^{-1}(y) \neq f^{-1}(y_0) = x_0$. Tällöin

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{f^{-1}\big(f(x)\big) - f^{-1}\big(f(x_0)\big)}{f(x) - f(x_0)} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

Koska f on myös jatkuva, niin f^{-1} on jatkuva (lause 3.30) ja siten $x = f^{-1}(y) \to f^{-1}(y_0) = x_0$, kun $y \to y_0$. Täten

$$\lim_{y\to y_0}\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{1}{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}. \qquad \square$$

Lause 5.16. *Olkoon $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ ja $f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$. Tällöin $f'(x) = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$ pisteissä* $\begin{cases} x > 0, & n \text{ parillinen} \\ x \neq 0, & n \text{ pariton.} \end{cases}$

Todistus. Käänteisfunktion derivoimissäännön nojalla ehdoista $y = x^n$, $x = \sqrt[n]{y} \neq 0$ seuraa, että

$$D\sqrt[n]{y} = \frac{1}{Dx^n} = \frac{1}{nx^{n-1}} = \frac{1}{n}\frac{x}{x^n} = \frac{1}{n}\frac{\sqrt[n]{y}}{y} = \frac{1}{n}y^{\frac{1}{n}-1}. \quad \square$$

Seuraus 5.17. *Jos $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ ($m, n \in \mathbb{Z}$; $n > 0$), niin $Dx^r = rx^{r-1}$, kun $x > 0$.*

Todistus.

$$Dx^r = Dx^{\frac{m}{n}} = D\left(\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m\right) = m\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{m-1} \cdot Dx^{\frac{1}{n}} = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1} = rx^{r-1}$$

(ketjusääntö ja 5.16 ja 5.13 (iii)). $\square$

Esimerkki 5.18. Funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x + 1$ on aidosti kasvavana injektio. Lisäksi se on jatkuva ja $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ ja $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Jos $c \in \mathbb{R}$, on siis olemassa $m < 0$ ja $M > 0$ s.e. $f(m) < c$ ja $f(M) > c$. Suljetulla välillä $[m, M]$ jatkuvana f saa päätepistearvojensa välisen arvon c. Koska $c \in \mathbb{R}$ oli mielivaltainen, saa f siis jokaisen reaaliarvon ja on siten myös surjektio. Siis f on bijektio ja sillä on käänteiskuvaus $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Käänteiskuvauksen lausekkeen hakemiseksi jouduttaisiin ratkaisemaan 3. asteen yhtälö $x^3 + x + 1 = y$. Tätä emme osaa, mutta silti voimme laskea käänteiskuvauksen f^{-1} derivaatan pisteissä $f(x_0)$ (kun x_0 on annettu tai kun se keksitään) lauseen 5.15 avulla.

Koska $f(0) = 1$ ja $f(1) = 3$, saadaan esimerkiksi lasketuksi derivaatat

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{3 \cdot 0^2 + 1} = 1 \quad \text{ja} \quad (f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{3 \cdot 1^2 + 1} = \frac{1}{4}.$$

Korkeammat derivaatat. Olkoon $f : A \to \mathbb{R}$ reaalimuuttujan reaalifunktio ($A \subset \mathbb{R}$ väli tai avointen välien pistevieras yhdiste). Merkitään

$$A_1 = \{x \in A \mid \exists f'(x)\},$$

jolloin $f' : A_1 \to \mathbb{R}$ on f:n *derivaatta*(*funktio*) *eli f:n ensimmäinen derivaatta* (voidaan merkitä myös $f^{(1)} = f'$). Jos $x_0 \in A_1$ ja jos funktio f' on derivoituva x_0:ssa, niin

$$f''(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h}$$

on *f:n toinen derivaatta x_0:ssa* ja joukossa

$$A_2 = \{x \in A_1 \mid \exists f''(x)\} \subset A_1$$

määritelty funktio $f'' = f^{(2)} : A_2 \to \mathbb{R}$ on f:n *toinen derivaatta*. Samoin jatkaen saadaan joukot

$$A_{k+1} = \{x \in A_k \mid \exists f^{(k+1)}(x) = (f^{(k)})'(x)\}$$

ja derivaattafunktiot $f^{(k)} : A_k \to \mathbb{R}$. Yleisesti: $f^{(k)}$ on *f:n k:s derivaatta* (kiinteällä $k \in \mathbb{N}$). (Jos $A_k = \emptyset$ jollain k, $f^{(k)}$ ja sitä korkeammat derivaatat $f^{(m)}$ $(m > k)$ eivät enää ole missään määritellyt.)

Esimerkki 5.19. i) Jos $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$ on asteen n polynomi $(a_n \neq 0)$, niin $(n+1)$:s ja sitä korkeammat derivaatat ovat nollia:

$$k > n \;\Rightarrow\; f^{(k)}(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

ii) Olkoon $f(x) = x|x|$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases} \;\Rightarrow\; f'(x) = \begin{cases} 2x, & x > 0 \\ -2x, & x < 0 \end{cases} \;\Rightarrow\; f''(x) = \begin{cases} 2, & x > 0 \\ -2, & x < 0 \end{cases}$$

ja $k > 2 \;\Rightarrow\; f^{(k)}(x) = 0$ aina kun $x \neq 0$. Perustelu: pisteen $x \neq 0$ ympäristössä f yhtyy joko polynomiin x^2 tai $-x^2$.

Sen sijaan origon ympäristössä f ei yhdy mihinkään tunnetusti derivoituvaan funktioon, joten origoderivaatat on tutkittava erikseen:

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{h|h|}{h} = |h| \to 0, \text{ kun } h \to 0 \text{ joten } \; \exists f'(0) = 0.$$

Edelleen

$$\frac{f'(0+h) - f'(0)}{h} = \begin{cases} \dfrac{2h}{h} = 2 \underset{h\to 0+}{\longrightarrow} 2, & \text{kun } h > 0 \\ -\dfrac{2h}{h} = -2 \underset{h\to 0-}{\longrightarrow} -2, & \text{kun } h < 0, \end{cases}$$

joten erotusosamäärällä $\dfrac{f'(0+h) - f'(0)}{h}$ ei ole raja-arvoa, kun $h \to 0$. Siis $\nexists f''(0)$ ja siten $\nexists f^{(k)}(0)$ $(k \geq 2)$.

Yhteenveto:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & x \geq 0 \\ -2x, & x < 0 \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} 2, & x > 0 \\ -2, & x < 0 \\ \text{ei olemassa}, & x = 0 \end{cases}$$

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \text{ei olemassa}, & x = 0, \; (k > 2). \end{cases}$$

iii) Olkoon $f(x) = \frac{1}{x}$. Jos $x \neq 0$, niin

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{x^3}, \quad f'''(x) = -\frac{6}{x^4}, \dots .$$

Induktiolla voidaan todistaa, että

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Määritelmä 5.20. Olkoon $A \subset \mathbb{R}$ väli tai avointen välien erillinen yhdiste. Merkitään

$$C^0(A) = \{f \mid f : A \to \mathbb{R} \text{ on jatkuva}\}.$$

Funktio $f \in C^0(A)$ on *jatkuvasti derivoituva*, jos se on derivoituva A:ssa ja derivaatta $f' : A \to \mathbb{R}$ on jatkuva A:ssa. Merkitään

$$\begin{aligned} C^1(A) &= \{f \mid f : A \to \mathbb{R} \text{ on jatkuvasti derivoituva}\} \\ &= \{f \in C^0(A) \mid f' \in C^0(A)\} \\ C^2(A) &= \{f \in C^1(A) \mid f' \in C^1(A)\} \\ C^3(A) &= \{f \in C^2(A) \mid f' \in C^2(A)\} \end{aligned}$$

Yleisesti

$$C^{k+1}(A) = \{f \in C^k(A) \mid f' \in C^k(A)\}, \; (k \in \mathbb{N}_0),$$

on *A:ssa $k+1$ kertaa jatkuvasti derivoituvien funktioiden joukko*. Selvästi

$$C^0(A) \supset C^1(A) \supset C^2(A) \supset \ldots \supset C^k(A) \supset \ldots$$

ja joukko

$$\begin{aligned} C^\infty(A) &= \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(A) \\ &= \{f : A \to \mathbb{R} \mid f\text{:llä on kaikkien kertalukujen derivaatat } A\text{:ssa}\} \end{aligned}$$

on jokaisen $C^k(A)$:n osajoukko.

Esimerkki. i) $f(x) = \frac{1}{x} \;\Rightarrow\; f \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ esimerkin 5.19 (iii) nojalla.
ii) $f(x) = x|x| \;\Rightarrow\; f \in C^1(\mathbb{R}) \setminus C^2(\mathbb{R})$ (5.19 (ii)).

Lauseen 4.26 nojalla potenssisarjaa

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots$$

saa suppenemisvälillä $]x_0 - R, x_0 + R[$ derivoida termeittäin. Soveltamalla tätä toistuvasti nähdään, että summafunktio $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ toteuttaa $S(x) \in C^\infty(]x_0 - R, x_0 + R[)$, jos suppenemissäde $R > 0$. Potenssisarjojen summafunktiot ovat ns. *analyyttisiä funktioita*.

Esimerkki. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots$ $(-1 < x \leq 1)$ on analyyttinen funktio esimerkin 4.29 nojalla.

Seuraava ns. *yksikäsitteisyyslause* osoittaa, että on enintään yksi tapa esittää funktio f x_0:n ympäristössä x_0-keskisen potenssisarjan summafunktiona:

Lause 5.21. *(Yksikäsitteisyyslause) Jos $R > 0$ ja $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ $\forall x \in]x_0 - R, x_0 + R[$, niin*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Todistus. Derivoimalla termeittäin saadaan

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$$

ja sijoittamalla tähän $x = x_0$ saadaan

$$f'(x_0) = a_1 = \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}.$$

Toinen termeittäin derivointi antaa

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x - x_0)^{n-2}$$

ja sijoitus $x = x_0$ antaa kaavan

$$f''(x_0) = 2a_2, \text{ josta } a_2 = \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}.$$

Kolmas termeittäin derivointi ja sijoitus $x = x_0$ antaa kaavan

$$f'''(x_0) = 6a_3, \text{ josta } a_3 = \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}.$$

Jatkamalla samoin saadaan väite. $\square$

Yksikäsitteisyyslauseen avulla voi joskus laskea korkeita derivaattoja.

Esimerkki 5.22. Laske $f^{(10)}(0)$, kun $f(x) = x \ln(1+x)$.

Ratkaisu. Koska $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots$ kun $-1 < x \leq 1$ (esimerkki 4.29), on

$$\begin{aligned} f(x) &= x \ln(1+x) \\ &= x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} - \frac{x^5}{4} + \frac{x^6}{5} - \frac{x^7}{6} + \frac{x^8}{7} - \frac{x^9}{8} + \frac{x^{10}}{9} - \ldots \quad \forall x \in]-1, 1] \end{aligned}$$

lauseen 4.10 nojalla (sovelletaan sitä kullakin $x \in]-1,1]$ erikseen). Toisaalta yksikäsitteisyyslauseen nojalla termin x^{10} kerroin tässä f:n potenssisarjaesityksessä on välttämättä $\dfrac{f^{(10)}(0)}{10!}$, joten on oltava $\frac{1}{9} = \dfrac{f^{(10)}(0)}{10!}$, josta saadaan $\underline{\underline{f^{(10)}(0) = \frac{10!}{9}}}$.

Potenssisarjaa $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ (sopimus: $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$) sanotaan f:n *Taylorin sarjaksi* x_0:ssa. Jos $x_0 = 0$ käytetään myös nimitystä *Maclaurinin sarja*. Taylorin sarjan osasummat $P_n(x;x_0) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ $(n \in \mathbb{N})$ ovat f:n *Taylorin polynomit* x_0:ssa. $P_n(x;x_0)$ on se asteen $\leq n$ polynomi, jolla on x_0:ssa sama arvo ja samat n alinta derivaattaa kuin f:llä.

Yksikäsitteisyyslauseen nojalla x_0-keskinen Taylorin sarja on ainoa mahdollisuus x_0:n ympäristössä määritellyn funktion esittämiseen x_0-keskisen potenssisarjan summafunktiona. Tämä ei aina onnistu vaikka f olisi C^∞-funktio! $\big[$Eräs C^∞-funktio, joka ei ole analyyttinen (eli ei ole potenssisarjan summafunktio) on

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0. \end{cases}$$

Myöhemmin esitettävien tietojen avulla voi näet todistaa (joskaan ei ihan helposti), että

$$\exists f^{(k)}(0) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Siten f:n Maclaurinin sarja on nollasarja eikä esitä f:ää missään origon ympäristössä, koska f ei ole nollafunktio.$\big]$

6. Derivaatan sovelluksia

Olkoon $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ A:n sisäpiste (ts. $\exists \epsilon > 0$ s.e. $]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[\ \subset A$) ja $f : A \to \mathbb{R}$ funktio.

Määritelmä 6.1. (i) Piste x_0 on f:n *lokaali minimikohta* ja arvo $f(x_0)$ f:n *lokaali minimi*, jos on olemassa $\epsilon > 0$ s.e.

$$f(x_0) = \min\left(f\left(]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[\right)\right),$$

ts. jos $f(x_0)$ on pienin f:n jossain x_0:n ympäristössä $]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[\ \subset A$ saamista arvoista.

(ii) Piste x_0 on f:n *lokaali maksimikohta* ja arvo $f(x_0)$ f:n *lokaali maksimi*, jos on olemassa $\epsilon > 0$ s.e.

$$f(x_0) = \max\left(f\left(]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[\right)\right),$$

ts. jos $f(x_0)$ on suurin f:n jossain x_0:n ympäristössä $]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[\ \subset A$ saamista arvoista.

(iii) Piste x_0 on f:n (*lokaali*) *ääriarvokohta* ja arvo $f(x_0)$ f:n (*lokaali*) *ääriarvo*, jos $f(x_0)$ on f:n lokaali maksimi tai minimi

(iv) Lokaali ääriarvo $f(x_0)$ on *oleellinen* (tai *aito*), jos $\exists \epsilon > 0$ s.e. $f(x) \neq f(x_0)$, kun $0 < |x - x_0| < \epsilon$. Tarkemmin eriteltynä:

$f(x_0)$ on *oleellinen lokaali minimi* $\Leftrightarrow$ $\exists \epsilon > 0$ s.e. $f(x) > f(x_0)$ $\forall x \in U'_\epsilon(x_0)$ ja

$f(x_0)$ on *oleellinen lokaali maksimi* $\Leftrightarrow$ $\exists \epsilon > 0$ s.e. $f(x) < f(x_0)$ $\forall x \in U'_\epsilon(x_0)$.

Huomautus 6.2. Määritelmän 6.1 nojalla lokaaleja ääriarvokohtia voivat olla vain f:n määrittelyjoukon A sisäpisteet. Näin ollen f:n mahdollinen *globaali ääriarvo*

$$M = \max f(A) \qquad \text{tai} \qquad m = \min f(A)$$

ei aina ole lokaali ääriarvo! Esimerkiksi funktiolla $\mathrm{id}_{[0,1]} : [0,1] \to [0,1]$, $f(x) = x$, ei ole lokaaleja ääriarvoja (yleisemmin millään aidosti monotonisella funktiolla ei näitä ole), vaikka

$$1 = \max f([0,1]) \qquad \text{ja} \qquad 0 = \min f([0,1])$$

ovat sen globaalit ääriarvot. Jos globaali ääriarvo saadaan A:n sisäpisteessä x_0, se on lokaali ääriarvokohta.

Derivoituvalla funktiolla vain derivaatan nollakohdat voivat olla lokaaleja ääriarvokohtia.

Lause 6.3. *Jos $f : A \to \mathbb{R}$ on derivoituva lokaalissa ääriarvokohdassa $x_0 \in A$, niin $f'(x_0) = 0$.*

Todistus. Seuraavasta lauseesta nähdään, että jos $f'(x_0) > 0$ tai $f'(x_0) < 0$, niin x_0 ei ole lokaali ääriarvokohta. $\square$

Lause 6.4. *Olkoon x_0 funktion $f : A \to \mathbb{R}$ määrittelyjoukon sisäpiste Tällöin*
(i) *jos $f'(x_0) > 0$, niin $\exists \delta > 0$ s.e.*

$$x_0 - \delta < x < x_0 \;\Rightarrow\; f(x) < f(x_0) \quad \text{ja} \quad x_0 < x < x_0 + \delta \;\Rightarrow\; f(x_0) < f(x)$$

(ii) *jos $f'(x_0) < 0$, niin $\exists \delta > 0$ s.e.*

$$x_0 - \delta < x < x_0 \;\Rightarrow\; f(x) > f(x_0) \quad \text{ja} \quad x_0 < x < x_0 + \delta \;\Rightarrow\; f(x_0) > f(x)$$

Todistus. Riittää todistaa väite (i), johon väite (ii) voidaan palauttaa korvaamalla f $(-f)$:llä. Olkoon siis

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$$

Lauseen 3.19 nojalla $\exists \delta > 0$ s.e.

$$x \in U'_\delta(x_0) \;\Rightarrow\; \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0.$$

Osamäärän merkkisäännöstä ja nimittäjän merkistä saadaan tämän nojalla osoittajan merkki erikseen x_0:sta vasemalle ja oikealle:
$x_0 - \delta < x < x_0 \;\Rightarrow\; f(x) - f(x_0) < 0 \;\Rightarrow\; f(x) < f(x_0)$ ja
$x_0 < x < x_0 + \delta \;\Rightarrow\; f(x) - f(x_0) > 0 \;\Rightarrow\; f(x) > f(x_0)$. $\square$

Huomautus 6.5. Lause 6.4 (i) ei väitä, että f olisi kasvava x_0:n ympäristössä. Jos f ei ole x_0:ssa jatkuvasti derivoituva, sen ei itse asiassa tarvitse olla kasvava missään x_0:n ympäristössä lauseen 6.4 (i) tilanteessa.

Derivoituvalle funktiolle ehto $f'(x_0) = 0$ on siis välttämätön ehto sille, että x_0 on lokaali ääriarvokohta. Tämä ehto ei kuitenkaan ole riittävä.

Esimerkki. $f(x) = x|x|$ on derivoituva origossa ja $f'(0) = 0$ esimerkin 5.19 ii) nojalla. Silti arvo $f(0) = 0$ ei ole f:n lokaali ääriarvo, sillä origon jokaisessa ympäristössä funktio f saa sekä arvoa 0 suurempia että sitä pienempiä arvoja, koska

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x > 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} f(x) > 0, & x > 0 \\ f(x) < 0, & x < 0. \end{cases}$$

Väliarvolause. Differentiaalilaskennan sovellusten kannalta eräs keskeinen tulos on ns. väliarvolause (lyh. VAL), jonka käsittelyn nyt aloitamme todistamalla ensin sen erikoistapauksen.

Lause 6.6. (*Rollen lause*) *Olkoon* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *jatkuva funktio, joka on derivoituva avoimella välillä* $]a, b[$. *Jos* $f(a) = f(b)$, *niin välillä* $]a, b[$ *on piste* ξ *s.e.* $f'(\xi) = 0$.

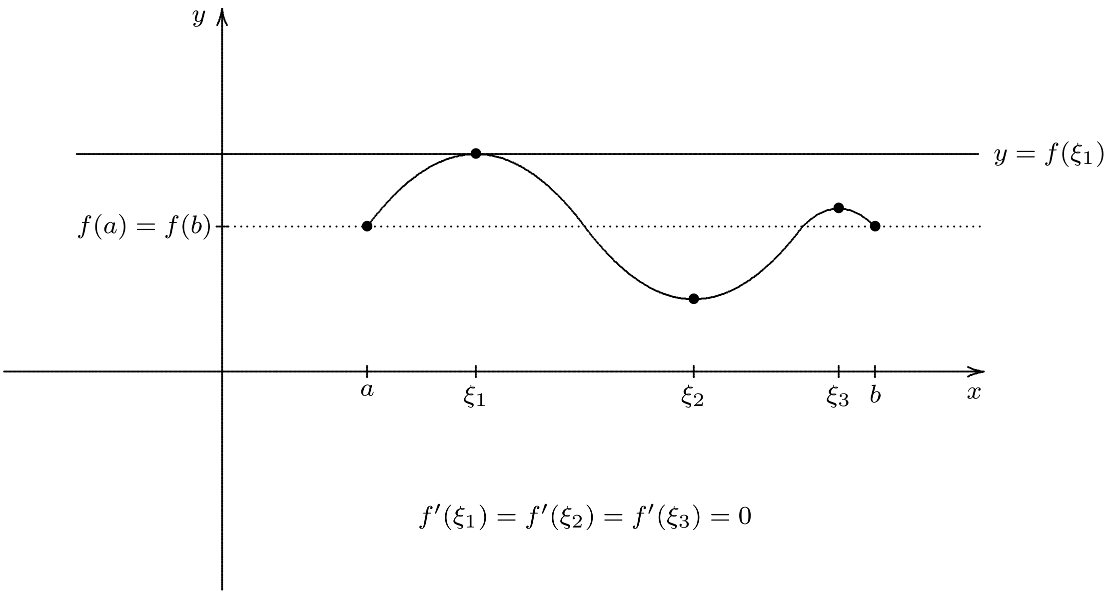
Todistus. Jos f on vakiofunktio, ξ:ksi kelpaa mikä tahansa $\xi \in \,]a, b[$, sillä tällöin $f'(x) = 0\ \forall x \in [a, b]$ (5.13 (i)).

Jos f ei ole vakio, ainakin toinen arvoista

$$M = \max f([a, b]), \qquad m = \min f([a, b])$$

(nämä ovat olemassa lauseen 3.27 nojalla, koska f on jatkuva välillä $[a, b]$) saadaan välin $[a, b]$ jossain sisäpisteessä $\xi \in \,]a, b[$ koska $f(a) = f(b)$ ja $m \neq M$. Tällöin ξ on f:n lokaali ääriarvokohta, joten $f'(\xi) = 0$ lauseen 6.3 nojalla. $\square$

Rollen lauseen oletuksilla käyrällä $y = f(x)$ on siis ainakin yksi vaakasuora tangentti $y = f(\xi)$, $a < \xi < b$. Havainnollistetaan asia kuvalla:



Rollen lausetta voi joskus käyttää yhtälön $f(x) = 0$ juurten lukumäärän tutkimiseen. Jos näet f:llä on k nollakohtaa, täytyy f':lla olla nollakohta $k-1$:llä erillisellä (avoimella) välillä.

Esimerkki 6.7. Kuinka monta reaalijuurta on yhtälöllä

$$(*) \qquad 3x^5 - 5x^3 = -1?$$

Ratkaisu. Merkitään $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 1$, jolloin $(*) \Leftrightarrow f(x) = 0$. Nyt $f'(x) = 15x^4 - 15x^2\ \forall x \in \mathbb{R}$, joten

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 15x^2(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ tai } x = 1 \text{ tai } x = -1.$$

Derivaatalla on siis tasan kolme nollakohtaa $\mathbb{R}$:ssä, joten f:llä on Rollen lauseen nojalla enintään neljä nollakohtaa $\mathbb{R}$:ssä. Jos f:llä olisi neljä nollakohtaa $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, olisi osamäärä $\dfrac{f(x)}{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}$ 1. asteen polynomi, josta saataisiin f:lle nollakohta $x_5 \in \mathbb{R}$. Jos olisi $x_5 \in \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, olisi f:llä tekijä $(x-x_5)^2$ ja siten f':lla nollakohta x_5. Tällöin $f(x_5) = f'(x_5) = 0$. Koska $f(0) \neq 0$, $f(1) \neq 0$ ja $f(-1) \neq 0$ näin ei voi olla. Siis x_5 olisikin f:n viides nollakohta, mikä on ristiriidassa sen kanssa, että nollakohtia on enintään neljä. Voimme siis päätellä, että nollakohtia on enintään kolme.

Toisaalta $f(-2) < 0$, $f(0) > 0$, $f(1) < 0$ ja $f(2) > 0$, joten Bolzanon lauseesta seuraa, että jatkuvalla funktiolla f on nollakohdat $x_1 \in \,]-2, 0[$, $x_2 \in \,]0, 1[$ ja $x_3 \in \,]1, 2[$. Yhtälöllä $(*)$ on siis *tasan kolme* reaalijuurta.

Huomautus. Päätely "enintään kolme" sujuisi helpommin, jos derivaatan merkin yhteys monotonisuuteen olisi jo käytettävissä!

Väliarvolause on Rollen lauseen yleistys. Sen mukaan derivoituvalla funktiolla $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ainakin yksi käyrän $y = f(x)$ tangenttisuorista

$$y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi) \quad (a < \xi < b)$$

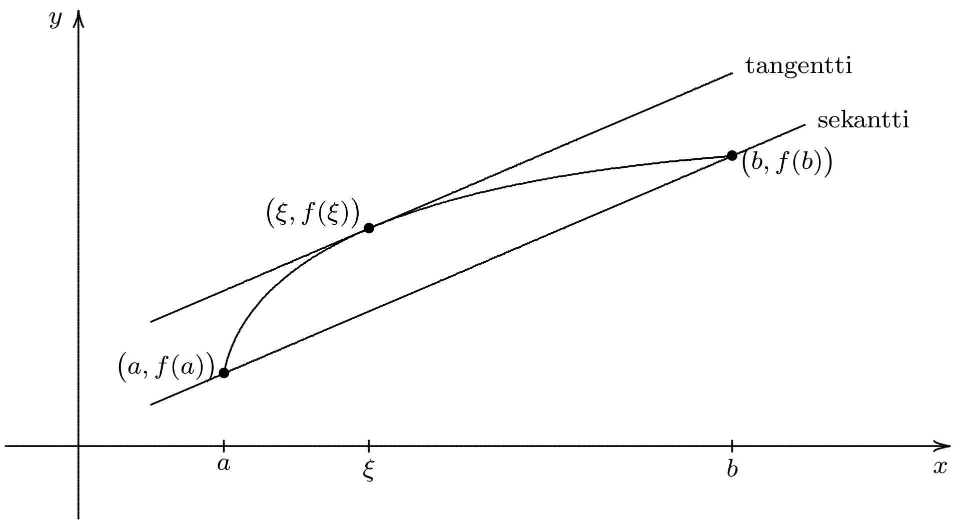
on pisteitä $\big(a, f(a)\big)$ ja $\big(b, f(b)\big)$ yhdistävän sekantin

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

suuntainen, ts.

$$\boxed{f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}}$$

Kuva:



Lause 6.8. (*Väliarvolause*) *Olkoon* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *jatkuva funktio, joka on derivoituva välillä* $]a, b[$. *Tällöin on olemassa piste* $\xi \in\,]a, b[$ *s.e.*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

Todistus. Muodostetaan apufunktio

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

ja sovelletaan siihen Rollen lausetta. Selvästi Rollen lauseen oletukset ovat voimassa funktiolle g, sillä $g(b) = g(a) = 0$. On siis olemassa piste $\xi \in\,]a, b[$ s.e.

$$g'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

mistä väite seuraa välittömästi. □

Huomautus 6.9. Väliarvolauseen tulos pätee, vaikka etukäteen ei tiedettäisi, kumpi välin päätepisteistä on se suurempi! Myös tapauksessa $b < a$ on olemassa $\xi \in\,]a, b[$ s.e.

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

Tämä nähdään kertomalla väliarvolauseen antama yhtälö $f(a) - f(b) = f'(\xi)(a - b)$ luvulla-1.

Väliarvolausetta voi käyttää virhearvioihin: sen nojalla näet

$$|f(x_0 + h) - f(x_0)| = |f'(\xi) \cdot h| \leq M|h|,$$

jos tiedetään, että x_0:n ja $x_0 + h$:n välillä pätee arvio $|f'(x)| \leq M$.

Esimerkki 6.10. Olkoon $f(x) = x^3 + \frac{1}{x}$. Arvioi virhettä, joka tehdään korvaamalla $f(3.01)$ luvulla $f(3) = 27\frac{1}{3} \approx 27.333$.

Ratkaisu. Nyt $f'(x) = 3x^2 - \dfrac{1}{x^2}$, kun $x > 0$. Välillä $3 \leq x \leq 3.01$ saadaan arvio

$$|f'(x)| = |3x^2 - \frac{1}{x^2}| \overset{\Delta\text{-ey}}{\leq} 3x^2 + \frac{1}{x^2} \leq 3 \cdot 3.01^2 + \frac{1}{9} \approx 27.291 < 27.3.$$

Virheen itseisarvolle saadaan nyt arvio

$$|f(3.01) - f(3)| < 27.3 \cdot 0.01 = \underline{\underline{0.273}}$$

Laskimella $f(3.01) - f(3) \approx 0.26979$, joten tässä tapauksessa väliarvolauseen antama varma virhearvio oli lähellä parasta mahdollista.

Väliarvolauseen seurauksia.

Lause 6.11. (*Derivoituvuustesti*) *Olkoon f jatkuva pisteessä $x_0 \in \mathbb{R}$ ja derivoituva x_0:n punkteeratussa ympäristössä $U'_\delta(x_0) =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}$. Jos on olemassa raja-arvo $\lim_{x \to x_0} f'(x) = a \in \mathbb{R}$, niin f on derivoituva myös x_0:ssa ja $f'(x_0) = a$.*

Todistus. Olkoon $x \in U'_\delta(x_0)$. Väliarvolauseen nojalla x_0:n ja x:n välissä on piste $\xi(x)$ s.e.

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'\big(\xi(x)\big)$$

Lauseen 3.8 nojalla yhdistetylle funktiolle $g(x) = (f' \circ \xi)(x) = f'\big(\xi(x)\big)$ pätee nyt, että

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} f'\big(\xi(x)\big) = a,$$

sillä $\lim_{x \to x_0} \xi(x) = x_0$ ja $\xi(x) \neq x_0 \ \forall x \in U'_\delta(x_0)$ ja $\lim_{y \to x_0} f'(y) = a$. $\square$

Huomautus 6.12. Lauseen 6.11 tulos pätee samanlaisella todistuksella myös toispuolisille derivaatoille. Tästä taas seuraa, että jos jatkuvuuspisteessä x_0

$$\lim_{x \to x_0+} f'(x) \neq \lim_{x \to x_0-} f'(x),$$

niin f ei ole derivoituva x_0:ssa (sillä $f'(x_0+) \neq f'(x_0-)$).

Esimerkki 6.13. Suoraan erotusosamäärää (siis derivaatan määritelmää) käyttäen voidaan osoittaa, että funktio

$$f(x) = \begin{cases} x - 3, & x > 1 \\ 3x^2 - 5x, & x \leq 1 \end{cases}$$

on derivoituva pisteessä $x_0 = 1$ ja $f'(1) = 1$ (HT). Saman tuloksen saa nyt myös derivoituvuustestillä:

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & x > 1 \\ 6x - 5, & x < 1 \end{cases}$$

joten

$$\lim_{x \to 1-} f'(x) = 6 \cdot 1 - 5 = 1 = \lim_{x \to 1+} f'(x).$$

Koska lisäksi f on jatkuva 1:ssä $\big(\lim_{x \to 1+} f(x) = -2 = \lim_{x \to 1-} f(x)\big)$, f on derivoituva 1:ssä ja $f'(1) = 1$.

Lause 6.14. (*Integraalilaskennan peruslause*) Jos $f : I \to \mathbb{R}$ on välillä $I \subset \mathbb{R}$ derivoituva funktio ja jos $f'(x) = 0 \ \forall x \in I$, niin f on vakiofunktio.

Todistus. Valitaan mielivaltainen $x_0 \in I$ ja osoitetaan, että $f(x) = f(x_0) \ \forall x \in I$. Olkoon siis $x \in I$, $x \neq x_0$. Sovelletaan väliarvolausetta I:n osavälillä x_0:sta x:ään. Siis x_0:n ja x:n välillä on olemassa ξ s.e.

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0) = 0 \cdot (x - x_0) = 0.$$

Siten $f(x) = f(x_0)$. $\square$

Huomautus. Lauseessa 6.14 ei mahdollisissa I:hin kuuluvissa I:n päätepisteissä tarvittaisi kuin f:n jatkuvuus.

Korollaari 6.15. *Jos kahdella funktiolla $F : I \to \mathbb{R}$ ja $G : I \to \mathbb{R}$ on sama derivaattafunktio, $F' = G' : I \to \mathbb{R}$, niin on olemassa vakio $C \in \mathbb{R}$ s.e. $F(x) = G(x) + C$ $\forall x \in I$.*

Todistus. Lauseen 6.14 nojalla erotusfunktio $F - G$ on vakio C, sillä $(F-G)'(x) = F'(x) - G'(x) = 0$ $\forall x \in I$. $\square$

Yksi keskeisimmistä derivaatan sovelluksista on sen käyttö funktioiden monotonisuuden tutkimiseen määrittelyjoukkoon sisältyvillä väleillä.

Lause 6.16. *Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ väli ja $f : I \to \mathbb{R}$ kuvaus.*

(i) *Jos $f'(x) \geq 0$ $\forall x \in I$, niin f on kasvava I:ssä.*

(ii) *Jos $f'(x) \leq 0$ $\forall x \in I$, niin f on vähenevä I:ssä.*

(iii) *Jos $f'(x) \geq 0$ $\forall x \in I$ ja jos f' ei ole vakiofunktio 0 millään (ei-surkastuneella) osavälillä $J \subset I$, niin f on aidosti kasvava I:ssä.*

(iv) *Jos $f'(x) \leq 0$ $\forall x \in I$ ja jos f' ei ole vakiofunktio 0 millään (ei-surkastuneella) osavälillä $J \subset I$, niin f on aidosti vähenevä I:ssä.*

Todistus. Malliksi (i) ja (iii). Ehdot (ii) ja (iv) voi joko todistaa samoin tai palauttaa ehtoihin (i) ja (iii) korvaamalla f:n $-f$:llä.

(i) Olkoon $f'(x) \geq 0$ $\forall x \in I$ ja olkoot $x, y \in I$, $x < y$. Sovelletaan väliarvolausetta välillä $[x, y]$:

$$f(y) - f(x) = f'(\xi)(y - x) \geq 0(y - x) \geq 0,$$

joten $f(y) \geq f(x)$. Siis f on kasvava I:ssä.

(iii) Olkoon $f'(x) \geq 0$ $\forall x \in I$ ja f' ei ole vakio 0 millään I:n aidolla osavälillä. Ehdon (i) nojalla f on kasvava. Jos f ei olisi aidosti kasvava, olisi siis olemassa $x, y \in I$ s.e. $x < y$ ja $f(x) = f(y)$. Mutta tällöin kasvava f olisi vakio välillä $[x, y]$, sillä

$$x < z < y \;\Rightarrow\; f(x) \leq f(z) \leq f(y) = f(x) \;\Rightarrow\; f(x) = f(z) = f(y).$$

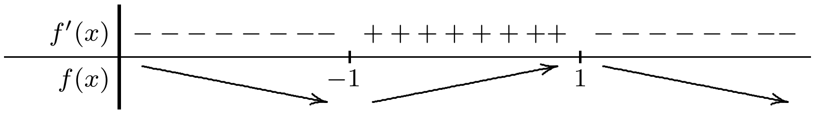
Vakiofunktion derivaatta on 0, joten saataisiin, että f:n derivaatta olisi vakio 0 välillä $[x, y] \subset I$ vastoin oletusta. $\square$

Esimerkki 6.17. Millä väleillä funktio $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ on aidosti monotoninen?

Ratkaisu.

$$f'(x) = \frac{(x^2+1)\cdot 1 - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2+1)^2},$$

joten $f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 1 - x^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 1$ tai $x = -1$. Koska $f'(x)$:n lausekkeessa nimittäjä $(x^2+1)^2 > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, niin osoittaja $1 - x^2$ määrää derivaatan f' merkin. Nyt $1 - x^2 > 0$ välillä $]-1, 1[$ ja $1 - x^2 < 0$ väleillä $]-\infty, -1[$ ja $]1, \infty[$, joten f':n *merkkikaavio* on



Näin ollen f on aidosti vähenevä väleillä $]-\infty, -1]$ ja $[1, \infty[$ ja aidosti kasvava välillä $[-1, 1]$. (Kaaviosta nähdään myös heti, että $f(-1) = -\frac{1}{2}$ ja $f(1) = \frac{1}{2}$ ovat f:n lokaali minimi ja lokaali maksimi. Pienellä lisäpäättelyllä nähdään myöhemmin, että $f(-1) = -\frac{1}{2} = \min f(\mathbb{R})$ ja $f(1) = \frac{1}{2} = \max f(\mathbb{R})$.)

Huomautus. On muistettava, että merkkikaavio on funktion derivaatan merkin muuttumisen ja siitä lauseen 6.16 tulosten nojalla saatavien funktion monotonisuusominaisuuksien kuvallinen esitys. Se on tarkoitettu helpottamaan johtopäätösten tekoa, mutta kaikki yksityiskohdat eivät siitä aina näy. Edellisessä esimerkissä pisteiden -1 ja 1 kuuluminen monotonisuusväleihin, mikä seuraa lauseen 6.16 kohdista (iii) ja (iv), ei liene kovinkaan selvää pelkästään kaaviota katsomalla.

Lause 6.18. (*Yleistetty väliarvolause*) *Olkoot f ja g välillä $[a, b]$ jatkuvia ja välillä $]a, b[$ derivoituvia reaalifunktioita. Tällöin on olemassa piste $\xi \in\ ]a, b[$ s.e.*

$$f'(\xi)\big(g(b) - g(a)\big) = g'(\xi)\big(f(b) - f(a)\big)$$

Todistus. Jos $f(b) = f(a)$, väite saadaan heti soveltamalla Rollen lausetta funktioon f. Jos $f(b) \neq f(a)$, muodostetaan apufunktio

$$h(x) = g(x) - g(a) - \frac{g(b) - g(a)}{f(b) - f(a)}\big(f(x) - f(a)\big).$$

Nyt h on jatkuva $[a, b]$:ssä, derivoituva $]a, b[$:ssä, $h(a) = 0 = h(b)$ ja

$$h'(x) = g'(x) - \frac{g(b) - g(a)}{f(b) - f(a)} f'(x)$$

Rollen lause antaa pisteen $\xi \in\ ]a, b[$ s.e.

$$h'(\xi) = g'(\xi) - \frac{g(b) - g(a)}{f(b) - f(a)} f'(\xi) = 0.$$

Väite seuraa tästä yhtälöstä. □

Huomautus. Tavallinen VAL on yleistetyn VAL:n erikoistapaus valinnalla $g(x) = x$.

Lokaalien ääriarvojen määrittäminen. Aiemmin on jo todettu, että pisteessä x_0 derivoituvalle funktiolle ehto $f'(x_0) = 0$ on välttämätön ehto sille, että $f(x_0)$ on lokaali ääriarvo. Seuraavat kaksi lausetta antavat kaksi riittävää ehtoa. Ensimmäinen niistä ei edes edellytä derivaatan $f'(x_0)$ olemassaoloa, mutta kylläkin f:n jatkuvuuden x_0:ssa. Epäjatkuvuuspisteissä ääriarvon olemassaolo on tutkittava suoraan määritelmän avulla.

Lause 6.19. (*Ääriarvotesti I: derivaatan merkki*) *Olkoon $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ A:n sisäpiste ja $f : A \to \mathbb{R}$ funktio. Jos f on jatkuva x_0:ssa ja derivoituva x_0:n punkteeratussa ympäristössä $U'_\epsilon(x_0)$ ja jos derivaatta f' on erimerkkinen pisteen x_0 eri puolilla, niin $f(x_0)$ on f:n lokaali ääriarvo. Ääriarvon laatu:*

(i) *Jos $\exists \epsilon > 0$ s.e. $f'(x) < 0$ $\forall x \in \,]x_0 - \epsilon, x_0[$ ja $f'(x_0) > 0$ $\forall x \in \,]x_0, x_0 + \epsilon[$, niin $f(x_0)$ on lokaali minimi.*

(ii) *Jos $\exists \epsilon > 0$ s.e. $f'(x) > 0$ $\forall x \in \,]x_0 - \epsilon, x_0[$ ja $f'(x_0) < 0$ $\forall x \in \,]x_0, x_0 + \epsilon[$, niin $f(x_0)$ on lokaali maksimi.*

Sama asia merkkikaavioina:

$$\text{(i)} \quad \begin{array}{r|c} f'(x) & - - - - - - \quad x_0 \quad + + + + + + + \\ \hline f(x) & \searrow \qquad \circ \qquad \nearrow \end{array} \quad \Rightarrow \ f(x_0) \text{ lokaali minimi}$$

$$\text{(ii)} \quad \begin{array}{r|c} f'(x) & + + + + + + + \quad x_0 \quad - - - - - - \\ \hline f(x) & \nearrow \qquad \circ \qquad \searrow \end{array} \quad \Rightarrow \ f(x_0) \text{ lokaali maksimi}$$

Todistus. Riittää todistaa väite (i). Monotonisuustestin 6.16 nojalla (i):n tilanteessa f on vähenevä välillä $]x_0 - \epsilon, x_0]$ ja kasvava välillä $[x_0, x_0 + \epsilon[$, sillä tapa, jolla 6.16 todistettiin väliarvolauseen nojalla ei vaadi f:n derivoituvuutta näiden välien päätepisteessä x_0 vaan vain jatkuvuuden x_0:ssa. Monotonisuuden nojalla on siis $f(x_0) \leq f(x)$ $\forall x \in U_\epsilon(x_0)$, joten $f(x_0)$ on f:n lokaali minimi (itse asiassa monotonisuus on aitoa, joten minimikin on aito). $\square$

Huomautus 6.20. Lauseen 6.19 todistuksen kaltaiset monotonisuustarkastelut osoittavat myös, että jos f':n "merkki ei muutu x_0:aa ohitettaessa", niin $f(x_0)$ ei ole lokaali ääriarvokohta, kun f on jatkuva x_0:ssa.

Lause 6.21. (*Ääriarvotesti II: toinen derivaatta*) *Olkoon $f : A \to \mathbb{R}$ kahdesti derivoituva A:n sisäpisteessä x_0 (jolloin on olemassa $f'(x)$ eräässä x_0:n ympäristössä) ja olkoon $f'(x_0) = 0$. Tällöin*

(i) $f''(x_0) > 0 \;\Rightarrow\; f(x_0)$ *on lokaali minimi.*

(ii) $f''(x_0) < 0 \;\Rightarrow\; f(x_0)$ *on lokaali maksimi.*

Todistus. Riittää todistaa (i). Sovelletaan lausetta 6.4: on olemassa $\delta > 0$ s.e.
$x_0 - \delta < x < x_0 \;\Rightarrow\; f'(x) < f'(x_0) = 0$ ja
$x_0 < x < x_0 + \delta \;\Rightarrow\; f'(x) > f'(x_0) = 0$.
Ääriarvotestin I nojalla $f(x_0)$ on siis lokaali minimi. $\square$

Huomautus 6.22. Jos ääriarvotestin (ii) tilanteessa on $f''(x_0) = 0$, $f(x_0)$ voi olla tai olla olematta lokaali ääriarvo, kuten esimerkit $f(x) = x^3$, $x_0 = 0$ ($f(0)$ ei ole ääriarvo) ja $f(x) = x^4$, $x_0 = 0$ ($f(0)$ on lokaali (ja myös globaali) minimi) osoittavat.

Esimerkki 6.23. Etsi seuraavien funktioiden ääriarvokohdat:

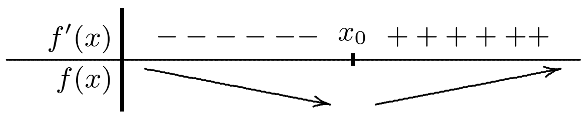
i) $f(x) = (x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \ldots + (x - a_n)^2$,
missä $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ ovat n vakiota ($n \in \mathbb{N}$).

ii) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$, iii) $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 1$.

Ratkaisu.

i)
$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(x - a_1) + 2(x - a_2) + \ldots + 2(x - a_n) \\ &= 2nx - 2(a_1 + \ldots + a_n) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \overset{\text{merk.}}{=} x_0. \end{aligned}$$

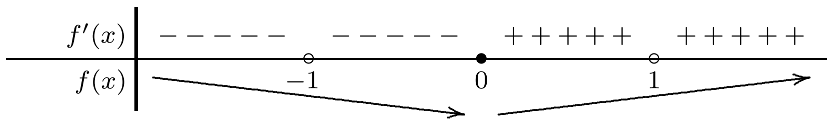
Derivaatan merkkikaavion



ja ääriarvotestin I nojalla vakioiden a_i keskiarvo x_0 on f:n lokaali (jopa globaali) minimikohta. (Myös ääriarvotesti II takaa $f(x_0)$:n lokaaliksi minimiksi, sillä $f'(x_0) = 0$ ja $f''(x_0) = 2n > 0$.)

(ii)
$$f'(x) = D\sqrt[3]{x^2 - 1} = D(x^2 - 1)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}(x^2 - 1)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2x = \frac{2x}{3\left(\sqrt[3]{x^2 - 1}\right)^2}$$

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ ja pisteissä $x = \pm 1$ f ei ole derivoituva mutta on jatkuva. Mahdollisia ääriarvokohtia ovat siis 0, 1 ja -1. Sovelletaan ääriarvotestiä I (mahdollista koska f on jatkuva myös pisteissä $x = \pm 1$). Derivaatan merkkikaavio on nyt seuraavanlainen:

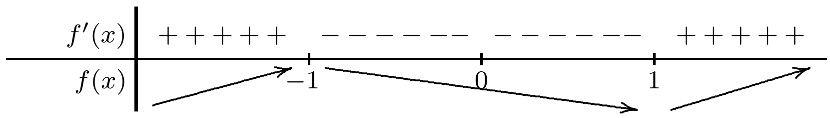


Funktio f on siis aidosti vähenevä välillä $]-\infty, 0]$ ja aidosti kasvava välillä $[0, \infty[$. Näin ollen 0 on f:n ainoa lokaali (ja samalla globaali) ääriarvokohta ja $f(0) = -1$ on lokaali (ja myös globaali) minimi. (Myös suoraan määritelmän avulla nähtäisiin, että pisteet $x = \pm 1$ eivät ole ääriarvokohtia, sillä niiden kaikissa ympäristöissä funktio $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$ saa sekä arvoja $f(\pm 1) = 0$ suurempia (kun $|x| > 1$) että pienempiä (kun $|x| < 1$) arvoja.

iii) Aiemmassa esimerkissä 6.6 tutkittiin jo funktiota $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 1$ ja osoitettiin, että sillä on tasan kolme nollakohtaa. Haetaan nyt f:n lokaalit ääriarvokohdat (globaaleja ei ole, sillä $f(x) \to \pm\infty$ kun $x \to \pm\infty$).

$$f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x^2 - 1) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0 \text{ tai } x = 1 \text{ tai } x = -1$$

ja derivaatan merkkikaaviosta



nähdään, että f:llä on tasan kaksi lokaalia ääriarvokohtaa, minimikohta $x = 1$ ja maksimikohta $x = -1$. Vastaavat minimi- ja maksimiarvot ovat $f(1) = -1$ ja $f(-1) = 3$.

Koska f on aidosti monotoninen väleillä $]-\infty, -1]$, $[-1, 1]$ ja $[1, \infty[$, f:llä voi olla enintään kolme reaalista nollakohtaa. Tämän todistaminen esimerkissä 6.7 oli paljon vaivalloisempaa, koska derivaatan merkin ja monotonisuuden välinen yhteys ei vielä ollut käytettävissä.

Funktion suurin ja pienin arvo annetussa joukossa. Tarkastellaan tehtävää määrittää

$$M = \max f(A) \quad \text{ja} \quad m = \min f(A)$$

Kun $A \subset \mathbb{R}$ ja $f : A \to \mathbb{R}$ on funktio. Ensimmäiseksi on huomattava, ettei f:llä aina ole suurinta arvoa M ja pienintä arvoa m joukossa A, joten ratkaisun eräs vaihe on olemassaolokysymyksen selvittäminen.

Tähän mennessä tarkastelemamme apuneuvot (jatkuvuus, derivoituvuus ja monotonisuuskriteeri 6.16) soveltuvat lähinnä tapaukseen, jossa tarkasteltavalla pisteellä $x_0 \in A$ on ainakin toispuoleinen A:han sisältyvä ympäristö. Muunlaiset A:n pisteet x_0 tulee siis tutkia erikseen.

Jos A on avointen välien pistevieras yhdiste ja $f : A \to \mathbb{R}$ on derivoituva, on mahdollinen f:n globaali ääriarvo $M = f(x_0)$ tai $m = f(x_0)$ myös lokaali ääriarvo ja lauseen 6.3 nojalla on siten oltava $f'(x_0) = 0$. Haemme siis derivaatan nollakohdat $x_0 \in A$ ja tutkimme globaalin ääriarvon olemassaolon selvittämiseksi f:n monotonisuutta A:n muodostavilla avoimilla väleillä monotonisuustestillä 6.16 derivaatan merkin avulla. Lisäksi on yleensä tutkittava f:n käyttäytymistä lähestyttäessä näiden välien päätepisteitä. Jos f ei (mahdollisesti) ole derivoituva jossain $x_0 \in A$, arvo $f(x_0)$ on otettava erääksi ehdokkaaksi M:n tai m:n rooliin.

Jos A on puoliavoin väli täytyy yllä avoimelle välille esitetyn lisäksi muistaa laskea arvo väliin kuuluvassa päätepisteessä, koska tämä arvo voi olla M tai m.

Olkoon lopuksi $A = [a, b]$ suljettu väli. Jos $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ on jatkuva, niin

$$\exists M = \max f([a, b]) \quad \text{ja} \quad \exists m = \min f([a, b])$$

(lause 3.27). Jos $M = f(x_0)$ tai $m = f(x_0)$ jollain A:n sisäpisteellä $x_0 \in\,]a, b[$, niin $f'(x_0) = 0$ tai f ei ole derivoituva x_0:ssa. Saamme siis seuraavan algorimin 1°–4° *suljetulla välillä* $[a, b]$ jatkuvan funktion f suurimman ja pienimmän arvon määrittämiseksi:

1° Laske $f(a)$ ja $f(b)$.

2° Laske f:n arvot niissä sisäpisteissä $x_0 \in]a, b[$, joissa f ei (mahdollisesti) ole derivoituva .

3° Laske f:n arvot derivaatan f' nollakohdissa $x_0 \in]a, b[$.

4° Valitse yllä lasketuista arvoista suurin M ja pienin m.

Jos $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ei ole jatkuva, myös olemassaolokysymystä joutuu tietysti tutkimaan erikseen epäjatkuvuuskohtien tarkastelun lisäksi.

Esimerkki 6.24. Etsi funktion $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ suurin ja pienin arvo $M = \max f(A)$ ja $m = \min f(A)$, kun a) $A = [-3, 0]$, b) $A = [-3, 0[$, c) $A = \mathbb{R} =]-\infty, \infty[$.

Ratkaisu. f on derivoituva $\mathbb{R}$:ssä ja derivaatan

$$f'(x) = \frac{x^2 + 1 - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2+1)^2}$$

merkkikaavio on

		-1		1	
$f'(x)$	$- - - - - - - -$		$+ + + + + + + +$		$- - - - - - - - -$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

a) Koska $[-3, 0]$ on suljettu väli ja f on jatkuva, on olemassa M ja m. Nyt $m, M \in \{f(-3), f(-1), f(0)\}$, sillä -1 on f':n ainoa nollakohta $]-3, 0[$:ssa. Koska $f(-3) = -\frac{3}{10}$, $f(-1) = -\frac{1}{2}$ ja $f(0) = 0$, on

$$\underline{\underline{M}} = \max\{-\tfrac{3}{10}, -\tfrac{1}{2}, 0\} = \underline{\underline{0 = f(0)}} \qquad \text{ja} \qquad \underline{\underline{m}} = \min\{-\tfrac{3}{10}, -\tfrac{1}{2}, 0\} = \underline{\underline{-\tfrac{1}{2} = f(-1)}}.$$

b) Kohdan a) tarkastelujen lisäksi havaitaan, että $\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = f(0) = 0$ ja $f(x) < 0$ $\forall x \in [-3, 0[$. Siten

$$\underline{\underline{m}} = \min f([-3, 0[) = \underline{\underline{-\tfrac{1}{2} = f(-1)}}$$

kuten a)-kohdassa, mutta

$$\underline{\underline{\nexists M = \max f([-3, 0[)}}$$

ts. f:llä ei ole suurinta arvoa ($[-3, 0[$):ssa.

c) Koska f on derivoituva $\mathbb{R}$:ssä, derivaatan nollakohdat $x = \pm 1$ ovat ainoat ehdokkaat f:n globaaleiksi ääriarvokohdiksi. On vielä selvitettävä m:n ja M:n olemassaolo. Tätä varten tehdään havaintoja f:n käyttäytymisestä välin $\mathbb{R} =]-\infty, \infty[$ "päätepisteiden" $-\infty$ ja ∞ lähellä:

Koska $f(x) > 0$ $\forall x \in]0, \infty[$ ja $f(x) < 0$ $\forall x \in]-\infty, 0[$ ja koska derivaatan merkkikaavion nojalla f on aidosti vähenevä $[1, \infty[$:ssä ja $]-\infty, -1]$:ssä ja aidosti kasvava $[-1, 1]$:ssä on

$$f(1) = \tfrac{1}{2} \geq f(x) \ \forall x \in \mathbb{R} \qquad \text{ja} \qquad f(-1) = -\tfrac{1}{2} \leq f(x) \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Siis

$$\underline{\underline{\exists m}} = \min f(\mathbb{R}) = f(-1) = \underline{\underline{-\tfrac{1}{2}}} \quad \text{ja} \quad \underline{\underline{\exists M}} = \max f(\mathbb{R}) = f(1) = \underline{\underline{\tfrac{1}{2}}}.$$

(Tähän ei tarvittu edes raja-arvojen $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ laskemista.)

Esimerkki 6.25. Määritä funktion $f(x) = x^2|x+3|$ suurin ja pienin arvo välillä $[-4, 1]$.

Ratkaisu. Kahden jatkuvan funktion tulona f on jatkuva koko $\mathbb{R}$:ssä, siis erityisesti välillä $[-4, 1]$. Koska $[-4, 1]$ on suljettu väli $\exists M = \max f([-4, 1])$ ja $\exists m = \min f([-4, 1])$. Nyt

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 3x^2, & x \geq -3 \\ -x^3 - 3x^2, & x < -3, \end{cases}$$

joten f on derivoituva, kun $x \neq -3$, ja

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 6x, & x > -3 \\ -3x^2 - 6x, & x < -3 \end{cases}$$

Edelleen

$$f'(x) = 0 \ \Leftrightarrow\ 3x^2 + 6x = 0 \ \Leftrightarrow\ 3x(x+2) = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 0 \text{ tai } x = -2.$$

Koska $0, -2 \in\ ]-4, 1[$ on siis oltava $M, m \in \{f(-4), f(-3), f(-2), f(0), f(1)\} = \{16, 0, 4, 0, 4\}$, josta

$$\underline{\underline{M = 16 = f(-4)}} \quad \text{ja} \quad \underline{\underline{m = 0 = f(-3) = f(0)}}.$$

(Tässä f ei ole derivoituva pisteessä $x = -3$, sillä $\lim_{x\to-3+} f'(x) = 9 \neq -9 = \lim_{x\to-3-} f'(x)$; ks. 6.12. Toisaalta, tätä tietoa ei yllä tarvittu. Koska epäiltiin derivoituvuutta kohdassa $x = -3$, arvo $f(-3) = 0$ otettiin "ehdokkaaksi".)

Konveksisuus ja käännepisteet. Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ väli ja $f : I \to \mathbb{R}$ derivoituva.

Määritelmä 6.26. Funktio $f : I \to \mathbb{R}$ on *konveksi* (eli käyrä $y = f(x)$ on *alaspäin kupera*) välillä I, jos käyrä $y = f(x)$ on jokaisen välin I pisteeseen x_0 liittyvän tangenttinsa "yläpuolella" ts. jos jokaiselle $x_0 \in I$ pätee ehto

$$x \in I \text{ ja } y = f(x) \ \Rightarrow\ y \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0). \tag{6.27}$$

Jos (6.27):n epäyhtälö on aito ($>$), kun $x \neq x_0$, niin f on *vahvasti konveksi*.

Funktio $f : I \to \mathbb{R}$ on *konkaavi* (eli käyrä $y = f(x)$ on *ylöspäin kupera*) välillä I jos $-f$ on konveksi välillä I. Jos $-f$ on vahvasti konveksi, f on *vahvasti konkaavi*.

Piste $\big(x_0, f(x_0)\big)$ on f:n (tai käyrän $y = f(x)$) *käännepiste* ja x_0 *käännekohta*, jos f on eräässä x_0:n ympäristössä $]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[$ vahvasti konveksi toisella ja vahvasti konkaavi toisella väleistä $]x_0 - \epsilon, x_0]$ ja $[x_0, x_0 + \epsilon[$.

Huomautus. Myöhemmin matemaattisen analyysin jatkokursilla esitetään (yhden ja) useamman muuttujan funktioille yleisempi konveksisuuden määritelmä, jossa f:n ei tarvitse olla derivoituva

Lause 6.28. (i) *Jos derivaatta f' on (aidosti) kasvava välillä I, niin f on (vahvasti) konveksi I:ssä.*

(ii) *Jos derivaatta f' on (aidosti) vähenevä välillä I, niin f on (vahvasti) konkaavi I:ssä.*

(iii) *Jos f on kahdesti derivoituva välillä I ja $f''(x) \geq 0$ $\forall x \in I$, niin f on konveksi I:ssä. Jos lisäksi $f''(x)$ ei häviä identtisesti millään I:n (ei-surkastuneella) osavälillä, f on vahvasti konveksi I:ssä.*

(iv) *Jos f on kahdesti derivoituva välillä I ja $f''(x) \leq 0$ $\forall x \in I$, niin f on konkaavi I:ssä. Jos lisäksi $f''(x)$ ei häviä identtisesti millään I:n (ei-surkastuneella) osavälillä, f on vahvasti konkaavi I:ssä.*

Todistus. Riittää todistaa (i) ja (iii). Väitteet (ii) ja (iv) todistetaan korvaamalla f $-f$:llä ja soveltamalla sitten väitteitä (i) ja (iii) ja määritelmiä.

Olkoon siis f' kasvava I:ssä, $x_0 \in I$ ja $x \in I \setminus \{x_0\}$. Väliarvolauseen nojalla on tällöin olemassa piste ξ x_0:n ja x:n välissä s.e.

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0),$$

jolloin siis $y = f(x) = f'(\xi)(x - x_0) + f(x_0)$. Jos $x_0 < \xi < x$, niin $f'(x_0) \leq f'(\xi)$ ja $x - x_0 > 0$ ja siten

$$(*) \qquad y \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Jos taas $x < \xi < x_0$, niin $f'(x_0) \geq f'(\xi)$ ja $x - x_0 < 0$, joten tällöinkin saadaan arvio $(*)$. Siis joka tapauksessa on saatu ehto $(*)$ eli (6.27) ja f on konveksi. Jos yllä f' on aidosti kasvava, arviot $(*)$:ssä tulevat myös aidoiksi ja tällöin f on siis vahvasti konveksi. Ehto (i) on siis todistettu.

Ehto (iii) seuraa nyt helposti ehdosta (i) ja lauseesta 6.16. □

Lause 6.29. *Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ väli, x_0 I:n sisäpiste ja $f \in C^2(I)$ (ts. f on I:ssä kahdesti jatkuvasti derivoituva). Tällöin pätee seuraavaa*

(i) *Jos x_0 on f:n käännekohta, niin $f''(x_0) = 0$.*

(ii) *Jos $f''(x_0) = 0$ ja f'' muuttaa merkkiä kohdassa x_0, niin x_0 on f:n käännekohta.*

Todistus. (i) Tehdään vastaoletus $f''(x_0) \neq 0$. Olkoon esimerkiksi $f''(x_0) > 0$. Lauseen 3.19 nojalla ehdosta $f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} f''(x) > 0$ (f'' oli jatkuva) saadaan nyt sellainen $\delta > 0$, että $f''(x) > 0$ $\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. Tällöin f on välillä $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ vahvasti konveksi lauseen 6.28 (iii) nojalla, mikä on ristiriidassa sen kanssa, että x_0 on f käännekohta.

(ii) Kuperuussuunnan muuttuminen x_0:ssa seuraa välittömästi lauseen 6.28 kohdista (iii) ja (iv) jos f'' muuttaa merkkiä x_0:ssa. □

Esimerkki 6.30. Määritä funktion f käännepisteet kun
a) $f(x) = x^4$, b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

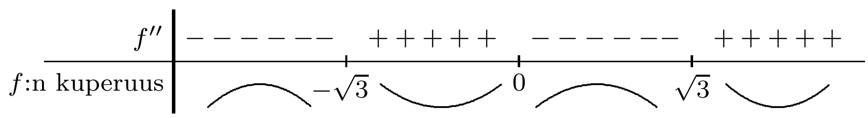
Ratkaisu. a) $f \in C^2(\mathbb{R})$, joten välttämätön ehto käännekohdalle on toisen derivaatan häviäminen. Nyt $f'(x) = 4x^3$ ja $f''(x) = 12x^2 \geq 0$ ja $f''(x) = 0 \iff x = 0$. Origo on siis ainoa mahdollinen käännekohta. Kuitenkin f'' on samanmerkkinen origon molemmin puolin, joten f on kaikkialla konveksi ja käännepisteitä ei siis ole.

Tämä esimerkki osoittaa samalla, että pelkkä ehto $f''(x_0) = 0$ ei riitä takaamaan x_0:aa käännekohdaksi.

b) Nytkin $f \in C^2(\mathbb{R})$ ja (ks. esim. 6.24)

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}, \qquad \text{josta saadaan} \\
f''(x) &= \frac{(x^2+1)^2(-2x) - 2(1-x^2)(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4} = \frac{-2x(x^2+1) - 4x(1-x^2)}{(x^2+1)^3} \\
&= \frac{-2x^3 - 2x - 4x + 4x^3}{(x^2+1)^3} = \frac{2x^3 - 6x}{(x^2+1)^3} = \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3} \quad \text{ja} \\
f''(x) &= 0 \iff x = 0 \ \text{ tai } \ x = \pm\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Koska nimittäjä on positiivinen $\mathbb{R}$:ssä, niin osoittaja $2x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$ määrää f'':n merkin:



Koska kuperuussuunta muuttuu kaikissa f'':n nollakohdissa, f:n käännepisteiksi saadaan pisteet $(-\sqrt{3}, -\frac{1}{4}\sqrt{3})$, $(0,0)$ ja $(\sqrt{3}, \frac{1}{4}\sqrt{3})$.

Yhtälön likimääräinen ratkaiseminen. Newtonin menetelmä. Tarkastellaan yhtälön $f(x) = 0$ numeerista ratkaisemista. Ns. *välinpuolitusmenetelmässä* käytetään hyväksi Bolzanon lausetta juuren x_0 likiarvojen parantamiseen. Jos $f(a) < 0$ ja $f(b) > 0$ (tai $f(a) > 0$ ja $f(b) < 0$) ja f on jatkuva $[a,b]$:ssä, yhtälöllä $f(x) = 0$ on ainakin yksi juuri $[a,b]$:ssä. Merkitään $x_1 = \dfrac{a+b}{2}$, juuren 1. likiarvo. Jos $f(x_1) = 0$, x_1 on haettu f:n nollakohta. Muuten korvataan väli $[a,b]$ välillä $[a,x_1]$ tai välillä $[x_1,b]$ ja toistetaan välinpuolitusta yhä parempien likiarvojen x_2, x_3, … , löytämiseksi. Tämä menetelmä on siis periaatteeltaan yksinkertainen (tarvitaan vain f:n jatkuvuus ja Bolzanon lause), mutta valitettavasti likiarvojen jono (x_n) konvergoi kovin hitaasti kohti nollakohtaa.

Ensimmäisen ja toisen derivaatan sovelluksena voidaan johtaa tuntuvasti parempi ns. Newtonin menetelmä, jota seuraavassa lyhyesti tarkastellaan.

Oletetaan, että $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ on kahdesti derivoituva ja toteuttaa seuraavat ehdot:

$$
\begin{aligned}
&1^\circ \quad f(a) \text{ ja } f(b) \text{ ovat erimerkkiset} \\
&2^\circ \quad f'(x) \neq 0 \ \forall x \in [a,b] \\
&3^\circ \quad f''(x) \neq 0 \ \forall x \in [a,b]
\end{aligned}
\tag{6.31}
$$

Tällöin voidaan todistaa, että seuraava *Newtonin iteraatio* johtaa jonoon $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, jolle $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \in \,]a,b[$, missä x_0 on yhtälön $f(x) = 0$ ainoa juuri välillä $[a,b]$.

Valitaan ensin $x_1 \in \,]a,b[$ s.e. $f(x_1)$ ja f'' ovat samanmerkkiset (itse asiassa ehdoista 2° ja 3° seuraa, että f' ja f'' säilyttävät merkkinsä välillä $[a,b]$. Siten on oltava $f''(x) > 0 \ \forall x \in [a,b]$ tai $f''(x) < 0 \ \forall x \in [a,b]$; tosin tämän todistaminen ei ole aivan helppoa, jos f'':a ei tiedetä jatkuvaksi). Piirretään käyrälle $y = f(x)$ pisteeseen $(x_1, f(x_1))$ tangenttisuora ja ratkaistaan sen ja x-akselin leikkauskohta:

$$
\begin{aligned}
&y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1) \quad \big(y_1 = f(x_1)\big) \text{ ja } y = 0 \ \Rightarrow \\
&x = x_1 - \frac{y_1}{f'(x_1)} \overset{\text{merk.}}{=} x_2.
\end{aligned}
$$

Valitaan x_2 uudeksi likiarvoksi ja toistetaan sama menettely. Saadaan

$$
x_3 = x_2 - \frac{y_2}{f'(x_2)} \quad \big(y_2 = f(x_2)\big).
$$

Yleisesti jonon (x_n) $(n+1)$:s jäsen on

$$
x_{n+1} = x_n - \frac{y_n}{f'(x_n)} \quad \big(y_n = f(x_n)\big). \tag{6.32}
$$

Huomautus. Jos ensimmäisen likiarvon x_1 valitsee "hyvin", Newtonin menetelmä konvergoi usein myös ilman oletuksia 6.31 taustatietoina. Kannattaa siis hakea heti alussa melko tarkka juuren likiarvo esim. Bolzanon lausetta soveltaen.

Esimerkki 6.33. Laske Newtonin menetelmällä $\sqrt[3]{9}$:lle kolmidesimaalinen likiarvo.

Ratkaisu. Merkitään $f(x) = x^3 - 9$, jolloin $f'(x) = 3x^2$ ja $f''(x) = 6x$ ja ehdot (6.31) ovat voimassa välillä $[2,3]$. Valitaan $x_1 = 2.1$ ($f(x_1) = x_1^3 - 9 \approx 0.261 > 0$ on nyt samanmerkkinen kuin f'' välillä $[2,3]$), jolloin Newtonin iteraatio antaa

$$
\begin{aligned}
x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 2.1 - \frac{(2.1)^3 - 9}{3 \cdot (2.1)^2} \approx 2.0803, \\
x_3 &= x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 2.0803 - \frac{(2.0803)^3 - 9}{3 \cdot (2.0803)^2} \approx 2.08008
\end{aligned}
$$

Tämän laskun perusteella voi jo arvata, että $\underline{\underline{\sqrt[3]{9} \approx 2.080}}$ on haettu kolmidesimaalinen likiarvo (varmuus edellyttäisi lisätietoja Newtonin iteraation konvergenssin laadusta).

L'Hospitalin sääntö. Viimeisenä asiana derivaattaa käsittelevässä luvussa 6 esittelemme raja-arvojen laskemisessa usein käytetyn ns. L'Hospitalin säännön, jolla tietyin oletuksin voi laskea muotoa "$\frac{0}{0}$" tai "$\frac{\infty}{\infty}$" olevia raja-arvoja. Aloitamme tarkastelemalla muotoa "$\frac{0}{0}$" olevaa raja-arvo-ongelmaa, missä osoittaja ja nimittäjä siis lähenevät nollaa, kun $x \to x_0$.

Lause 6.34. *(L'Hospital) Olkoot f ja g pisteen $x_0 \in \mathbb{R}$ punkteeratussa ympäristössä $U'_\epsilon(x_0)$ derivoituvia funktioita, joille $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 = \lim_{x\to x_0} g(x)$. Jos $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in U'_\epsilon(x_0)$ ja jos on olemassa raja-arvo*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \in \overline{\mathbb{R}}, \tag{6.35}$$

niin

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a.$$

Todistus. Koska $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 = \lim_{x\to x_0} g(x)$, saamme f:n ja g:n x_0:ssa jatkuviksi määrittelemällä $f(x_0) = 0 = g(x_0)$. Tarvitsemme tämän jatkuvuuden yleistettyä väliarvolausetta varten; se siis saadaan aikaan muuttamalla tarvittaessa x_0-arvoja, jotka eivät vaikuta tarkasteltaviin raja-arvoihin.

Olkoon nyt $x \in U'_\epsilon(x_0)$. Tavallisen välarvolauseen nojalla $g(x) = g(x) - g(x_0) = g'(\xi)(x - x_0) \neq 0$, joten voimme muodostaa osamäärän

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))},$$

missä viimeisessä yhtälössä $\xi(x)$ on x:n ja x_0:n välinen yleistetyn väliarvolauseen 6.18 antama piste. Kun $x \to x_0$, niin $\xi(x) \to x_0$ ja $\xi(x) \neq x_0$, joten yhdistettyjen funktioiden raja-arvosäännön 3.8 (ja sen raja-arvoja ∞ ja $-\infty$ koskevien vastikkeiden) ja oletuksen (6.35) nojalla pätee

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))} = a$$

(myös tapauksissa $a = \pm\infty$). □

Huomautus 6.36. Sama päättely antaa myös "toispuoleiset" l'Hospitalin lauseen versiot samantyyppisillä oletuksilla.

Piste, jota lähestytään saa olla myös ∞ tai $-\infty$.

Lause 6.37. *(L'Hospital) Olkoot f ja g välillä $]M, \infty[$ $(M > 0)$ derivoituvia funktioita, olkoon $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in]M, \infty[$ ja olkoon $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to\infty} g(x)$. Jos raja-arvo*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \in \overline{\mathbb{R}}$$

on olemassa, niin se on samalla osamäärän $\frac{f}{g}$ *raja-arvo; siis*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = a.$$

Todistus. Merkitään $F(x) = f(\frac{1}{x})$ ja $G(x) = g(\frac{1}{x})$ ja sovelletaan lauseen 6.34 toispuolista versiota:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0+} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x\to 0+} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x\to 0+} \frac{-\frac{1}{x^2} f'(\frac{1}{x})}{-\frac{1}{x^2} g'(\frac{1}{x})} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Tässä laskussa on käytetty sitä, että $x \to \infty \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{x} \to 0+$ ja yhdistettyjen funktioiden raja-arvosääntöä 3.8, jonka nojalla pätee myös tarvittava oletus tyypistä "$\frac{0}{0}$":

$$\lim_{x\to 0+} F(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to 0+} G(x). \quad \square$$

Esimerkki 6.38. Laske $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{x^2 - 1}$.

Ratkaisu. Merkitään $f(x) = \sqrt[3]{x} - 1$, $g(x) = x^2 - 1$, jolloin $f'(x) = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}$ ja $g'(x) = 2x$. L'Hospitalin lauseen oletukset ovat voimassa pisteen 1 ympäristössä $]0, 2[$, joten tyyppiä "$\frac{0}{0}$" oleva raja-arvo $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ voidaan laskea sen avulla. Tässä f' ja g' ovat jatkuvia myös pisteessä $x = 1$ ja $g'(1) = 2 \neq 0$, joten

$$\lim_{x\to 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(1)}{g'(1)} = \frac{\frac{1}{3}}{2} = \frac{1}{6}$$

ja l'Hospitalin säännön 6.34 nojalla saadaan

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \underline{\underline{\frac{1}{6}}}.$$

L'Hospitalin sääntöä voi soveltaa myös muotoa $\frac{\infty}{\infty}$ (tai yleisemmin $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$) oleviin raja-arvoihin. Annamme tähän liittyvän lauseen ilman todistusta.

Lause 6.39. *Olkoot f ja g pisteen $x_0 \in \mathbb{R}$ punkteeratussa ympäristössä derivoituvia funktioita ja olkoon $g'(x) \neq 0$ tässä ympäristössä. Olkoon $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$. Jos on olemassa raja-arvo*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \in \overline{\mathbb{R}},$$

niin

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a.$$

Eksponentti- ja logaritmifunktiot. Määrittelemme ensin eksponenttifunktion $f(x) = e^x$ sarjakehitelmän avulla ja palautamme muut eksponenttifunktiot ja potenssifunktiot tähän määritelmään.

Aiemmin on määritelty Neperin luku

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \approx 2.71828\ldots$$

ja todistettu (ks. esimerkki 3.42), että

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!} \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}.$$

Esimerkissä 4.27 on osoitettu, että potenssisarja

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

suppenee $\forall x \in \mathbb{R}$. Erityisesti arvolla $x = 1$ saadaan nyt arvio

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right) = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

Voidaan osoittaa (sivuutan todistuksen hieman liian työläänä), että itse asiassa

$$e = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} \text{ eli } e^1 = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots\,.$$

Määritelmä 7.1. Määrittelemme eksponenttifunktion $f(x) = e^x$ koko $\mathbb{R}$:ssä asettamalla

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\,.$$

Huomautus 7.2. Yllä todettiin jo, että todella $e^1 = e$. Jatkossa esitettävän teorian avulla ei ole vaikea näyttää, että määritelmän 7.1 antama e^x yhtyy vaihtoehtoiseen (ja potenssikäsitteeseen selkeämmin kytkeytyvään) määritelmään

$$e^x = \sup\{e^r \mid r \in \mathbb{Q} \text{ ja } r \le x\}.$$

Jätän asian tarkemman pohdiskelun lukijalle vapaaehtoiseksi harjoitusprojektiksi.

Lause 7.3. $De^x = e^x \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Todistus. Potenssisarjaa saa suppenemisvälillä derivoida termeittäin ja määritelmän 7.1 sarjan termeittäin derivointi tuottaa saman sarjan. $\square$

Korollaari 7.4. *Eksponenttifunktio $f(x) = e^x$ on koko $\mathbb{R}$:ssä $C^\infty - funktio$, $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Erityisesti f on myös jatkuva.*

Eksponenttifunktion keskeinen ominaisuus on potenssikaavasta tutunnäköinen ns. *yhteenlaskuväittämä*, jonka todistukseen nyt siirrymme.

Lause 7.5. *(Yhteenlaskuväittämä) Kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$ on*

$$e^{x+y} = e^x e^y.$$

Todistus. Kiinnitetään $y \in \mathbb{R}$ ja määritellään funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kaavalla

$$f(x) = e^{x+y} e^{-x} \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Tällöin f:n derivaatta häviää koko $\mathbb{R}$:ssä, sillä tulon derivoimissäännön ja ketjusäännön nojalla lauseesta 7.3 seuraa, että

$$f'(x) = \left(De^{x+y}\right) e^{-x} + e^{x+y} De^{-x} = (e^{x+y} \cdot 1)e^{-x} + e^{x+y}(-1)e^{-x} = 0$$

Integraalilaskennan peruslauseen 6.14 nojalla f on siis vakiofunktio: $f(x) = C$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Arvolla $x = 0$ saadaan, että $C = f(0) = e^{0+y}e^{-0} = e^y$, joten kullakin $y \in \mathbb{R}$ on johdettu kaava

$$(*) \qquad e^{x+y} e^{-x} = e^y \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ottamalla kaavassa $(*)$ $y = 0$ saadaan ehto $e^x e^{-x} = 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$ ja kertomalla yhtälö $(*)$ puolittain e^x:llä saadaan nyt, että

$$e^{x+y} = e^{x+y} e^{-x} e^x = e^x e^y \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

ja väite on todistettu. $\square$

Listaamme seuraavaksi eräitä eksponenttifunktion keskeisiä ominaisuuksia.

Lause 7.6. *Eksponenttifunktio $f(x) = e^x$ on aidosti kasvava ja vahvasti konveksi $\mathbb{R}$:ssä ja $f(\mathbb{R}) =]0, \infty[$. Lisäksi $e^0 = 1$ (suoraan määritelmästä) ja*

(i) $0 < e^x < 1 \ \forall x \in]-\infty, 0[$.

(ii) $e^x > 1 \ \forall x \in]0, \infty[$.

(iii) $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x} \ \forall x \in \mathbb{R}$.

(iv) $e^x \geq 1 + x \ \forall x \in \mathbb{R}$.

(v) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ *ja* $\lim\limits_{x \to \infty} e^x = \infty$.

Todistus. Kaava (iii) on yllä jo johdettu lauseen 7.5 todistuksessa. Koska $e^x > 1$ $\forall x > 0$ suoraan määritelmän nojalla, on kaavan (iii) nojalla $e^x = \frac{1}{e^{-x}} \in \,]0,1[$, kun $x < 0$, ja ehdot (i) ja (ii) ovat voimassa. Funktion $f(x) = e^x$ derivaatat $f'(x) = e^x$ ja $f''(x) = e^x$ toteuttavat siis $f'(x) > 0$ ja $f''(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, joten f on aidosti kasvava ja vahvasti konveksi. Koska suoraan määritelmän nojalla on $e^x > 1 + x$ $\forall x \in \,]0, \infty[$, on $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ ja siten $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$ kaavan (iii) seurauksena. Näin ollen ehto (v) on tosi ja $f(\mathbb{R}) = \,]0, \infty[$.

Jäljelle jää enää epäyhtälön $e^x \geq 1 + x$ varmentaminen negatiivisilla x:n arvoilla. Tätä varten muodostamme apufunktion $g(x) = e^x - x - 1$, jolle $g'(x) = e^x - 1 = 0$ $\Leftrightarrow$ $x = 0$ ja g':n merkkikaavio

$$\begin{array}{r|ccc} g'(x) & - - - - - - - - & & + + + + + + + \\ \hline g(x) & \searrow & 0 & \nearrow \end{array}$$

näyttää arvon $g(0) = 0$ g:n globaaliksi minimiksi. Siten $\forall x \in \mathbb{R}$ pätee

$$g(x) = e^x - x - 1 \geq 0 \quad \text{eli} \quad e^x \geq 1 + x. \quad \Box$$

Eksponenttifunktio kasvaa x:n kasvaessa oleellisesti nopeammin kuin mikään x:n potenssi.

Lause 7.7. *Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Tällöin*

(i) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$ *ja*

(ii) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0.$

Todistus. Lauseen voisi todistaa soveltamalla toistuvasti l'Hospitalin sääntöä 6.39. Koska sen todistus edellä sivuutettiin, annamme suoran todistuksen.

Riittää todistaa ehto (i). Tarkastellaan funktiota $f : \,]0, \infty[\, \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{-n}e^x$. Tällöin

$$f'(x) = -nx^{-n-1}e^x + x^{-n}e^x = e^x(x^{-n} - nx^{-n-1}) = \frac{e^x}{x^n}\left(1 - \frac{n}{x}\right) > 0, \text{ kun } x > n$$

ja edelleen

$$f''(x) = e^x\big(x^{-n} - 2nx^{-n-1} + n(n+1)x^{-n-2}\big) = e^x\left(\frac{x^2 - 2nx + n^2 + n}{x^{n+2}}\right)$$

joten

$$f''(x) = \frac{e^x}{x^{n+2}}\big((x-n)^2 + n\big) > 0, \text{ kun } x > 0 \text{ ja erityisesti siis myös kun } x > n.$$

Olkoon nyt $x > 2n$. Väliarvolauseen nojalla

$$f(x) - f(2n) = f'(\xi)(x - 2n) > f'(2n)(x - 2n) \to \infty, \text{ kun } x \to \infty,$$

sillä $f'(2n) > 0$ (koska $2n > n$) ja $f'(\xi) > f'(2n)$ välin $]2n, x[$ pisteessä ξ, koska f' on f'':n positiivisuuden takia aidosti kasvava välillä $[2n, x]$. Kuristusperiaatteen nojalla

$$f(x) = f(2n) + f'(\xi)(x - 2n) \to \infty, \text{ kun } x \to \infty. \quad \Box$$

Esimerkki 7.8. (i) $\lim\limits_{x\to\infty} xe^{-x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = 0.$

(ii)
$$\lim_{x\to 0-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{z\to\infty}(-ze^{-z}) = -\lim_{z\to\infty} ze^{-z} = 0 \text{ (kohta (i))}$$

Tässä on käytetty muunnosta $z = -\dfrac{1}{x}$, jolloin $x \to 0- \;\Leftrightarrow\; z \to \infty$.

Eksponentiaalinen kasvu. Funktiolla $f(x) = e^x$ on erittäin tärkeitä sovelluksia käytännön ongelmissa. Esitämme myöhemmin differentiaaliyhtälöiden teoriassa matemaattisen analyysin jatkokurssin lopussa tuloksia, joiden nojalla differentiaaliyhtälön (lyh. DY)

$$y' = ky \quad (k \in \mathbb{R}) \tag{7.9}$$

kaikki ratkaisut välillä $I \subset \mathbb{R}$ ovat funktiot $y = Ce^{kx}$ ($C \in \mathbb{R}$ on vakio). Suoraan derivoimalla nähdään toki heti, että nämä funktiot toteuttavat differentiaaliyhtälön (7.9) välillä I: Jos $x \in I$, niin

$$y(x) = Ce^{kx} \;\Rightarrow\; y'(x) = kCe^{kx} = ky(x).$$

Tähän differentiaaliyhtälöön palautuu monissa käytännön tilanteissa esiintyvä eksponentiaalisen kasvun malli.

Esimerkki 7.10. Sijoittaja arvelee yrityksen edellisen vuoden pituisen ajan liikevaihdon $y(t)$ (t aika vuosissa) kasvun olevan suoraan verrannollinen sen määrään ajanjaksolla ajanjaksolla $0 \le t \le 10$. Alkuhetkellä $t = 0$ yrityksen liikevaihto $y(0)$ oli 10 miljoonaa euroa. Mikä on sijoittajan näkemyksen mukaan yrityksen liikevaihto $y(10)$, kun $y(\frac{1}{4})$ oli 10.1 miljoonaa euroa?

Ratkaisu. Liikevaihdon kasvuehdon nojalla pätee DY $y'(t) = ky(t)$ alkuehdoilla $y(0) = 10^7$ ja $y(\frac{1}{4}) = 10.1 \cdot 10^6$. Tämän DY:n ratkaisu on $y(t) = Ce^{kt}$ ja alkuehdot antavat $y(0) = C = 10^7$ ja $y(\frac{1}{4}) = Ce^{\frac{k}{4}} = 10^7 e^{\frac{k}{4}} = 10.1 \cdot 10^6$, josta kohta esiteltävän logaritmin avulla $\frac{k}{4} = \ln 1.01 \;\Rightarrow\; k = 4\ln 1.01$ ja edelleen

$$y(10) = 10^7 e^{40\ln 1.01} = 10^7 \cdot 1.01^{40} \approx 1.48886 \cdot 10^7 \approx 14.9 \text{ miljoonaa euroa}$$

Vastaus: $\underline{\text{15 miljoonaa euroa}}$.
(Laskussa ei olisi pakko käyttää logaritmia: $y(\frac{1}{4}) = 10^7 e^{\frac{k}{4}} = 10.1 \cdot 10^6 \;\Rightarrow\; y(10) = 10^7 e^{10k} = 10^7 \cdot \left(e^{\frac{k}{4}}\right)^{40} = 10^7 \cdot 1.01^{40}$ kuten yllä.)

Lisää esimerkkejä kasvumalleista annamme jatkokurssissa differentiaaliyhtälöitä esitellessämme.

Luonnollinen logaritmi. Koska funktio $f : \mathbb{R} \to]0, \infty[$, $f(x) = e^x$, on jatkuvasti derivoituva aidosti kasvava bijektio ja koska $f'(x) \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, funktiolla f on käänteisfunktio $f^{-1} :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ ja f^{-1} on jatkuvasti derivoituva ja aidosti kasvava bijektio. Sitä sanotaan *luonnolliseksi logaritmifunktioksi* ja merkitään

$$f^{-1}(x) = \ln x = \log x \quad (x \in]0, \infty[)$$

Mainitsemme nyt eräitä ln:n perusominaisuuksia. Kaavaa (iv) lukuunottamatta ne ovat suoria seurauksia vastaavista eksponenttifunktion ominaisuuksista.

Lause 7.11.

(i) $D \ln x = \frac{1}{x} \quad \forall x \in]0, \infty[$.

(ii) $\ln 1 = 0$, $\lim\limits_{x \to 0+} \ln x = -\infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} \ln x = \infty$.

(iii) $\ln(xy) = \ln x + \ln y \quad \forall x, y \in]0, \infty[$.

(iv) $\ln x^r = r \ln x \quad \forall x \in]0, \infty[$ *ja* $\forall r \in \mathbb{Q}$.

(v) $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y \quad \forall x, y \in]0, \infty[$.

(vi) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(\ln x)^n}{x} = 0$ *ja* $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{(\ln x)^n} = \infty \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Todistus. Todistamme malliksi derivoimiskaavan (i):
Olkoon $x > 0$, $x = e^y$, $y = \ln x$. Tällöin

$$D \ln x = \frac{1}{De^y} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$$

lauseen 5.15 nojalla. $\square$

Yleinen potenssifunktio. Aiemmin on jo määritelty potenssifunktio x^r rationaalisilla $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ ($p \in \mathbb{Z}$; $q \in \mathbb{N}$): $x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{p}$. Voisimme yleistää tätä määritelmää asettamalla (vrt. 7.2)

$$x^\mu = \sup\{x^r \mid r \in \mathbb{Q} \text{ ja } r \leq \mu\}, \text{ jos } \mu > 0 \text{ ja } x > 0 \text{ ja}$$
$$x^\mu = \inf\{x^r \mid r \in \mathbb{Q} \text{ ja } r \leq \mu\}, \text{ jos } \mu < 0 \text{ ja } x > 0.$$

Määrittelemme yleisen potenssin x^μ kuitenkin helpommin käyttäen jo esiteltyä eksponenttifunktiota.

Määritelmä 7.12. Olkoon $\mu \in \mathbb{R}$. Määritellään *potenssifunktio* $f :]0, \infty[\to]0, \infty[$, $f(x) = x^\mu$, kaavalla

$$f(x) = x^\mu = e^{\mu \ln x} \quad \forall x \in]0, \infty[.$$

Huomautus 7.13. Lauseen 7.11 kaavasta (iv) seuraa nyt, että tapauksessa $\mu \in \mathbb{Q}$ määritelmän 7.12 antama x^μ on sama kuin aiemmin määritelty:

$$\ln x^\mu \overset{7.11.}{=} \mu \ln x = \ln(e^{\mu \ln x}) \;\Rightarrow\; x^\mu = e^{\mu \ln x},$$

sillä ln on injektiivinen.

Lause 7.14. *Olkoon* $x > 0$ *ja* μ, μ_1, $\mu_2 \in \mathbb{R}$. *Tällöin*
(i) $x^{\mu_1+\mu_2} = x^{\mu_1}x^{\mu_2}$, (ii) $x^{\mu_1-\mu_2} = \dfrac{x^{\mu_1}}{x^{\mu_2}}$,
(iii) $(x^{\mu_1})^{\mu_2} = x^{\mu_1\mu_2}$, (iv) $Dx^\mu = \mu x^{\mu-1}$,
(v) *Potenssifunktio* $f(x) = x^\mu$ *on aidosti kasvava, jos* $\mu > 0$, *aidosti vähenevä, jos* $\mu < 0$ *ja vakio 1, jos* $\mu = 0$.
(vi) $\ln x^\mu = u \ln x$. *(Yleistää kaavan* 7.11 (iv).*)*

Todistus. Malliksi (iv):

$$Dx^\mu = De^{\mu \ln x} = \frac{\mu}{x}e^{\mu \ln x} = \mu e^{\mu \ln x - \ln x} = \mu e^{(\mu-1)\ln x} = \mu x^{\mu-1}. \quad \square$$

Muut eksponentti- jalogaritmifunktiot. Olkoon $a > 0$, $a \neq 1$.

Määritelmä 7.15. *a-kantainen eksponenttifunktio* $f : \mathbb{R} \to \,]0,\infty[$ määritellään kaavalla

$$f(x) = a^x = e^{x \ln a}.$$

Sen käänteisfunktio $f^{-1} :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ on *a-kantainen logaritmifunktio* $f^{-1} = \log_a$:

$$y = \log_a x \;\Leftrightarrow\; x = a^y \quad (x > 0,\; y \in \mathbb{R}).$$

Lause 7.16.

(i) $Da^x = a^x \ln a \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
(ii) $D \log_a x = \dfrac{1}{x \ln a} \quad \forall x \in \,]0,\infty[$.
(iii) $f(x) = a^x$ *on aidosti kasvava bijektio, jos* $a > 1$, *ja aidosti vähenevä bijektio, jos* $0 < a < 1$.
(iv) $f(x) = \log_a x$ *on aidosti kasvava bijektio, jos* $a > 1$, *ja aidosti vähenevä bijektio, jos* $0 < a < 1$.

Todistus. Melko suora seuraus määritelmistä ja monotonisuustestistä 6.16 ja eksponenttifunktion e^x ominaisuuksista ja käänteisfunktion derivoimissäännöstä. $\square$

Listataan vielä lopuksi a^x:n ja $\log_a x$:n perusominaisuuksia seuraavaan lauseeseen, jonka todistus jätetään pääosin lukijalle.

Lause 7.17.

(i) $a^{x+y} = a^x a^y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

(ii) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y \quad \forall x, y \in\,]0, \infty[$.

(iii) $(a^x)^y = a^{xy} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

(iv) $\log_a(x^y) = y \log_a x \quad \forall x \in\,]0, \infty[,\ y \in \mathbb{R}$.

(v) $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y \quad \forall x, y \in\,]0, \infty[$.

(vi) $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a} \quad \forall x \in\,]0, \infty[$

Todistus. Malliksi kaava (vi). Olkoon siis $x > 0$ ja $a \in\,]0, \infty[\, \setminus \{1\}$. Tällöin

$$y = \log_a x \ \Leftrightarrow\ x = a^y \ \Leftrightarrow\ \ln x = \ln(a^y) \overset{7.14(vi)}{\Leftrightarrow} \ln x = y \ln a \ \Leftrightarrow\ y = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Siten $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$. $\square$

Huomautus 7.18. (Eräitä merkintätapoja)

(i) $\log_e = \ln = \log$

(ii) 10-kantaista logaritmia sanotaan *Briggsin logaritmiksi* ja merkitään $\log_{10} = \lg$.

Esimerkki 7.19. Laske raja-arvo $\lim\limits_{x \to 0+} x \ln x$.

Ratkaisu. Raja-arvo $\lim\limits_{x \to 0+} x \ln x$ voidaan kirjoittaa muotoon $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$, jolloin se on tyyppiä $\frac{-\infty}{\infty}$, johon voi koettaa soveltaa l'Hospitalin sääntöä muodossa 6.39. Nyt $D \ln x = \frac{1}{x}$ ja $D\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}$, joten lauseesta 6.39 seuraa, että

$$\underline{\underline{\lim_{x \to 0+} x \ln x}} = \lim_{x \to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0+} (-x) = \underline{\underline{0}}.$$

Monimutkaisemmat potenssilausekkeet $f(x)^{g(x)}$. Jos $f(x) > 0$ ja $g(x) \in \mathbb{R}$, voidaan muodostaa potenssilauseke

$$h(x) = f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln(f(x))}.$$

Funktio h ei ole potenssifunktio eikä eksponenttifunktio, joten sitä ei saa derivoida niiden derivoimissäännöillä, vaan

$$h'(x) = D[g(x) \ln(f(x))] e^{g(x) \ln(f(x))} = h(x) \left[g'(x) \ln(f(x)) + \frac{g(x)}{f(x)} \cdot f'(x) \right]$$

pisteissä x, joissa sekä f että g ovat derivoituvia.

Esimerkki 7.20. Funktio $f(x) = x^x$ on määritelty välillä $]0, \infty[$ kaavalla $f(x) = e^{x \ln x}$ ja

$$f'(x) = De^{x \ln x} = x^x D(x \ln x) = x^x(\ln x + 1) = 0 \;\Leftrightarrow\; \ln x = -1 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{1}{e}$$

Derivaatan merkkikaavio on

$f'(x)$	$- - - - - - -$	$\bullet$	$+ + + + + + +$
$f(x)$	$\searrow$	$\frac{1}{e}$	$\nearrow$

Siten $f(\frac{1}{e}) = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}} \approx 0.692206$ on f:n globaali minimi välillä $]0, \infty[$. Koska $\lim\limits_{x \to 0+} x \ln x = 0$ (esim. 7.19), on $\lim\limits_{x \to 0+} x^x = \lim\limits_{x \to 0+} e^{x \ln x} = e^0 = 1$ lauseen 3.8 nojalla. Toisaalta $\lim\limits_{x \to \infty} x^x = \lim\limits_{x \to \infty} e^{x \ln x} = \infty$. Koska f on derivoituvana jatkuva, voimme päätellä, että $f(]0, \infty[) = \left[\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}, \infty\right[$.

Seuraava lause kytkee lopullisesti yhteen aiemmin esitetyt e:n kaksi määritelmää

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots \,.$$

Lause 7.21.

(i) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

(ii) $e^x = \lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Todistus. (i) Merkitään $f(x) = \ln(1 + x)$, jolloin $f'(x) = \dfrac{1}{1 + x}$ ja siis erityisesti $f'(0) = 1$. Nyt

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x + 1)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(x + 1) - \ln 1}{x} = f'(0) = 1.$$

Sijoittamalla $y = \frac{1}{x}$ saadaan

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^x = e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = e^{\frac{\ln(1+y)}{y}}.$$

Koska $x \to \infty \;\Rightarrow\; y = \frac{1}{x} \to 0+$ ja $x \to -\infty \;\Rightarrow\; y = \frac{1}{x} \to 0-$ ja koska $\dfrac{\ln(1 + y)}{y} \to 1$, kun $y \to 0$, saamme lausetta 3.8 käyttäen ($t \mapsto e^t$ on jatkuva pisteessä $t = 1$), että

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{\lim\limits_{y \to 0} \frac{\ln(1+y)}{y}} = e^1 = e.$$

(ii) Väite on selvästi tosi, jos $x = 0$, sillä $e^0 = 1 = \lim_{n\to\infty} 1^n$.
Jos $x \neq 0$, voidaan kirjoittaa

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \left(\left(1+\frac{1}{\frac{n}{x}}\right)^{\frac{n}{x}}\right)^x \to e^x, \text{ kun } n\to\infty,$$

sillä kohdasta (i) seuraa, että $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{x}}\right)^{\frac{n}{x}} = e$, koska $n\to\infty \;\Rightarrow\; \frac{n}{x}\to\infty$, jos $x>0$ ja $\frac{n}{x}\to-\infty$, jos $x<0$. Tässä tarvitaan lisäksi perusteluksi potenssifunktion $y\mapsto y^x$ jatkuvuus kohdassa $y=e$ (x on kiinteä tässä tarkastelussa). $\square$

Esimerkki 7.22.

(i) $$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{3x} = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{(\frac{x}{-2})}\right)^{(\frac{x}{-2})}\right)^{-6} \overset{7.21(i)}{=} e^{-6},$$

sillä $y\mapsto y^{-6}$ on jatkuva kohdassa e ja $x\to\infty \;\Rightarrow\; \dfrac{x}{-2}\to-\infty$.

(ii) $$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{3n} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{-2}{n}\right)^{n}\right)^{3} \overset{7.21(ii)}{=} \left(e^{-2}\right)^3 = e^{-6},$$

sillä $y\mapsto y^3$ on jatkuva kohdassa e^{-2}.

Raja-arvoja l'Hospitalin säännöllä. Esimerkissä 7.22 laskettiin suoraan kaksi tyyppiä "1^∞" olevaa raja-arvolaskua. Näihin ja eräisiin muihinkin tilanteisiin voi tietysti koettaa soveltaa myös l'Hospitalin sääntöä muokkaamalla ongelmallinen "kielletty muoto" ensin l'Hospitalin säännön edellyttämäksi muodoksi "$\frac{0}{0}$" tai "$\frac{\infty}{\infty}$". Eräs esimerkki tästä olikin jo 7.19:ssä laskettu raja-arvo $\lim\limits_{x\to0+} x\ln x = 0$. Muutama lisäesimerkki:

Esimerkki 7.23. (i) $\lim\limits_{x\to1-} x^{\frac{1}{1-x}} = \lim\limits_{x\to1-} e^{\frac{\ln x}{1-x}}$, ja tässä $\dfrac{\ln x}{1-x}$ on l'Hospitalin säännön edellyttämä tyyppiä "$\frac{0}{0}$", kun $x\to1-$. Siten

$$\lim_{x\to1-}\frac{\ln x}{1-x} = \lim_{x\to1-}\frac{\frac{1}{x}}{-1} = -1 \qquad \text{ja} \qquad \lim_{x\to1-} x^{\frac{1}{1-x}} = \lim_{x\to1-} e^{\frac{\ln x}{1-x}} = e^{-1} = \underline{\underline{\frac{1}{e}}}.$$

(ii) $\lim\limits_{x\to0+}(\sqrt{x})^x = \lim\limits_{x\to0+} e^{x\ln\sqrt{x}}$ ja tässä $x\ln\sqrt{x} = \frac{1}{2}x\ln x\to0$, kun $x\to0+$ kuten esimerkissä 7.19, joten $\lim\limits_{x\to0+}(\sqrt{x})^x = e^0 = \underline{\underline{1}}$.

(iii) $$\overbrace{\lim_{x\to1+}(x-1)^{-\ln x}}^{\text{muoto } 0^0} = \lim_{x\to1+} e^{-(\ln x)\ln(x-1)}.$$

Tässä $\lim\limits_{x\to 1+}\big(-(\ln x)\ln(x-1)\big) = \lim\limits_{x\to 1+}\dfrac{\ln(x-1)}{-\frac{1}{\ln x}}$ on tyyppiä "$\frac{-\infty}{-\infty}$", joten l'Hospitalin sääntöjä 6.39 ja 6.34 soveltaen saadaan

$$\lim_{x\to 1+}\frac{\ln(x-1)}{-\frac{1}{\ln x}} \overset{\text{l'H 6.39}}{=} \lim_{x\to 1+}\frac{\frac{1}{x-1}}{\frac{1}{(\ln x)^2}\cdot\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1+}\frac{x(\ln x)^2}{x-1} \overset{\text{l'H 6.34}}{=} \lim_{x\to 1+}\frac{D(x(\ln x)^2)}{1}$$

$$= \lim_{x\to 1+}\frac{(\ln x)^2 + 2x\ln x\cdot\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to 1+}\big((\ln x)^2 + 2\ln x\big) = 0,$$

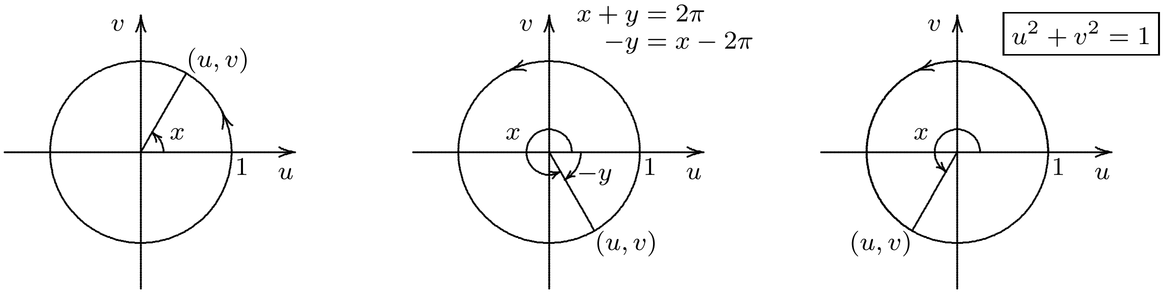
joten alkuperäinen raja-arvo on $e^0 = \underline{\underline{1}}$.

(iv) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}\ln x} = e^0 = \underline{\underline{1}}$, sillä $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x} = 0$ lauseen 7.11 (vi) nojalla.

(v) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}\right) = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}$ on tyyppiä "$\frac{0}{0}$", joten voi yrittää l'Hospitalin sääntöä. Sovelletaan sitä kahdesti

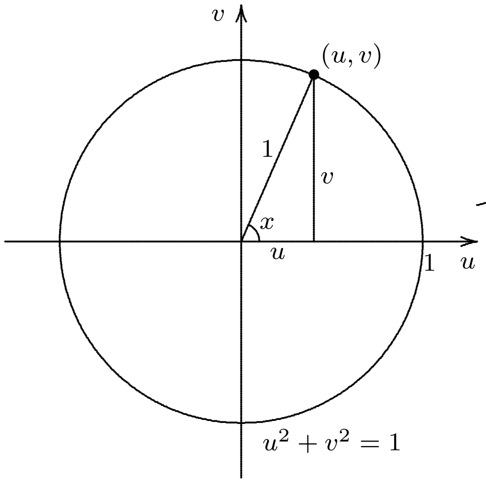
$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x} \overset{\text{l'H 6.34}}{=} \lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x + \frac{x-1}{x}} = \lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x + 1 - \frac{1}{x}} \overset{\text{l'H 6.34}}{=} \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}.$$

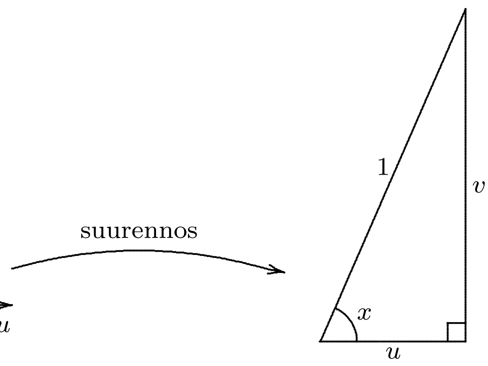
Trigonometriset funktiot. Määrittelemme koulukurssista tutut trigonometriset funktiot $\sin:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\cos:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\tan:\{x\in\mathbb{R}\mid x\neq\frac{\pi}{2}+n\pi\ (n\in\mathbb{Z})\}\to\mathbb{R}$ ja $\cot:\{x\in\mathbb{R}\mid x\neq n\pi\ (n\in\mathbb{Z})\}\to\mathbb{R}$ yksikköympyrän avulla absoluuttista kulmamittaa (radiaanit; täysikulma $360°$ on yksikköympyrän kehä $= 2\pi$ radiaania) käyttäen seuraavien kuvien ilmaisemalla tavalla:



$$\sin x = v,\quad \cos x = u,\quad \tan x = \frac{v}{u}\ (u\neq 0),\quad \cot x = \frac{u}{v}(v\neq 0)$$

Kulma x on yksikköympyrän $u^2+v^2=1$ pisteen (u,v) ja positiivisen u-akselin välinen kulma positiiviseen kiertosuuntaan eli vastapäivään mitattuna. Sen suuruus radiaaneissa on sama kuin pisteestä $(1,0)$ pisteeseen (u,v) ulottuvan ympyränkaaren pituus. Negatiiviset kulmat saadaan vastaavasti kulkemalla myötäpäivään. Sallimalla useampia kierroksia voidaan kulman x ajatella olevan mikä tahansa reaaliluku, jolloin yllä esitelty sinin, kosinin, tangentin ja kotangentin määrittely tuottaa näille funktioille yllä mainitut määrittelyjoukot. Määritelmien yhteys alkeistrigonometriaan on terävän kulman x, $0<x<\frac{\pi}{2}$ (eli asteissa $0°<x<90°$), tapauksessa välittömästi selvä kuviosta





$\sin x = \frac{v}{1} = v$, $\cos x = \frac{u}{1} = u$

$\tan x = \frac{v}{u} = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\cot x = \frac{u}{v} = \frac{\cos x}{\sin x}$

Koska $u^2 + v^2 = 1$, määritelmästä saadaan heti, että $\sin^2 x + \cos^2 x = 1\ \forall x \in \mathbb{R}$. Kokoamme tämän ja eräitä muita trigonometristen funktioiden ominaisuuksia seuraavaan lauseeseen. Osa sen väitteistä seuraa välittömästi määritelmästä, osa vaatisi todistukseen alkeistrigonometrian taustatarkasteluja. Sivuutamme nämä laskut aikaa vievinä.

Lause 7.24. *(Trigonometristen funktioiden ominaisuuksia.)*

(i) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $|\sin x| \leq 1$, $|\cos x| \leq 1$.

(ii) $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$.

(iii) $\sin(-x) = -\sin x, \quad \cos(-x) = \cos x,$
$\tan(-x) = -\tan x, \quad \cot(-x) = -\cot x.$

(iv) $\sin(x + 2n\pi) = \sin x$ *ja* $\cos(x + n2\pi) = \cos x \quad \forall n \in \mathbb{Z}$
$\tan(x + n\pi) = \tan x$ *ja* $\cot(x + n\pi) = \cot x \quad \forall n \in \mathbb{Z}$
(Sinin ja kosinin perusjakso on 2π, tangentin ja kotangentin perusjakso on π.)

(v) $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$
(ylemmät merkit vastaavat toisiaan, samoin alemmat toisiaan)

(vi) $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$

(vii) $\tan(x \pm y) = \dfrac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$

(viii) $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

(ix) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$

(x) $\tan 2x = \dfrac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$

(xi) $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$ *ja* $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$

(xii) $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x), \quad \sin(\pi - x) = \sin x$
$-\cos(x + \frac{\pi}{2}) = \sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x), \quad \cos(\pi - x) = -\cos x$

(xiii) $\sin x + \sin y = 2 \sin \dfrac{x+y}{2} \cos \dfrac{x-y}{2}$

(xiv) $\cos x + \cos y = 2 \cos \dfrac{x+y}{2} \cos \dfrac{x-y}{2}$

(xv) $\cos x - \cos y = -2 \sin \dfrac{x+y}{2} \sin \dfrac{x-y}{2}$

(xvi) $\sin x - \sin y = 2 \sin \dfrac{x-y}{2} \cos \dfrac{x+y}{2}$

(xvii) *Trigonometristen funktioiden merkit kulman x loppukyljen sijaintineljänneksen mukaan (kun alkukylki on positiivisella u-akselilla):*

$$\underset{\sin}{\begin{array}{c|c} + & + \\ \hline - & - \end{array}} \qquad \underset{\cos}{\begin{array}{c|c} - & + \\ \hline - & + \end{array}} \qquad \underset{\tan}{\begin{array}{c|c} - & + \\ \hline + & - \end{array}} \qquad \underset{\cot}{\begin{array}{c|c} - & + \\ \hline + & - \end{array}}$$

Todistus. Kaavat (i)–(iv) seuraavat heti määritelmistä, samoin merkkikaaviot (xvii). Yhteen- ja vähennyslaskukaavojen (v)–(vii) todistus joudutaan sivuuttamaan. Loput kaavat seuraavat niistä ja määritelmistä. Johdetaan malliksi (ix) ja sitten (xi), joka on hyödyllinen integraalilaskennassa.

Kosinin yhtenlaskukaavasta (vi) ja kaavasta (i) saadaan, että

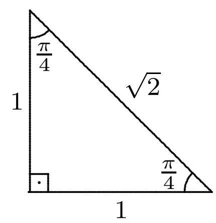
$$\begin{aligned} \cos 2x &= \cos(x + x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x \\ &= \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) \\ &= 2\cos^2 x - 1 = 2(1 - \sin^2 x) - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2 x \end{aligned}$$

eli kaava (ix). Sen avulla saadaan edelleen kaavat (xi):

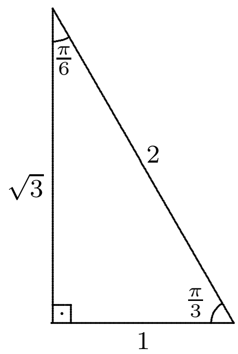
$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \;\Rightarrow\; \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\sin 2x = 1 - 2\sin^2 x \;\Rightarrow\; \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}. \quad \square$$

Esimerkki 7.25. (i) Muistikolmioiden



ja



antamien arvojen $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{4}$, $\tan\frac{\pi}{4} = 1 = \cot\frac{\pi}{4}$, $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$, $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3}$ ja $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \cot\frac{\pi}{3}$ avulla saadaan laskettua mm. seuraavaa:

$$
\begin{aligned}
\sin\frac{3\pi}{4} &= \sin(\pi - \frac{\pi}{4}) \overset{\text{(xii)}}{=} \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (= \sin 135^\circ), \\
\cos\frac{3\pi}{4} &= \cos(\pi - \frac{\pi}{4}) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad (= \cos 135^\circ), \\
\sin\frac{7\pi}{6} &= \sin(\frac{7\pi}{6} - 2\pi) = \sin(-\frac{5\pi}{6}) = -\sin\frac{5\pi}{6} = -\sin(\pi - \frac{\pi}{6}) = \\
&= -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2} \quad (= \sin 210^\circ) \text{ ja} \\
\cos\frac{7\pi}{6} &= \cos(-\frac{5\pi}{6}) = \cos\frac{5\pi}{6} = \cos(\pi - \frac{\pi}{6}) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (= \cos 210^\circ)
\end{aligned}
$$

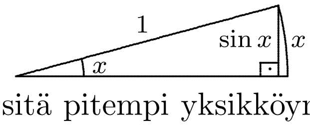
(ii)
$$
\begin{cases}
\sin(n\pi) = 0 = \cos(\frac{\pi}{2} + n\pi) \quad \forall n \in \mathbb{Z} \\
\cos(n\pi) = (-1)^n = \sin(\frac{\pi}{2} + n\pi) \quad \forall n \in \mathbb{Z} \\
x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \;\Rightarrow\; |\sin x| < 1 \text{ ja } \cos x \neq 0 \\
x \neq n\pi \;\Rightarrow\; |\cos x| < 1 \text{ ja } \sin x \neq 0
\end{cases}
$$

(iii) Jos $\sin x = \frac{3}{5}$ ja $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, niin

$$
\cos x = {}^{(\pm)}\sqrt{1 - \sin^2 x} = -\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\frac{4}{5},
$$

sillä "toisen neljänneksen kulman" kosini on negatiivinen (7.24 (xvii)). Edelleen saadaan, että

$$
\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4} \qquad \text{ja} \qquad \cot x = -\frac{4}{3}.
$$

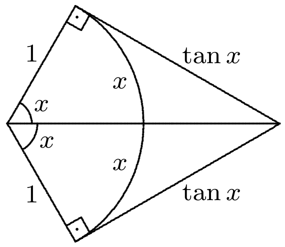
Kuviosta 

voisi arvella, että pienillä x:n arvoilla kateetti $\sin x$ ja sitä pitempi yksikköympyrän kaari x ovat "yhä paremmin" likimain samat: $0 < \sin x \lesssim x$, kun $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ on pieni. Todistamme tämän arvauksen oikeaksi.

Lause 7.26. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1.$

Todistus. Koska $\sin(-x) = -\sin x$, riittää todistaa, että $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. Jos $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, nähtiin jo yllä, että $0 < \sin x < x$. Toisaalta $0 < x < \tan x$, sillä ympyrän kaaren pituus on pienempi kuin sen ympäri piirretyn murtoviivan pituus. (Harjoitustehtävä: Pohdi tämän väitteen todistusta!)

Kuva:



Siis $0 < \sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}$, kun $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Tästä saadaan, että $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$ ja edelleen $0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x$. Tässä $1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$ (7.24 (ix)), joten

$$0 < 1 - \cos x < 2 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{2} \to 0, \quad \text{kun } x \to 0+ .$$

Siten kuristusperiaatteen nojalla $\lim\limits_{x\to 0+}(1 - \cos x) = 0$ ja edelleen epäyhtälön $0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x$ nojalla $\lim\limits_{x\to 0+}(1 - \frac{\sin x}{x}) = 0$. Siis $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} = 0$. $\square$

Lause 7.27. *Trigonometriset funktiot ovat derivoituvia (jopa C^∞-funktioita) koko määrittelyjoukossaan ja*

(i) $D\sin x = \cos x$

(ii) $D\cos x = -\sin x$

(iii) $D\tan x = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

(iv) $D\cot x = -1 - \cot^2 x = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

Todistus. Todistetaan (i); (iii) ja (iv) saadaan (i):stä ja (ii):stä osamäärän derivoimissäännöllä ja pienellä laskulla ja (ii) (i):stä kaavoja 7.24 (xii) käyttäen.
(i) Olkoon $x_0 \in \mathbb{R}$. Tällöin on

$$\begin{aligned}
\sin x - \sin x_0 &= \sin\left(\frac{x+x_0}{2} + \frac{x-x_0}{2}\right) - \sin\left(\frac{x+x_0}{2} - \frac{x-x_0}{2}\right) = \\
&= \sin\frac{x+x_0}{2}\cos\frac{x-x_0}{2} + \cos\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2} - \sin\frac{x+x_0}{2}\cos\frac{x-x_0}{2} + \\
&\quad + \cos\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2} \\
&= 2\cos\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2}
\end{aligned}$$

(samalla on oleellisesti johdettu kaava 7.24 (xvi), jota olisi halutessaan voinut suoraankin soveltaa).

Voimme nyt laskea sinin derivaatan x_0:ssa erotusosamäärän raja-arvona. Ensin havaitaan, että $\sin x - \sin x_0 \to 0$, kun $x \to x_0$, sillä lauseen 7.26 todistuksen arvioiden nojalla $\sin \frac{x - x_0}{2} \to 0$, kun $x \to x_0$ ja lisäksi $|\cos \frac{x + x_0}{2}| \leq 1$. Siten sini on jatkuva x_0:ssa ja aivan samoin kosini on jatkuva x_0:ssa kaavan 7.24 (xv) seurauksena. Nyt saamme, että

$$\frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \frac{2\cos\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2}}{x - x_0}$$

$$= \cos\frac{x+x_0}{2}\,\frac{\sin\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}} \to \cos x_0 \cdot 1 = \cos x_0, \text{ kun } x \to x_0$$

lauseiden 3.8, 7.26 ja kosinifunktion jatkuvuuden nojalla. Näin ollen $[D \sin x]_{x=x_0} = \cos x_0$, ja kaava (i) on todistettu. $\square$

Esimerkki 7.28. (i) Koska $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ on muotoa "$\frac{0}{0}$", niin tämän raja-arvon laskeminen l'Hospitalin säännöllä:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{D\sin x}{Dx} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1$$

on periaatteessa oikein, muttei hyvän maun mukaista. Pohdi, miksi!

(ii)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan 5x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{3x}{5x}\cdot\frac{1}{\frac{\sin 5x}{5x}}\cdot\cos 5x$$

$$= \frac{3}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{1}{\frac{\sin 5x}{5x}}\cdot\cos 5x = \frac{3}{5}\cdot 1\cdot\frac{1}{1}\cdot 1 = \frac{3}{5}$$

tai sama l'Hospitalin säännön avulla:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan 5x} = \lim_{x\to 0}\frac{D\sin 3x}{D\tan 5x} = \lim_{x\to 0}\frac{3\cos 3x}{5(1+\tan^2 5x)} = \frac{3\cos 0}{5(1+\tan^2 0)} = \frac{3}{5}$$

Esimerkki 7.29. (Sinin ja kosinin Maclaurinin sarjat)

Merkitään $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$. Tällöin $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = \sin x$ ja korkeammissa derivaatoissa samat toistuvat. Erityisesti on

$$\begin{aligned}
f^{(4k+1)}(0) &= \cos 0 = 1,\\
f^{(4k+2)}(0) &= -\sin 0 = 0,\\
f^{(4k+3)}(0) &= -\cos 0 = -1 \quad \text{ja}\\
f^{(4k)}(0) &= \sin 0 = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0
\end{aligned}$$

Sinifunktion Maclaurinin sarja on siis

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots .$$

Vastaavasti lasketaan $g'(x) = -\sin x$, $g''(x) = -\cos x$, $g'''(x) = \sin x$, $g^{(4)}(x) = \cos x$ ja toistumisen nojalla

$$\begin{aligned} g^{(4k+1)}(0) &= -\sin 0 = 0, \\ g^{(4k+2)}(0) &= -\cos 0 = -1, \\ g^{(4k+3)}(0) &= \sin 0 = 0 \quad \text{ja} \\ g^{(4k)}(0) &= \cos 0 = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

Kosinifunktion Maclaurinin sarja on siis

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} x^n = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots .$$

Voi osoittaa, että nämä Maclaurinin sarjat suppenevat kaikkialla kohti f:ää ja g:tä. Saisimme siis sinille ja kosinille vaihtoehtoisen sarjateoriaan pohjautuvan määrittelytavan

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots , \tag{7.30}$$

ja

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots . \tag{7.31}$$

Tällä määrittelytavalla esim. derivaattojen johtaminen on helppoa termeittäin derivoimalla, mutta kytkentä alkeistrigonometriaan on etäämmällä kuin valitsemassamme yksikköympyrään nojaavassa määritelmässä.

Esimerkki 7.32. Laske funktion $f(x) = x\sin(x^2)$ seitsemäs origoderivaatta $f^{(7)}(0)$.

Ratkaisu. Kaavan 7.30 ja lauseen 4.10 nojalla on

$$\begin{aligned} f(x) = x\sin(x^2) &= x(x^2 - \frac{(x^2)^3}{3!} + \frac{(x^2)^5}{5!} - \dots) = x(x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{10!} - \dots) \\ &= x^3 - \frac{x^7}{3!} + \frac{x^{11}}{5!} - \dots \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Yksikäsitteisyyslauseen 5.21 nojalla tämä sarja on f:n Maclaurinin sarja $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Vertaamalla termin x^7 kertoimia saadaan nyt yhtälö $\frac{f^{(7)}(0)}{7!} = -\frac{1}{3!}$, josta

$$\underline{\underline{f^{(7)}(0)}} = -\frac{7!}{3!} = -7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = \underline{\underline{-840}}.$$

Trigonometriset yhtälöt. Käsittelemme lyhyesti muutaman esimerkin avulla trigonometristen yhtälöiden ratkaisemista. Trigonometristen epäyhtälöiden ratkaiseminen palautuu tähän lopuksi suoritettujen merkkitarkastelujen avulla.

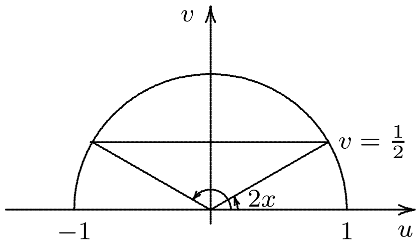
Esimerkki 7.33.

(i)

$$\sin 2x = \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; 2x = \frac{\pi}{6} + 2n\pi \;(n \in \mathbb{Z}) \;\text{ tai }\; 2x = (\pi - \frac{\pi}{6}) + 2n\pi \;(n \in \mathbb{Z}) \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; x = \frac{\pi}{12} + n\pi \;(n \in \mathbb{Z}) \;\text{ tai }\; x = \frac{5\pi}{12} + n\pi \;(n \in \mathbb{Z})$$

Kuva:



$2x = \frac{\pi}{6}$ ja $2x = \frac{5\pi}{6}$ ovat ainoat välin $[0, 2\pi]$ kulmat, joiden sini $= \frac{1}{2}$

(ii)

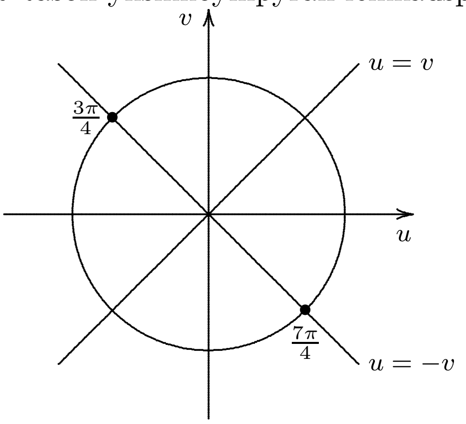
$$\cos^2 x + \frac{1}{2}\sin 2x = 0 \overset{7.24(\text{viii})}{\Leftrightarrow} \cos^2 x + \frac{1}{2} \cdot 2\sin x \cos x = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \cos x(\cos x + \sin x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \cos x = 0 \;\text{ tai }\; \cos x = -\sin x \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; x = \frac{\pi}{2} + n\pi \;(n \in \mathbb{Z}) \;\text{ tai }\; x = \frac{3\pi}{4} + n\pi \;(n \in \mathbb{Z}).$$

Viimeisen ekvivalenssin perusteluksi voi käyttää 7.25 (ii):ta, jaksollisuutta ja sitä, että välillä $[0, 2\pi]$ ehto $u = \cos x = -\sin x = -v$ merkitsee, että kulman x loppukyljen ja uv-tason yksikköympyrän leikkauspiste saadaan yhtälöparista

Kuva:



$$\begin{cases} u^2 + v^2 = 1 \\ u = -v, \end{cases}$$

jolloin vastaava kulma x on $\frac{3\pi}{4}$ tai $\frac{7\pi}{4}$.

Esimerkki 7.34. (Syksyn 2006 pitkän matematiikan ylioppilaskirjoitusten tehtävä 6.) Määritä funktion $f(x) = \cos^2 x + \sin x$ suurin ja pienin arvo.

Tapa 1. Koska f on 2π-jaksoinen ja jatkuva, on

$$f(\mathbb{R}) = f([0, 2\pi]) = [m, M], \text{ missä } m = \min(f(\mathbb{R})) \text{ ja } M = \max(f(\mathbb{R})).$$

Riittää siis tutkia f:ää välillä $[0, 2\pi]$. Nyt

$$f'(x) = -2\cos x \sin x + \cos x = \cos x(1 - 2\sin x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \cos x = 0 \text{ tai } \sin x = \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow$$

$$\overset{0<x<2\pi}{\Leftrightarrow} x = \frac{\pi}{2} \text{ tai } x = \frac{3\pi}{2} \text{ tai } x = \frac{\pi}{6} \text{ tai } x = \frac{5\pi}{6}, \text{ joten}$$

$$m, M \in \Big\{f(0), f(2\pi), f(\tfrac{\pi}{2}), f(\tfrac{3\pi}{2}), f(\tfrac{\pi}{6}), f(\tfrac{5\pi}{6})\Big\} = \Big\{1, 1, 1, -1, \tfrac{5}{4}, \tfrac{5}{4}\Big\} \text{ ja}$$

$\underline{\underline{m = -1,\ M = \tfrac{5}{4}}}$.

Tapa 2. Funktio $f(x) = \cos^2 x + \sin x = 1 - \sin^2 x + \sin x = -\sin^2 x + \sin x + 1$ saa samat arvot $\mathbb{R}$:ssä kuin funktio $g(t) = -t^2 + t + 1$ välillä $[-1, 1]$. Koska g on jatkuva, $\exists m = \min(g([-1, 1])) = \min(f(\mathbb{R}))$ ja $\exists M = \max(g([-1, 1])) = \max(f(\mathbb{R}))$. Nyt $g'(t) = -2t + 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; t = \frac{1}{2} \in [-1, 1]$ ja

$$m, M \in \Big\{g(-1), g(\tfrac{1}{2}), g(1)\Big\} = \Big\{-1, \tfrac{5}{4}, 1\Big\} \text{ joten } \underline{\underline{m = -1,\ M = \tfrac{5}{4}}}.$$

Arkusfunktiot. Trigonometristen funktioiden sopivilla rajoittumilla on käänteisfunktiot, joita kutsutaan *arkusfunktioiksi*.

Funktio $f(x) = \sin x$ on välillä $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ jatkuva ja aidosti kasvava, sillä sen derivaatta $f'(x) = \cos x > 0 \ \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Lisäksi $f([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) = [-1, 1]$, joten f:n rajoittumalla $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$, on välillä $[-1, 1]$ määritelty jatkuva ja aidosti kasvava käänteisfunktio

$$f^{-1} = \overline{\text{arc}}\sin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],$$

arkussinin päähaara. Kaikki arkussinin *haarat*

$$\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi] \ (n \in \mathbb{Z}),$$

saadaan sinin rajoittumista $f|[-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi]$ samalla tavalla. Puolet niistä on aidosti kasvavia (n parillinen), ja puolet aidosti väheneviä (n pariton).

Funktio $g(x) = \cos x$ on välillä $[0, \pi]$ jatkuva ja aidosti vähenevä, sillä $g'(x) = -\sin x < 0 \ \forall x \in]0, \pi[$. Sen rajoittumalla $g : [0, \pi] \to g([0, \pi]) = [-1, 1]$, $g(x) = \cos x$, on välillä $[-1, 1]$ määritelty jatkuva ja aidosti vähenevä käänteisfunktio, *arkuskosinin päähaara*

$$g^{-1} = \overline{\text{arc}}\cos : [-1, 1] \to [0, \pi],$$

Muut arkuskosinin *haarat* saadaan rajoittumien $g|[n\pi, (n+1)\pi]$ käänteisfuktioina; puolet niistä on aidosti väheneviä (n parillinen), ja puolet aidosti kasvavia (n pariton).

Huomautus 7.35. (i) Kirjallisuudessa merkintä arcsin liittyy yleensä vain arkussinin kasvaviin haaroihin ja merkintä arccos vain arkuskosinin väheneviin haaroihin.
(ii) Jos $x \in [-1, 1]$, niin päähaarojen määritelmä on siis

$$\begin{cases} y = \overline{\text{arc}} \sin x \ \Leftrightarrow \ -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \ \text{ja} \ \sin y = x, \\ y = \overline{\text{arc}} \cos x \ \Leftrightarrow \ 0 \leq y \leq \pi \ \text{ja} \ \cos y = x. \end{cases} \tag{7.36}$$

Lause 7.37. $\overline{\text{arc}} \sin x + \overline{\text{arc}} \cos x = \frac{\pi}{2} \ \forall x \in [-1, 1]$.

Todistus.

$$y = \overline{\text{arc}} \cos x \overset{(7.36)}{\Rightarrow} -y \in [-\pi, 0] \ \Rightarrow \ \frac{\pi}{2} - y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \ \text{ja} \ \sin(\frac{\pi}{2} - y) \overset{7.24}{=} \cos y = x,$$

joten $\frac{\pi}{2} - y = \overline{\text{arc}} \sin x$, ja väite seuraa. □

Lause 7.38.

(i) $$D \, \overline{\text{arc}} \sin x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \forall x \in \left]-1, 1\right[,$$

(ii) $$D \, \overline{\text{arc}} \cos x = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \forall x \in \left]-1, 1\right[.$$

Todistus. Koska kaava (ii) seuraa heti lauseesta 7.37 ja kaavasta (i), riittää todistaa (i).

Olkoon siis $-1 < x < 1$, jolloin kulma $y = \overline{\text{arc}} \sin x$ toteuttaa ehdon $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. Käänteisfunktion derivoimissäännön 5.15 nojalla on

$$D \, \overline{\text{arc}} \sin x = \frac{1}{D \sin y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

sillä $\cos y = {}_{(}\overset{+}{-}{}_{)} \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$, koska $\sin y = x$ ja $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. □

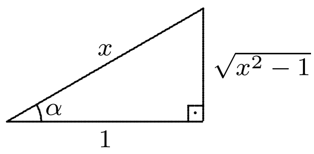
Esimerkki 7.39.

(i) Äskeisen lauseen todistuksessa laskettiin jo $\cos(\overline{\text{arc}} \sin x) = \sqrt{1 - x^2}$. Samalla tavalla saadaan, että $\sin(\overline{\text{arc}} \cos x) = \sqrt{1 - x^2}$.

(ii) $\overline{\text{arc}} \sin(-1) = -\frac{\pi}{2}$, $\overline{\text{arc}} \sin 1 = \frac{\pi}{2}$, $\overline{\text{arc}} \cos(-1) = \pi$, $\overline{\text{arc}} \cos 1 = 0$,
$\overline{\text{arc}} \sin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, sillä $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2}$ ja $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$,
$\overline{\text{arc}} \cos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, sillä $0 < \frac{\pi}{3} < \pi$ ja $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$,
$\overline{\text{arc}} \sin \frac{1}{\sqrt{2}} = \overline{\text{arc}} \cos \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$.

(iii) $\overline{\text{arc}} \sin(-x) = -\overline{\text{arc}} \sin x \quad \forall x \in [-1, 1]$,
$\overline{\text{arc}} \cos(-x) = \pi - \overline{\text{arc}} \cos x \quad \forall x \in [-1, 1]$,
sillä $0 \leq y \leq \pi \ \Rightarrow \ 0 \leq \pi - y \leq \pi$ ja $\cos(\pi - y) = -\cos y$.

(iv) Jos $x > 1$, niin kuviosta (jossa $\alpha = \overline{\text{arc}} \cos \frac{1}{x}$)



$$\cos\alpha = \frac{1}{x},$$

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$$

nähdään, että $\overline{\text{arc}}\cos\frac{1}{x} = \overline{\text{arc}}\sin\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$

Esimerkki 7.40. Määritä funktion $f(x) = \overline{\text{arc}}\sin(2x\sqrt{1-x^2})$ suurin ja pienin arvo välillä $[-1,1]$.

Ratkaisu. Ensiksi havaitaan, että f todella on määritelty arvoilla $-1 \le x \le 1$, sillä tällöin

$$1 - x^2 \ge 0 \ \text{ ja } \ |2x\sqrt{1-x^2}| \le 1$$

(Jälkimmäinen epäyhtälö:

$$|2x\sqrt{1-x^2}| \le 1 \ \Leftrightarrow \ 4x^2(1-x^2) \le 1 \ \Leftrightarrow \ 4x^4 - 4x^2 + 1 \ge 0 \ \Leftrightarrow \ (2x^2-1)^2 \ge 0$$

missä viimeinen ehto on totta $\forall x \in \mathbb{R}$.)

Jatkuvien funktioiden $x \mapsto 2x\sqrt{1-x^2}$ ja $y \mapsto \overline{\text{arc}}\sin y$ yhdistettynä funktiona f on jatkuva $[-1,1]$:ssä, joten $\exists M = \max f([-1,1])$ ja $\exists m = \min f([-1,1])$. Yhdistettyjen funktioiden derivoimissäännön nojalla on arvoilla $-1 < x < 1$, $x \ne \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= D\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-4x^2(1-x^2)}} = \frac{2\sqrt{1-x^2} + \frac{2x(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-4x^2+4x^4}} \\ &= \frac{2-4x^2}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{(1-2x^2)^2}} = \frac{2(1-2x^2)}{\pm(1-2x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pm 2}{\sqrt{1-x^2}} \ne 0, \end{aligned}$$

missä rajoitus $x \ne \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ tulee siitä, että $\overline{\text{arc}}\sin$ ei ole derivoituva pisteissä ± 1, jotka ovat lausekkeen $2x\sqrt{1-x^2}$ arvot pisteissä $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Näin ollen

$$m, M \in \{f(-1), f(-\frac{1}{\sqrt{2}}), f(\frac{1}{\sqrt{2}}), f(1)\} = \{0, -\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}, 0\},$$

joten

$$\underline{\underline{M = f(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \overline{\text{arc}}\sin 1 = \frac{\pi}{2} \ \text{ ja } \ m = f(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = \overline{\text{arc}}\sin(-1) = -\frac{\pi}{2}.}}$$

Pelkkiä päätepistearvoja ja derivaatan nollakohtia tutkimalla olisi saatu virheellisesti f vakiofunktioksi 0. Tässä siis suurin ja pienin tulivat kohdissa $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, joissa f ei (ehkä) ole derivoituva. (Voidaan osoittaa, että $\nexists f'(\pm\frac{1}{\sqrt{2}})$. Syy: funktion f määrittely ei sallinut arkussinin haaran vaihtoa, kun $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ $(y = \pm 1)$. Sijoituksella $x = \cos t$ nähdään, että

$$f(x) = f(\cos t) = \overline{\mathrm{arc}}\sin(\sin 2t)\ (0 \le t \le \pi),$$

sillä $\sqrt{1-\cos^2 t} = \sin t\ \forall t \in [0,\pi]$. Suurin arvo saadaan, kun $2t = \frac{\pi}{2}$ eli $t = \frac{\pi}{4}$, jolloin $x = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Tangenttifunktion rajoittuma

$$f : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \tan x,$$

on aidosti kasvava jatkuva bijektio, sillä $f'(x) = 1+\tan^2 x > 0$ ja $\lim\limits_{x\to\pm\frac{\pi}{2}} f(x) = \pm\infty$. Näin ollen sillä on käänteisfunktio

$$f^{-1} = \overline{\mathrm{arc}}\tan : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,$$

arkustangentin päähaara. Se on jatkuva ja aidosti kasvava ja derivaatta

$$D\,\overline{\mathrm{arc}}\tan x = \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{7.41}$$

saadaan käänteisfunktion derivoimissäännöllä:

$$D\,\overline{\mathrm{arc}}\tan x = \frac{1}{D\tan y} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2},$$

kun $x = \tan y \in \mathbb{R}$ ja $y = \overline{\mathrm{arc}}\tan x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Muut arkustangentin haarat ovat funktiot

$$\arctan x = \overline{\mathrm{arc}}\tan x + n\pi \quad (n \in \mathbb{Z});$$

ne ovat rajoittumien $\tan\big|\left]-\frac{\pi}{2}+n\pi, \frac{\pi}{2}+n\pi\right[$ käänteisfunktiot. Ne ovat kaikki aidosti kasvavia ja $D\arctan x = \dfrac{1}{1+x^2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Kotangenttifunktion rajoittuman

$$g :]0,\pi[\to \mathbb{R},\ g(x) = \cot x,$$

käänteisfunktio on arkuskotangentin päähaara $\overline{\mathrm{arc}}\cot x$:

$$y = \overline{\mathrm{arc}}\cot x \ \Leftrightarrow\ \cot y = x \ \text{ ja }\ 0 < y < \pi,$$

Kaavaa $\overline{\mathrm{arc}}\sin x + \overline{\mathrm{arc}}\cos x = \frac{\pi}{2}$ vastaa aivan samoin todistettava kaava

$$\overline{\mathrm{arc}}\tan x + \overline{\mathrm{arc}}\cot x = \frac{\pi}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \tag{7.42}$$

josta saadaan edelleen derivaatta

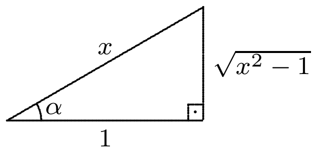
$$D\,\overline{\mathrm{arc}}\cot x = -\frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\overline{\mathrm{arc}}\tan x$:n derivaatan avulla.

Esimerkki 7.43.

(i) $\overline{\text{arc}}\tan 1 = \frac{\pi}{4} = \overline{\text{arc}}\cot 1$,
$\overline{\text{arc}}\tan(-1) = -\frac{\pi}{4}$,
$\overline{\text{arc}}\cot(-1) = \frac{3\pi}{4}$ $(= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$, ks. 7.42),
$\overline{\text{arc}}\tan\sqrt{3} = \frac{\pi}{3} = \overline{\text{arc}}\cot\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\overline{\text{arc}}\tan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6} = \overline{\text{arc}}\cot\sqrt{3}$

(ii) Jos $x > 1$, niin kuviosta (jossa $\alpha = \overline{\text{arc}}\cos\dfrac{1}{x}$)



$$\cos\alpha = \frac{1}{x},$$

$$\tan\alpha = \sqrt{x^2-1}$$

nähdään, että $\overline{\text{arc}}\cos\dfrac{1}{x} = \overline{\text{arc}}\tan\sqrt{x^2-1}$