Tehtävän 1 ratkaisu. Geometristen sarjojen teorian perusteella

$$f(x) = \frac{x^2}{2-3x^3} = \frac{\frac{x^2}{2}}{1-\frac{3x^3}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{2}\Big(\frac{3x^3}{2}\Big)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2^{n+1}} x^{3n+2}, \tag{1}$$

kun tämän geometrisen sarja ensimmäinen termi on nolla tai suhdeluvun itseisarvo on pienempi kuin yksi eli

$$\frac{x^2}{2} = 0 \ \text{ tai } \ \left|\frac{3x^3}{2}\right| < 1 \ \Leftrightarrow\ |x| < \sqrt[3]{\frac{2}{3}}.$$

Potenssisarjojen yksikäsitteisyyslauseen (Lause 5.21) perusteella kaavan (1) potenssisarjassa x^k:n, $k \in \mathbb{N}_0$, kerroin on

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!}.$$

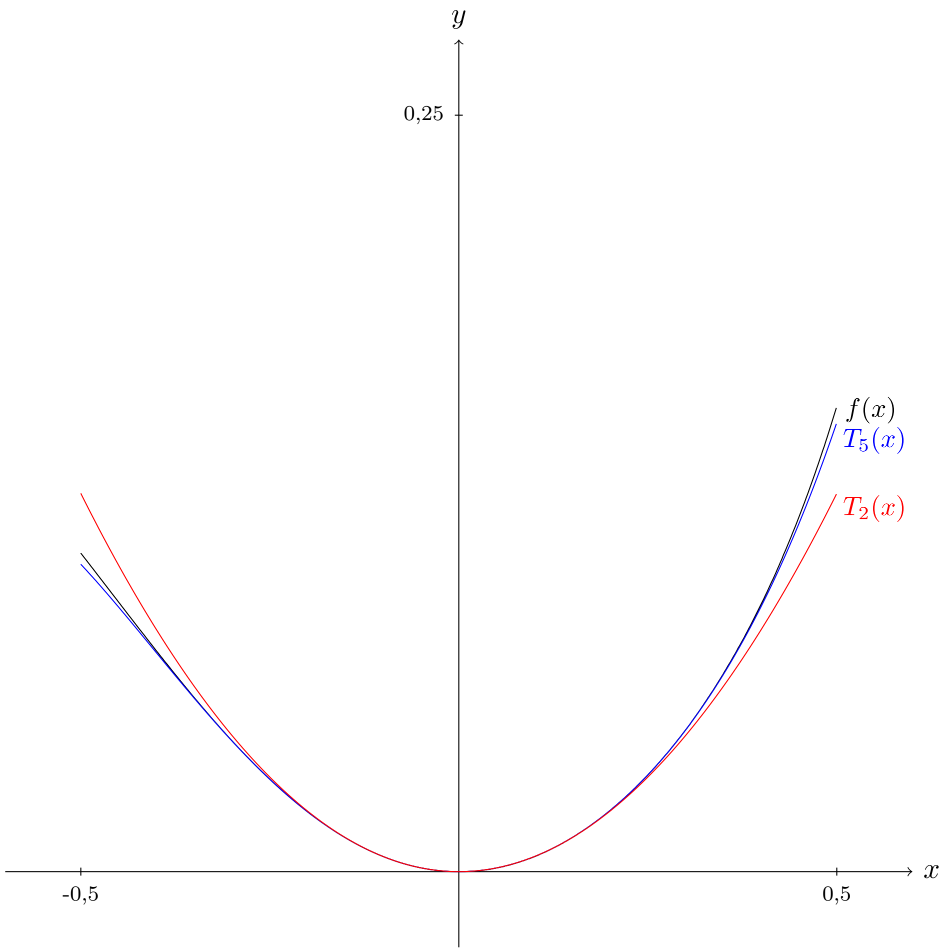
Niinpä kaavan (1) potenssisarjasta voidaan tehdä seuraavat päätelmät.

$$\begin{aligned}
&x^1\text{:n kerroin on 0, joten } \frac{f^{(1)}(0)}{1!} = 0 \text{ ja } f^{(1)}(0) = 0,\\
&x^2\text{:n kerroin on } \frac{3^0}{2^{0+1}},\text{ joten } \frac{f^{(2)}(0)}{2!} = \frac{1}{2} \text{ ja } f^{(2)}(0) = 1,\\
&x^3\text{:n kerroin on 0, joten } \frac{f^{(3)}(0)}{3!} = 0 \text{ ja } f^{(3)}(0) = 0,\\
&x^4\text{:n kerroin on 0, joten } \frac{f^{(4)}(0)}{4!} = 0 \text{ ja } f^{(4)}(0) = 0 \text{ ja}\\
&x^5\text{:n kerroin on } \frac{3^1}{2^{1+1}},\text{ joten } \frac{f^{(5)}(0)}{5!} = \frac{3}{4} \text{ ja } f^{(5)}(0) = 90.
\end{aligned}$$

Tehtävän 2 ratkaisu. Edellisen tehtävän funktion $f(x)$ asteen m, $2 \leqslant m \leqslant 5$, origokeskiset Taylorin polynomit $T_m(x)$ ovat kaavan (1) ja potenssisarjojen yksikäsitteisyyslauseen (Lause 5.21) perusteella:

$$\begin{aligned}
T_2(x) &= \sum_{n=0}^{2} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \frac{1}{2}x^2,\\
T_3(x) &= \sum_{n=0}^{3} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = T_2(x),\\
T_4(x) &= \sum_{n=0}^{4} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = T_2(x) \text{ ja}\\
T_5(x) &= \sum_{n=0}^{5} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x^5.
\end{aligned}$$

Kuva funktiosta f ja sitä likimain kuvaavista Taylorin polynomeista T_2 ja T_5 välillä $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ (kuvassa x- ja y-akselien asteikot on valittu eri tavalla, jotta erot tulisivat selkeämmin esille):



Tehtävän 3 ratkaisu. Koska funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on derivoituva (määrittelyjoukossaan $\mathbb{R}$), se on jatkuva (määrittelyjoukossaan $\mathbb{R}$) (Lause 5.10). Erityisesti f on jatkuva välillä $[999, 1000]$ ja derivoituva välillä $]999, 1000[$, joten väliarvolauseen (Lause 6.8) perusteella

$$f(1000) - f(999) = f'(\xi)(1000 - 999) \tag{2}$$

jollakin $\xi \in]999, 1000[$. Koska tehtävän oletuksen perusteella $0 < f'(\xi) \leqslant 1$, kaavasta (2) saadaan arvio:

$$\begin{aligned} f(1000) - f(999) &= f'(\xi) > 0 \ \text{ ja} \\ f(1000) - f(999) &= f'(\xi) \leqslant 1. \end{aligned}$$

Siis

$$0 < f(1000) - f(999) \leqslant 1.$$

Tehtävän 4 ratkaisu. Kuten edellisessä tehtävässä, koska $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on derivoituva, se on jatkuva. Erityisesti se on jatkuva välillä $[x, x+1]$ ja derivoituva välillä $]x, x+1[$, joten väliarvolauseen (Lause 6.8) perusteella

$$f(x+1) - f(x) = f'(\xi(x))((x+1) - x)$$

jollakin $\xi(x) \in]x, x+1[$. Koska $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$ ja $\lim_{x\to\infty} \xi(x) = \infty$, saadaan tästä

$$\lim_{x\to\infty} (f(x+1) - f(x)) = \lim_{x\to\infty} f'(\xi(x)) = 0.$$

Tehtävän 5 ratkaisu. Funktion $f(x) = \sqrt[5]{x} = x^{\frac{1}{5}}$ on derivoituva, kun $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ja tällöin $f'(x) = \frac{1}{5}x^{\frac{1}{5}-1} = \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}$ (Lause 5.16). Koska f on jatkuva välillä $[100\,000, 100\,001]$ ja derivoituva välillä $]100\,000, 100\,001[$, saadaan väliarvolauseesta

$$f(100\,001) - f(100\,000) = f'(\xi)(100\,001 - 100\,000), \tag{3}$$

jollakin $\xi \in]100\,000, 100\,001[$. Koska f' on tällä välillä aidosti vähenevä, saadaan arvio

$$1,99998 \cdot 10^{-5} < \frac{1}{5} \cdot 100\,001^{-\frac{4}{5}} < f'(\xi) < \frac{1}{5} \cdot 100\,000^{-\frac{4}{5}} = 2 \cdot 10^{-5}$$

ja kaavasta (3) edelleen

$$1,999998 \cdot 10^{-5} < f(100\,001) - f(100\,000) < 2 \cdot 10^{-5}.$$

Differentiaalikehitelmän mukaan (Lause 5.9)

$$f(100\,000 + 1) - f(100\,000) = f'(100\,000)1 + 1\varepsilon(1),$$

missä funktiolle $\varepsilon(h)$ pätee $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$. Tästä saadaan arvio

$$f(100\,001) - f(100\,000) \approx f'(100\,000)1 = 2 \cdot 10^{-5}.$$

Tehtävän 6 ratkaisu. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & \text{kun } x > -1 \text{ ja} \\ x^3 - ax^2, & \text{kun } x \leqslant -1. \end{cases}$$

Koska f yhtyy avoimilla väleillä $]-\infty,-1[$ ja $]-1,\infty[$ derivoituvaan funktioon, se on derivoituva näillä väleillä ja

$$f'(x) = \begin{cases} a, \text{ kun } x > -1 \text{ ja} \\ 3x^2 - 2ax, \text{ kun } x < -1. \end{cases}$$

Siis ainoa piste, jossa f:n derivoituvuus on kyseenalaista on -1. Koska jatkuvuus on välttämätön ehto derivoituvuudelle (Lause 5.10), funktion f tulee olla jatkuva pisteessä -1:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-1} f(x) = f(-1) \;&\Leftrightarrow\; \lim_{x\to-1-} f(x) = \lim_{x\to-1+} f(x) = f(-1) \\ &\Leftrightarrow\; -1 - a = -a + b \;\Leftrightarrow\; b = -1. \end{aligned}$$

Siis $b = -1$. Koska toispuoliset raja-arvot $\lim_{x\to-1-} f'(x)$ ja $\lim_{x\to-1+} f'(x)$ ovat olemassa, derivoituvuustestistä (Lause 6.11) ja Huomautuksesta 6.12 nähdään nyt, että f on derivoituva pisteessä -1 jos ja vain jos

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to-1-} f'(x) = \lim_{x\to-1+} f'(x) \\ &\Leftrightarrow\; 3 + 2a = a \;\Leftrightarrow\; a = -3. \end{aligned}$$

Siis f on (määrittelyjoukossaan $\mathbb{R}$) derivoituva funktio jos ja vain jos $a = -3$ ja $b = -1$.

Funktion f derivoituvuuden pisteessä -1 olisi voinut selvittää helposti myös suoraa määritelmästä, mutta mutkikkaammilla paloittain määritellyillä funktioilla edellä käytetty menetelmä on vaivattomampi.