Tehtävän 1 ratkaisu. Merkitään $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2}}{h} = \frac{\frac{x^2}{(x+h)^2x^2} - \frac{(x+h)^2}{x^2(x+h)^2}}{h} = \frac{\frac{x^2-x^2-2xh-h^2}{(x+h)^2x^2}}{h}$$
$$= \frac{\frac{-2xh-h^2}{(x+h)^2x^2}}{h} = \frac{-2x-h}{(x+h)^2x^2} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \frac{-2x}{x^2x^2} = -\frac{2}{x^3}.$$

Siis $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$ eli $D\frac{1}{x^2} = -\frac{2}{x^3}$, kun $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Tehtävän 2 ratkaisu. Merkitään $f(x) = \frac{x^5}{x^3+x^2+1}$. Lauseen 5.12(iii) perusteella

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{5x^4(x^3+x^2+1) - x^5(3x^2+2x)}{(x^3+x^2+1)^2} \\ &= \frac{5x^7+5x^6+5x^4-3x^7-2x^6}{(x^3+x^2+1)^2} = \frac{2x^7+3x^6+5x^4}{(x^3+x^2+1)^2}. \end{aligned}$$

Käyrän $y = f(x)$ pisteeseen $(2, \frac{32}{13}) = (2, f(2))$ piirretyn tangentin kulmakerroin on

$$f'(2) = \frac{256+192+80}{13^2} = \frac{528}{169}$$

ja tangentin yhtälö on

$$y - \frac{32}{13} = f'(2)(x-2) \;\Leftrightarrow\; y - \frac{416}{169} = \frac{528}{169}(x-2)$$
$$\Leftrightarrow\; y = \frac{528}{169}x - \frac{640}{169}.$$

Tehtävän 3 ratkaisu.

$$x^2+xy+y^2 = 3 \;\Leftrightarrow\; y = \frac{-x \pm \sqrt{x^2-4(x^2-3)}}{2} = \frac{-x \pm \sqrt{12-3x^2}}{2}.$$

Tästä nähdään, että ellipsin $x^2+xy+y^2 = 3$ pisteen $(-1,-1)$ riittävän pienessä ympäristössä pätee

$$y = \frac{-x - \sqrt{12-3x^2}}{2}.$$

Merkitään

$$f(x) = \frac{-x - \sqrt{12-3x^2}}{2}.$$

Verkkomonisteen derivointisääntöjä (Lauseita 5.12 (ii), 5.11, 5.13 (iv) ja 5.13 (vi)) käyttäen saadaan

$$f'(x) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 2\sqrt{12 - 3x^2}} D(12 - 3x^2) = -\frac{1}{2} + \frac{3x}{2\sqrt{12 - 3x^2}},$$

joten

$$f'(-1) = -\frac{1}{2} - \frac{3}{6} = -1$$

ja ellipsin pisteeseen $(-1, -1)$ piirretyn tangentin yhtälö on

$$y - (-1) = f'(-1)(x - (-1)) \;\Leftrightarrow\; y = -x - 2.$$

Tehtävän 4 ratkaisu. Funktiolle $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x^3|$, pätee

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{kun } x > 0, \text{ ja} \\ -x^3, & \text{kun } x < 0. \end{cases}$$

Siksi Lauseen 5.13(iii) tarjoaman derivointisäännön perusteella[1]

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{kun } x > 0, \text{ ja} \\ -3x^2, & \text{kun } x < 0. \end{cases}$$

Sen sijaan verkkomonisteesta ei löydy derivointisääntöä, jota voisi soveltaa tähän funktioon pisteen 0 sisältämällä avoimella välillä. Siksi derivoituvuus ja mahdollinen derivaatta pisteessä 0 selvitetään määritelmän perusteella:

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{|h^3| - 0}{h} = \frac{hh|h|}{h} = h|h| \xrightarrow[h \to 0]{} 0.$$

Siis f on derivoituva myös pisteessä 0, $f'(0) = 0$ ja voidaan kirjoittaa.

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{kun } x \geqslant 0, \text{ ja} \\ -3x^2, & \text{kun } x < 0. \end{cases}$$

Kuten edellä, nyt saadaan

$$f''(x) = \begin{cases} 6x, & \text{kun } x > 0, \text{ ja} \\ -6x, & \text{kun } x < 0, \end{cases}$$

[1] Lisäksi tarvitaan tietoa, että kahden funktion ollessa identtiset avoimella välillä, sama pätee niiden derivaattoihin.

ja derivoituvuus pisteessä 0 selvitetään jälleen derivaatan määritelmän avulla. Kun $h > 0$,

$$\frac{f'(0+h) - f'(0)}{h} = \frac{3h^2 - 0}{h} = 3h \underset{h \to 0+}{\longrightarrow} 0.$$

Kun $h < 0$,

$$\frac{f'(0+h) - f'(0)}{h} = \frac{-3h^2 - 0}{h} = -3h \underset{h \to 0-}{\longrightarrow} 0.$$

Siis

$$\lim_{h \to 0} \frac{f'(0+h) - f'(0)}{h} = 0,$$

joten f' on derivoituva myös pisteessä 0, $f''(0) = 0$ ja voidaan kirjoittaa

$$f''(x) = \begin{cases} 6x, & \text{kun } x \geqslant 0, \text{ ja} \\ -6x, & \text{kun } x < 0. \end{cases}$$

Taaskin saadaan

$$f'''(x) = \begin{cases} 6, & \text{kun } x > 0, \text{ ja} \\ -6, & \text{kun } x < 0, \end{cases}$$

ja derivoituvuus pisteessä 0 selvitetään derivaatan määritelmän avulla. Kun $h > 0$,

$$\frac{f''(0+h) - f''(0)}{h} = \frac{6h - 0}{h} = 6 \underset{h \to 0+}{\longrightarrow} 6.$$

Kun $h < 0$,

$$\frac{f''(0+h) - f''(0)}{h} = \frac{-6h - 0}{h} = -6 \underset{h \to 0-}{\longrightarrow} -6.$$

Koska nämä toispuoliset raja-arvot ovat erisuuret, raja-arvoa

$$\lim_{h \to 0} \frac{f''(0+h) - f''(0)}{h}$$

ei ole olemassa eli f'' ei ole derivoituva pisteessä 0.

Koska vakion derivaatta on nolla, nähdään edellä lasketusta korkeammat derivaatat: kun $n \geqslant 4$, $f^{(n)}(x) = 0$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ja $f^{(n)}(0)$ ei ole olemassa.

Tehtävän 5 ratkaisu. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 + 2x^2 + 5x$. Lauseen 5.9 perusteella f:n differentiaalikehitelmä pisteessä x_0 on

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + h\varepsilon(h),$$

missä $\lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$. Siis

$$f(x_0+h) - f(x_0) = (4x_0^3 + 4x_0 + 5)h + h\varepsilon(h)$$

ja pisteessä $x_0 = 1$ saadaan

$$f(1+h) - f(1) = 13h + h\varepsilon(h) \approx 13h, \tag{1}$$

kunhan $|h|$ on kyllin pieni.

Kun $h = 0,1$, saadaan kaavasta (1) likiarvo $f(1+h) - f(1) \approx 1,3$ tarkan arvon ollessa $f(1+h) - f(1) = 1,3841$. Virhe on siis $0,0841$, joka vaikuttaa h:n verrattuna merkittävältä (noin 84% h:sta).

Kun $h = 0,01$, saadaan kaavasta (1) likiarvo $f(1+h) - f(1) \approx 0,13$ tarkan arvon ollessa $f(1+h) - f(1) = 0,13080401$. Virhe on siis $0,00080401$, joka vaikuttaa h:n verrattuna kohtuulliselta (noin 8% h:sta).

Tehtävän 6 ratkaisu. Funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$, on derivoituva joukossa $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (Lause 5.16) ja funktio $g : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{x}{x^2-1}$, on derivoituvia määrittelyjoukossaan $\mathbb{R} \setminus \{-1, -1\}$ (Lause 5.13(vii)). Lisäksi

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Siksi ketjusäännön (Lauseet 5.11 ja 5.9) perusteella yhdistetty kuvaus $f \circ g : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{R}$ on derivoituva joukossa $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ ja

$$\begin{aligned}(f \circ g)'(x) &= f'(g(x))g'(x) = \frac{1}{3}(g(x))^{\frac{1}{3}-1} \cdot \frac{1(x^2-1) - x(2x)}{(x^2-1)^2} \\ &= -\frac{1}{3}\left(\frac{x}{(x^2-1)^2}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{x^2+1}{(x^2-1)^2} = -\frac{x^{\frac{4}{3}} + x^{-\frac{2}{3}}}{3(x^2-1)^{\frac{2}{3}}}.\end{aligned}$$

Huomaa, ettei ketjusääntö kerro mitään yhdistetyn funktion $f \circ g$ derivoituvuudesta pisteessä x, jossa $g(x) = 0$. Esimerkiksi, jos g olisikin funktio $g(x) = x^3$, $f \circ g$ olisi derivoituva myös pisteessä 0. Siksi täytyy vielä selvittää funktion $f \circ g$ derivoituvuus ja mahdollinen derivaatta pisteessä 0. Koska

$$(f \circ g)(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{x^2-1}},$$

sadaan

$$\frac{(f \circ g)(0+h) - (f \circ g)(0)}{h} = \frac{\sqrt[3]{\frac{h}{h^2-1}} - 0}{\sqrt[3]{h^3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{h^2(h^2-1)}},$$

jolla ei ole äärellistä raja-arvoa, kun $h \to 0$. Siis $f \circ g$ ei ole derivoituva pisteessä 0.