Tehtävän 1 ratkaisu. Käytetään apuna Esimerkissä 4.27(iii) johdettua tulosta, jonka mukaan potenssisarjan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n \tag{1}$$

suppenemisjoukko on $]-1,1]$. (Siis se suppenee näissä pisteissä ja hajaantuu muualla. Huomaa kuitenkin, että sen suppenemisväli, joka on aina avoin väli, on $]-1,1[$).

Funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (x - (8+12)/2)/((12-8)/2) = (x-10)/2$ kuvaa välin $]8,12]$ välille $]-1,1]$ ja joukon $\mathbb{R}\setminus\,]8,12]$ joukolle $\mathbb{R}\setminus\,]-1,1]$. Siksi tekemällä muunnos $x \mapsto (x-10)/2$ sarjaan (1) saadaan sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \Big(\frac{x-10}{2}\Big)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n2^n} (x-10)^n, \tag{2}$$

jonka suppenemisjoukko on vaadittu $]8,12]$. Huomaa erityisesti, että myös uusi sarja (2) on todellakin potessisarja eli se on muotoa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$.

Tehtävän 2 ratkaisu. On selvitettävä millä $x \in \mathbb{R}$ sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} n e^n x^n \tag{3}$$

suppenee.

Jos seuraava raja-arvo on olemassa, se on Lauseen 4.26 perusteella potenssisarjan (3) suppenemissäde:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{ne^n}{(n+1)e^{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{e^n}{e \cdot e^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{e} = e^{-1}.$$

Siis potenssisarjan (3) suppenemissäde on e^{-1}. Siksi se suppenee, kun $|x| < e^{-1}$, ja hajaantuu, kun $|x| > e^{-1}$.

Vielä on selvitettävä sarjan (3) suppeneminen pisteissä $x = \pm e^{-1}$. Pisteessä $x = -e^{-1}$ sarjan (3) n:s termi on

$$ne^n(-e^{-1})^n = ne^n(-1)^n e^{-n} = (-1)^n n,$$

jolla ei ole raja-arvoa, kun $n \to \infty$. Siksi sarja (3) hajaantuu pisteessä $x = -e^{-1}$ Lauseen 4.3 perusteella.

Pisteessä $x = e^{-1}$ sarjan (3) n:s termi on

$$ne^n(e^{-1})^n = ne^n e^{-n} = n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \neq 0,$$

joten sarja (3) hajaantuu myös pisteessä $x = e^{-1}$ Lauseen 4.3 perusteella.

Tehtävän 3 ratkaisu. On selvitettävä millä $x \in \mathbb{R}$ sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 3^n} x^{2n} \tag{4}$$

suppenee. Suppenemissäteen laskemiseen soveltuvaa Lausetta 4.26 ei voi suoraa käyttää sarjaan (4), koska se on muotoa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, missä $a_n = 0$ parittomilla n, joten raja-arvoa $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}|$ ei ole edes määritelty. Siksi sarja (4) kirjoitetaan ensin hieman toiseen muotoon

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 3^n} x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 3^n} (x^2)^n$$

ja merkitään $y = x^2$, jolloin saadaan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 3^n} y^n. \tag{5}$$

Jos seuraava raja-arvo on olemassa, se on Lauseen 4.26 perusteella potenssisarjan (5) suppenemissäde:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{n^2 3^n}}{\frac{1}{(n+1)^2 3^{n+1}}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(1+\frac{1}{n})^2}{n^2} \cdot \frac{3 \cdot 3^n}{3^n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \cdot 3 = 3.$$

Siis potenssisarjan (5) suppenemissäde on 3. Siksi se suppenee, kun $|y| < 3$, ja hajaantuu, kun $|y| > 3$.

Vielä on selvitettävä sarjan (5) suppeneminen pisteissä $y = 3$. (Suppenemista pisteessä $y = -3$ ei tarvitse tutkia, koska $x^2 \geqslant 0$). Pisteessä $y = 3$ sarja (5) on

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 3^n} 3^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

joka suppenee yliharmoonisena sarjana (katso Esimerkissä 4.16(a) oleva huomautus).

Nyt nähdään, että sarja (4) suppenee jos ja vain jos $x^2 \leqslant 3$ eli $-\sqrt{3} \leqslant x \leqslant \sqrt{3}$.

Tehtävän 4 ratkaisu. Koneen nettotuottojen ja poistohinnan diskontattu arvo ostohetkellä on euroissa

$$\sum_{i=1}^{5} 25000\nu^i + 20000\nu^5 = 25000\nu \frac{1-\nu^5}{1-\nu} + 20000\nu^5 \approx 123907,44$$

missä diskonttaustekijä ν on $(1+\frac{p}{100})^{-1}$ ja vuotuinen korkokanta p on 5 prosenttia. Siis tuottojen ostohetkeen muunnettu arvo on $123907,44$ euroa eli ostohetken arvoilla laskettuna voittoa tulee $123907,44 - 130000 = -6092,56$ euroa. Koska tämä luku on negatiivinen, koneen osto on huono sijoitus korkokannan ollessa 5 prosenttia. Sukanvarteen sijoittaminen on kuitenkin vieläkin huonompi vaihtoehto. Siellä olisi viiden vuoden päästä samat 130000 euroa, jonka koneen ostohetkeen diskontattu arvo olisi vain $130000\nu^5 \approx 101858,40$ euroa.

Tehtävän 5 ratkaisu. Kymmenessä vuodessa kuukausittaisia maksueriä on $10 \cdot 12 = 120$ kappaletta. Kuukausittainen tasamaksu A on verkkomonisteen kaavan (4.35) mukaan euroissa

$$A = \frac{q^{120}(q-1)}{q^{120}-1} \cdot 200000, \tag{6}$$

missä $q = 1 + \frac{p}{100}$ ja p on kuukausittainen korko prosenteissa. Kun vuosikorko on 4 prosenttia, on kuukausittain maksettava korko $\frac{4}{12}$ prosenttia, sillä nythän korko maksetaan kuukausittain pois, joten ei tule maksettavaksi korkoa korolle. Niinpä kaavasta (6) saadaan

$$A \approx 2024,90,$$

joten pariskunta maksaa koko laina-aikana kaikkiaan $120 \cdot 2024,90 = 242988$ euroa. Siis he maksavat korkoa tänä aikana yhteensä $242988 - 200000 = 42988$ euroa.

Tehtävän 6 ratkaisu. Merkitään kymmeneksi vuodeksi lainattua ja kerralla takaisin maksettavaa rahamäärää L:llä. Siitä maksetaan vuosittain p prosenttia korkoa, joten 10 vuoden aikana maksetaan korkoa yhteensä $L \cdot \frac{p}{100} \cdot 10$. Siis lainanantajan vaatimus voidaan kirjoittaa muotoon

$$L \cdot \frac{p}{100} \cdot 10 + L = 4L,$$

mistä saadaan

$$\frac{p}{10} = 3 \;\Leftrightarrow\; p = 30.$$

Jos lainaehdot olisivat sellaiset, että vuosittainen korkokin maksettaisiin vasta kymmenen vuoden päästä, joutuisi lainanottaja maksamaa myös korkoa korolle. Tällöin lainanantaja vaatimus voidaan kirjoittaa muotoon

$$L(1+\frac{p}{100})^{10} = 4L,$$

mistä saadaan

$$
\begin{aligned}
&(1+\frac{p}{100})^{10} = 4 \;\Leftrightarrow\; 1+\frac{p}{100} = \sqrt[10]{4} \\
&\Leftrightarrow p = (\sqrt[10]{4}-1)\cdot 100 \approx 14,87.
\end{aligned}
$$