Tehtävän 1 ratkaisu.

Henkilö	Saa rahaa	Laittaa säästöön	Ostaa hyödykkeitä
1	a	$a\frac{k}{100}$	$a(1-\frac{k}{100})$
2	$a(1-\frac{k}{100})$	$a(1-\frac{k}{100})\frac{k}{100}$	$a(1-\frac{k}{100})(1-\frac{k}{100})$ $= a(1-\frac{k}{100})^2$
3	$a(1-\frac{k}{100})^2$	$a(1-\frac{k}{100})^2\frac{k}{100}$	$a(1-\frac{k}{100})^3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$a(1-\frac{k}{100})^{n-1}$	$a(1-\frac{k}{100})^{n-1}\frac{k}{100}$	$a(1-\frac{k}{100})^n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

(a) Säästöön laitettujen rahojen summa:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a\frac{k}{100}\big(1-\frac{k}{100}\big)^{n-1} = \frac{a\frac{k}{100}}{1-(1-\frac{k}{100})} = a,$$

sillä tässä on geometrinen sarja, jonka ensimmäinen termi on $a\frac{k}{100}$ ja suhdeluvun $(1-\frac{k}{100})$ itseisarvo on pienempi kuin 1 (Korollaari 4.7).

(b) Hyödykkeiden ostoon käytettyjen rahojen summa:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a\big(1-\frac{k}{100}\big)^{n} = \frac{a(1-\frac{k}{100})}{1-(1-\frac{k}{100})} = a\big(\frac{100}{k}-1\big),$$

sillä kyseessä on geometrinen sarja, jonka ensimmäinen termi on $a(1-\frac{k}{100})$ ja suhdeluvun $(1-\frac{k}{100})$ itseisarvo on pienempi kuin 1 (Korollaari 4.7). Kun $a = 5000$ ja $k = 25$, tästä saadaan

$$5000\big(\frac{100}{25}-1\big) = 5000\cdot 3 = 15000.$$

Tehtävän 2 ratkaisu. Palautetaan suppenemisen selvittely Lauseen 4.17 avulla toisen positiivitermisen sarjan suppenemisominaisuuksiin.

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+n+1}{n^5+n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3(1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3})}{n^5(1+\frac{1}{n^3})} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{1+\frac{1}{n^3}}.$$

Koska yliharmoninen sarja $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ suppenee (katso Esimerkissä 4.16(a) oleva huomautus) ja

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^3+n+1}{n^5+n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{1+\frac{1}{n^3}} = \frac{1+0+0}{1+0} = 1 \in \,]0,\infty[,$$

niin Lauseen 4.17 perusteella myös sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+n+1}{n^5+n^2}$$

suppenee.

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^6+1}{n^7+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^6(1+\frac{1}{n^6})}{n^7(1+\frac{1}{n^7})} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1+\frac{1}{n^6}}{1+\frac{1}{n^7}}.$$

Koska harmoninen sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ hajaantuu (Esimerkki 4.4) ja

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^6+1}{n^7+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n^6}}{1+\frac{1}{n^7}} = \frac{1+0}{1+0} = 1 \in \,]0,\infty[,$$

niin Lauseen 4.17 perusteella myös sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^6+1}{n^7+1}$$

hajaantuu.

Tehtävän 3 ratkaisu. Käytetään positiivitermisille sarjoille soveltuvaa suhdetestin lim-muotoa eli Korollaaria 4.15.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^{599}}{(1+a)^{(n+1)}}}{\frac{n^{599}}{(1+a)^n}} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{599} \frac{1}{1+a}$$
$$= (1+0)^{599} \frac{1}{1+a} = \frac{1}{1+a} \in [0,1[,$$

sillä $a > 0$. Siksi sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{599}}{(1+a)^n},$$

missä $a > 0$, suppenee Korollaarin 4.15 perusteella.

Tehtävän 4 ratkaisu.
(a) Kaikilla $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{2 + (-\frac{1}{2})^n}{\sqrt[3]{n^2}} \geqslant \frac{2 - \frac{1}{2}}{\sqrt[3]{n^2}} > \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} = \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}} \geqslant 0.$$

Koska aliharmoninen sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$ hajaantuu (katso Esimerkissä 4.16(a) oleva huomautus), niin minoranttiperiaatteen (Lause 4.12(ii)) mukaan myös sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-\frac{1}{2})^n}{\sqrt[3]{n^2}}$$

hajaantuu.
(b) Kaikilla $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leqslant \frac{2^{2n} + n^2}{5^n + n} = \frac{4^n + n^2}{5^n + n} < \frac{4^n + n^2}{5^n} \overset{(1)}{<} \frac{4^n + 4^n}{5^n} = 2\Big(\frac{4}{5}\Big)^n,$$

missä kohdassa (1) käytettiin arviota: $n^2 < 4^n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Sen voi todistaa induktiolla seuraavasti. 1° $1^2 < 4^1$. 2° Induktio-oletus: $n^2 < 4^n$ jollakin $n \in \mathbb{N}$. Tällöin $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \leqslant n^2 + 2n^2 + n^2 = 4n^2 < 4 \cdot 4^n = 4^{n+1}$.

Koska $|\frac{4}{5}| < 1$, geometrinen sarja $\sum_{n=1}^{\infty} 2(\frac{4}{5})^n$ $(= \sum_{n=0}^{\infty} 2 \cdot \frac{4}{5}(\frac{4}{5})^n)$ suppenee. Siksi majoranttiperiaatteen (Lause 4.12(i)) mukaan myös sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} + n^2}{5^n + n}$$

suppenee.

Tehtävän 5 ratkaisu. Osoitetaan, että tehtävän sarja suppenee jopa itseisesti. Huomataan aluksi, että

$$\Big|\frac{1}{2^k + 3^k - 4^k}\Big| = \frac{1}{|(\frac{2}{4})^k + (\frac{3}{4})^k - 1|}\Big(\frac{1}{4}\Big)^k.$$

Tätä käyttäen saadaan

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\Big|\frac{1}{2^k + 3^k - 4^k}\Big|}{\Big(\frac{1}{4}\Big)^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{|(\frac{2}{4})^k + (\frac{3}{4})^k - 1|} = \frac{1}{|0 + 0 - 1|} = 1 \in \,]0, \infty[.$$

Koska lisäksi positiiviterminen geometrinen sarja $\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{4})^k$ suppenee (sen suhdeluvun 1/4 itseisarvo on pienempi kuin 1), niin Lauseen 4.17 perusteella myös positiiviterminen sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{2^k+3^k-4^k}\right|$$

suppenee. Siis tehtävän sarja on itseisesti suppeneva ja edelleen Lauseen 4.19 perusteella suppeneva.

Tehtävän 6 ratkaisu. Tehtävän sarjan m:s osasumma on

$$\begin{aligned}S_m &= \sum_{n=1}^{m}\Big(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\Big)\\ &= \Big(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}\Big)+\Big(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\Big)+\Big(\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}\Big)+\dots\\ &\quad+\Big(\frac{1}{(m-1)^2}-\frac{1}{m^2}\Big)+\Big(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{(m+1)^2}\Big).\end{aligned}$$

Selvästi tästä jää supistamisten jälkeen jäljelle $\frac{1}{1^2}-\frac{1}{(m+1)^2}$. Ollaan kuitenkin hyvin huolellisia ja todistetaan se vielä induktiolla.

Väite. $S_m = 1-\frac{1}{(m+1)^2}$ kaikilla $m \in \mathbb{N}$.

Tod. (Induktiolla) 1°. $S_1 = 1-\frac{1}{(1+1)^2}$.

2°. Tehdään induktio-oletus: $S_m = 1-\frac{1}{(m+1)^2}$ jollakin $m \in \mathbb{N}$. Tällöin

$$\begin{aligned}S_{m+1} &= S_m + \Big(\frac{1}{(m+1)^2}-\frac{1}{((m+1)+1)^2}\Big)\\ &\overset{(1)}{=} 1-\frac{1}{(m+1)^2}+\frac{1}{(m+1)^2}-\frac{1}{((m+1)+1)^2} = 1-\frac{1}{((m+1)+1)^2},\end{aligned}$$

missä kohdassa (1) vedottiin induktio-oletukseen. □

Siis

$$S_m = 1-\frac{1}{(m+1)^2} \xrightarrow[m\to\infty]{} 1.$$

Niinpä tehtävän sarja suppenee kohti lukua 1 eli

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\Big) = 1.$$