Tehtävän 1 ratkaisu. Funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ toteuttaa ehdot

$$f(x) = x^2 + x + a, \text{ kun } x \leqslant 2, \text{ ja} \tag{1}$$
$$x + 5 \leqslant f(x) \leqslant 2x + 3, \text{ kun } x > 2. \tag{2}$$

Funktion f jatkuvuusehto pisteessä 2 voidaan lausua seuraavasti: f on jatkuva pisteessä 2, jos ja vain jos $\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2+} f(x) = f(2)$. Selvitetään, millä a:n arvoilla tämä pätee.

Ehdosta (1) nähdään, että $f(2) = 2^2 + 2 + a = 6 + a$ ja $\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2-}(x^2 + x + a) = 2^2 + 2 + a = 6 + a$.

Huomautus. Verkkomonisteen Lause 3.15 eli kuristusperiaate pätee ilmeisin muutoksin myös toispuolisille raja-arvoille.

Koska ehdossa (2) olevalle ala- ja ylärajalle pätee $\lim_{x\to 2+}(x + 5) = 7 = \lim_{x\to 2+}(2x + 3)$, saadaan kuristusperiaatteen mukaan $\lim_{x\to 2+} f(x) = 7$. Niinpä f on jatkuva pisteessä 2, jos ja vain jos $6 + a = 7$ eli $a = 1$.

Funktio f voi olla epäjatkuva jokaisessa välin $]2, \infty[$ pisteessä, sillä sehän voi olla esimerkiksi seuraavanlainen

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1, \text{ kun } x \leqslant 2, \\ x + 5, \text{ kun } x > 2 \text{ ja } x \in \mathbb{Q}, \text{ ja} \\ 2x + 3, \text{ kun } x > 2 \text{ ja } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Tällöin f:n epäjatkuvuus pisteessä $x > 2$ nähdään siitä, että jokainen väli $]a, b[$, $a < b$, sisältää sekä rationaali- että irrationaalilukuja ja $x + 5 < 2x + 3$, kun $x > 2$. (Perustelun yksityiskohdat sivuutetaan, mutta idean voi visualisoida piirtämällä (x, y)-koordinaatistoon suorat $y = x + 5$ ja $y = 2x + 3$ sekä tekemällä seuraavat havainnot. Jos $x(> 2)$ on rationaalinen, $f(x)$ on suoralla $y = x + 5$, muuten se on sen yläpuolella olevalla suoralla $y = 2x + 3$. Siksi raja-arvoa $\lim_{x\to x_0} f(x)$ ei ole olemassa, kun $x_0 > 2$. Huomaa myös, että nämä suorat leikkaavat kohdassa $x = 2$, muutenhan edellä määritelty f ei olisi jatkuva myöskään pisteessä 2.)

Tehtävän 2 ratkaisu. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{x^6 + x^3 + 1}.$$

Osoitetaan ensin, ettei f:llä ole pienintä arvoa, se on yksinkertaisempi tapaus. $x^2 + 3 > 0$ ja $x^6 + x^3 + 1 = (x^3)^2 + x^3 + 1 = (x^3 + 1/2)^2 - (1/2)^2 + 1 = (x^3 + 1/2)^2 + 3/4 > 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. (Jälkimmäisen tapauksen voi myös palauttaa sijoituksella $t = x^3$ paraabelin $t^2 + t + 1$ merkin selvittelyksi.

Edelläkin tuo tavallaan tehtiin neliöksi täydentämisen ohessa.) Siksi $f(x) > 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Toisaalta, kun $x \neq 0$

$$\begin{aligned}\frac{x^2+3}{x^6+x^3+1} &= \frac{x^6(\frac{1}{x^4}+\frac{3}{x^6})}{x^6(1+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^6})} = \frac{\frac{1}{x^4}+\frac{3}{x^6}}{1+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^6}} \\ &\underset{x\to\infty}{\longrightarrow} \frac{0+0}{1+0+0} = 0.\end{aligned}$$

Siis $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Koska lisäksi $f(x) > 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, funktiolla f ei ole pienintä arvoa.

Osoitetaan sitten, että funktiolla f on suurin arvo. Aluksi näytetään, että pisteet $\mathbb{R} \setminus [-a, a]$, missä $a > 0$ on kyllin suuri, voidaan jättää huomiotta. Tämän jälkeen vedotaan siihen, että suljetulla välillä $[-a, a]$ jatkuva funktio f saa suurimman arvon, joka siis on f:n suurin arvo koko $\mathbb{R}$:ssä. Tätä temppua tarvitaan ääriarvojen teoriassa usein. Vastaavaa ideaa voi soveltaa myös pienimmän arvon olemassa olon todistamiseen.

Aluksi huomataan, että

$$\lim_{x\to\infty} f(x)\ (=0) < f(0) \text{ ja} \tag{3}$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)\ (=0) < f(0). \tag{4}$$

Ensimmäinen näistä raja-arvoista laskettiin jo, jälkimmäinen lasketaan samalla tavalla. Epäyhtälöistä (3) ja (4) seuraa, että $f(x) < f(0)$ kaikilla $x \in \mathbb{R} \setminus [-a, a]$, kunhan luku $a > 0$ valitaan kyllin suureksi. Siksi f:llä on suurin arvo, jos ja vain jos sillä on suurin arvo joukossa $[-a, a]$, missä a on edellä mainittu kyllin suuri luku.

Enää riittää huomata, että rationaalifunktiona f on jatkuva, joten se saa suljetulla välillä $[-a, a]$ suurimman arvon. Niinpä f:llä on suurin arvo (määrittelyjoukossaan $\mathbb{R}$).

Tehtävän 3 ratkaisu. Tehtävän lukujono on määritelty seuraavasti

$$x_1 = 1 \text{ ja} \tag{5}$$
$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}, \text{ kun } n \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

Tällöin

$$\begin{aligned}
x_2 &= x_1 + \frac{1}{x_1} = 1 + \frac{1}{1} = 2,\\
x_3 &= x_2 + \frac{1}{x_2} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2},\\
x_4 &= x_3 + \frac{1}{x_3} = \frac{5}{2} + \frac{2}{5} = \frac{25+4}{10} = \frac{29}{10} \text{ ja}\\
x_5 &= x_4 + \frac{1}{x_4} = \frac{29}{10} + \frac{10}{29} = \frac{841+100}{290} = \frac{941}{290}.
\end{aligned}$$

Väite. Tehtävän lukujono on (aidosti) kasvava.

Tod. Koska $x_{n+1} - x_n = 1/x_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, riittää osoittaa, että $x_n > 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, sillä tällöin myös $1/x_n > 0$ ja edelleen $x_{n+1} - x_n > 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Todistetaan se induktiolla.

1°. $x_1 > 0$.

2°. Tehdään induktio-oletus: $x_n > 0$ jollakin $n \in \mathbb{N}$. On osoitettava, että tällöin myös $x_{n+1} > 0$, mikä nähdään induktio-oletuksesta seuraavasti:

$$x_{n+1} = \underbrace{x_n}_{>0} + \underbrace{\frac{1}{x_n}}_{>0} > 0.$$

Kohdista 1° ja 2° seuraa induktioperiaatteen mukaan, että $x_n > 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Jos $\lim_{n\to\infty} x_n$ on olemassa, niin myös $\lim_{n\to\infty} x_{n+1}$ on olemassa ja sillä on sama arvo (jälkimmäinen lukujonohan lähestyy sitä "yhden askeleen edellä"). Oletetaan sitten, että raja-arvo $\lim_{n\to\infty} x_n$ on olemassa ja merkitään sitä x:llä. Koska (x_n) on kasvava lukujono ja $x_1 > 0$, niin $x > 0$, joten raja-arvoon $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n}$ voi soveltaa Lausetta 3.38(iii). Siksi kaavasta (6) saadaan Lauseen 3.38 kohtien (i) ja (iii) avulla

$$x = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} (x_n + \frac{1}{x_n}) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = x + \frac{1}{x},$$

ja tästä edelleen

$$x = x + \frac{1}{x} \Leftrightarrow 0 = \frac{1}{x}.$$

Koska mikään reaaliluku x ei toteuta tätä yhtälöä, raja-arvo $\lim_{n\to\infty} x_n$ ei voi olla reaaliluku. (Toisaalta Määritelmän 3.12 laskulaista $0 = \frac{1}{\infty} = \frac{1}{-\infty}$ nähdään, että tutkittava raja-arvo on ∞ tai $-\infty$ mikäli se on olemassa, joskin jälkimmäinen näistä vaihtoehdoista voidaan sulkea pois muista syistä.)

Jos kasvava (eli nouseva) lukujono (x_n) olisi ylhäältä rajoitettu, se suppenisi kohti reaalilukua $\sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ (Lause 3.41(i)). Niinpä edellä osoitetun perusteella lukujono (x_n) ei ole ylhäältä rajoitettu. (Lauseesta 3.41(i) nähdään myös, että $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$.)

Tehtävän 4 ratkaisu. Sekä (a)- että (b)-kohdassa lauseke muokataan ensin sellaiseksi, että raja-arvo nähdään siitä eli voidaan laskea Määritelmän 3.12 mielessä sallituilla muodoilla (sivulla 42 niitä on laajennettu tapauksiin b^∞, missä $b > -1$ ja $b \neq 1$).

(a)

$$\begin{aligned}\frac{6^n + 2^{2n}}{3^n + 6^{n-2}} &= \frac{6^n + (2^2)^n}{3^n + 6^{n-2}} = \frac{6^n + 4^n}{3^n + 6^{n-2}} = \frac{6^n(1 + (\frac{4}{6})^n)}{6^n((\frac{3}{6})^n + 6^{-2})} \\ &= \frac{1 + (\frac{4}{6})^n}{(\frac{3}{6})^n + 6^{-2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1+0}{0+6^{-2}} = 36.\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}&2^{2n+1} - 3^n = 2\cdot(2^2)^n - 3^n = 2\cdot 4^n - 3^n \\ &= 4^n(2 - (\tfrac{3}{4})^n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty(2-0) = \infty.\end{aligned}$$

Tehtävän 5 ratkaisu.

(a) Geometristen sarjojen teorian avulla saadaan

$$\begin{aligned}&0,3712712(712)\ldots \\ &= 3\cdot 10^{-1} + 712\cdot 10^{-4} + 712\cdot 10^{-4-3} + 712\cdot 10^{-4-3-3} + \cdots \\ &= 3\cdot 10^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} 712\cdot 10^{-4-k3} = 3\cdot 10^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{712}{10^4}(10^{-3})^k \\ &\overset{(1)}{=} 3\cdot 10^{-1} + \frac{\frac{712}{10^4}}{1-10^{-3}} = \frac{3}{10} + \frac{712}{10^4 - 10} \\ &= \frac{3}{10} + \frac{712}{9990} = \frac{2997 + 712}{9990} = \frac{3709}{9990},\end{aligned}$$

kodassa (1) vedottiin siihen, että kyseessä on geometrinen sarja, jonka ensimmäinen termi on $\frac{712}{10^4}$ ja suhdeluku 10^{-3} on itseisarvoltaan pienempi kuin 1 (Korollaari 4.7).

(b) Kuten (a)-kohdassa, geometristen sarjojen teorian perusteella saadaan

$$\begin{aligned}&0,999(9)\ldots \\ &= 9\cdot 10^{-1} + 9\cdot 10^{-1-1} + 9\cdot 10^{-1-1-1} + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} 9\cdot 10^{-1}(10^{-1})^k = \frac{9\cdot 10^{-1}}{1-10^{-1}} = \frac{9}{10-1} = 1.\end{aligned}$$

Tehtävän 6 ratkaisu.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Big(\frac{x+1}{x+3}\Big)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x+1}{x+3} \cdot \Big(\frac{x+1}{x+3}\Big)^k,$$

missä $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$, on geometrinen sarja, joka suppenee Lauseen 4.6 perusteella jos ja vain jos

$$\begin{aligned}
&\frac{x+1}{x+3} = 0 \ \text{ tai } \ \Big|\frac{x+1}{x+3}\Big| < 1 \\
&\Leftrightarrow x = -1 \ \text{ tai } \ |x+1| < |x+3| \\
&\Leftrightarrow (x+1)^2 < (x+3)^2 \\
&\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 < x^2 + 6x + 9 \\
&\Leftrightarrow -4x < 8 \\
&\Leftrightarrow x > -2.
\end{aligned}$$

Tällöin sen summa on Korollaarin 4.7 mukaan

$$\frac{\frac{x+1}{x+3}}{1 - \frac{x+1}{x+3}} = \frac{x+1}{(x+3) - (x+1)} = \frac{x+1}{2}.$$