Tehtävän 1 ratkaisu. On selvitettävä raja-arvo $\lim_{x\to 10}(2x+1)$ määritelmää käyttäen. Että raja-arvon määritelmää voisi käyttää, täytyy raja-arvo ensin arvata jollakin tavalla, jonka jälkeen arvaus todistetaan oikeaksi raja-arvon määritelmän avulla. Tässä tapauksessa lienee aika helppo arvata (esimerkiksi piirtämällä kuva), että $\lim_{x\to 10}(2x+1) = 2\cdot 10+1 = 21$. (Luentomonisteessa johdetut raja-arvojen laskusäännöt osoittavat tämän arvauksen oikeaksi, mutta tässä ei ole tarkoitus käyttää niitä.)

Osoitetaan sitten, että edellä esitetty arvaus on oikea. Olkoon sitä varten $\varepsilon > 0$. Aluksi havaitaan, että

$$|2x+1-21| = |2(x-10)| = 2|x-10|.$$

Kun $(0 <)\,|x-10| < \varepsilon/2$, saadaan tästä edelleen

$$2|x-10| < 2\cdot\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Siis

$$|2x+1-21| < \varepsilon,\ \text{kun } 0 < |x-10| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Edellä osoitettiin, että jokaiselle $\varepsilon > 0$ löytyy $\delta > 0$, (esimerkiksi $\delta = \varepsilon/2$ ja mikä tahansa pienempikin positiivinen luku kelpaa) jolla pätee

$$|2x+1-21| < \varepsilon,\ \text{kun } 0 < |x-10| < \delta.$$

eli osoiteetiin raja-arvon määritelmää käyttäen, että $\lim_{x\to 10}(2x+1) = 21$.

Tehtävän 2 ratkaisu. (a)-kohta. Koska tehtävän rationaalifunktio (eli polynomi jaettuna polynomilla) on määritelty pisteessä 2 saadaan Lauseen 3.4 perusteella

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-x-24}{x^3-27} = \frac{2^3-2-24}{2^3-27} = \frac{18}{19}.$$

(b)-kohta. Tämä raja-arvo on muotoa ∞/∞, joten suora symbolin ∞ sijoittaminen ja määritelmän 3.12 käyttäminen ei onnistu. Siksi lauseke muokataan ensin sellaiseksi, että se onnistuu. Kun $x \in \mathbb{R}\setminus\{0,3\}$,

$$\frac{x^3-x-24}{x^3-27} = \frac{x^3(1-\frac{1}{x^2}-\frac{24}{x^3})}{x^3(1-\frac{27}{x^3})} = \frac{1-\frac{1}{x^2}-\frac{24}{x^3}}{1-\frac{27}{x^3}}$$
$$\xrightarrow[x\to\infty]{} \frac{1-\frac{1}{\infty^2}-\frac{24}{\infty^3}}{1-\frac{27}{\infty^3}} = \frac{1-\frac{1}{\infty}-\frac{24}{\infty}}{1-\frac{27}{\infty}} = \frac{1-0-0}{1-0} = 1.$$

(c)-kohta. Tämä raja-arvo on muotoa 0/0. Siksi suora sijoittaminen ei onnistu, vaan lauseketta on ensin muokattava. Koska $x = 3$ on osoittajan $x^3 - x - 24$ on nollakohta, osoittaja voidaan kirjoittaa muotoon $(x-3) \cdot P(x)$, missä $P(x)$ on astetta alempi polynomi. Polynomi $P(x)$ saadaan selville jakamalla $x^3 - x - 24$ jakokulmassa $(x-3)$:lla. Nimittäjälle $x^3 - 27$ pätee vastaava asia.

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 + 3x + 8 \\ \hline
x - 3 & x^3 - x - 24 \\
 & \underline{x^3 - 3x^2} \\
 & \quad 3x^2 - x - 24 \\
 & \quad \underline{3x^2 - 9x} \\
 & \qquad 8x - 24 \\
 & \qquad \underline{8x - 24} \\
 & \qquad\qquad 0
\end{array}
\qquad \text{siis } \begin{array}{l} x^3 - x - 24 = \\ (x-3)(x^2 + 3x + 8) \end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 + 3x + 9 \\ \hline
x - 3 & x^3 - 27 \\
 & \underline{x^3 - 3x^2} \\
 & \quad 3x^2 - 27 \\
 & \quad \underline{3x^2 - 9x} \\
 & \qquad 9x - 27 \\
 & \qquad \underline{9x - 27} \\
 & \qquad\qquad 0
\end{array}
\qquad \text{siis } \begin{array}{l} x^3 - 27 = \\ (x-3)(x^2 + 3x + 9) \end{array}
$$

Kun $x \neq 3$, saadaan

$$
\begin{aligned}
\frac{x^3 - x - 24}{x^3 - 27} &= \frac{(x-3)(x^2 + 3x + 8)}{(x-3)(x^2 + 3x + 9)} = \frac{x^2 + 3x + 8}{x^2 + 3x + 9} \\
&\xrightarrow[x \to 3]{} \frac{3^2 + 3 \cdot 3 + 8}{3^2 + 3 \cdot 3 + 9} = \frac{26}{27}.
\end{aligned}
$$

Tehtävän 3 ratkaisu. Tämä tehtävä voidaan ratkaista kuristusperiaatteen[1] avulla. Oletuksen mukaan

$$
\frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{2x} \leqslant f(x) < \frac{\sqrt{x^2 + x}}{2x} \tag{1}
$$

[1] Lause 3.15. Katso myös Huomautus 3.16. Huomaa myös, että tässä ratkaisussa on kohdan (1) jälkimmäisessä epäyhtälössä $<$ eikä $\leqslant$ kuten Lauseessa 3.15. Tämä ei haittaa, sillä tietenkin (1) pätee myös jos siinä korvaa $<$:n $\leqslant$:lla.

kaikilla $x < -1$. Osoitetaan, että kaavan (1) äärimmäiset lausekkeet lähestyvät kohti saamaa arvoa, kun x lähestyy miinus ääretöntä. Kun $x < 0$,

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{2x} &= \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}}{2x} = \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{2x} \\ &= \frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{2x} = \frac{-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{2} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} \frac{-\sqrt{1+0+0}}{2} = -\frac{1}{2}. \quad (2)\end{aligned}$$

Kun $x < 0$,

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x^2+x}}{2x} &= \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}}{2x} = \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{2x} \\ &= \frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{2x} = \frac{-\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{2} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} \frac{-\sqrt{1+0}}{2} = -\frac{1}{2}. \quad (3)\end{aligned}$$

Niinpä kodista (1), (2) ja (3) nähdään kuristusperiaatteen avulla, että

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{1}{2}.$$

Tehtävän 4 ratkaisu. Tämän tehtävän molemmat kohdat perustuvat lavennustemppuun, jolla päästään eroon hankaluuksia aiheuttavista neliöjuurista. Muokattuun lausekkeeseen tulee myös neliöjuuri, mutta se ei enää haittaa laskuja. Kun $x > 0$,

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+x}-x &= \frac{(\sqrt{x^2+x}-x)(\sqrt{x^2+x}+x)}{\sqrt{x^2+x}+x} = \frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x} \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x} = \frac{x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Saamaa ideaa soveltaen saadaan

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x}-2}{x^2-16} &= \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x^2-16)(\sqrt{x}+2)} = \frac{x-4}{(x-4)(x+4)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{1}{(x+4)(\sqrt{x}+2)} \underset{x\to4}{\longrightarrow} \frac{1}{(4+4)(\sqrt{4}+2)} = \frac{1}{32}.\end{aligned}$$

Tehtävän 5 ratkaisu. Toisen asteen polynomilla x^2+x-6 on nollakohdat $x=-3$ ja $x=2$, joten sadaan $x^2+x-6=(x-(-3))(x-2)$. Kun $x>2$,

$$\frac{|x-2|}{x^2+x-6}=\frac{x-2}{(x+3)(x-2)}=\frac{1}{x+3}\xrightarrow[x\to 2+]{}\frac{1}{2+3}=\frac{1}{5}.$$

Siis $\lim_{x\to 2+} f(x)=1/5$. Vastaavasti, kun $x<2$,

$$\frac{|x-2|}{x^2+x-6}=\frac{-(x-2)}{(x+3)(x-2)}=\frac{-1}{x+3}\xrightarrow[x\to 2-]{}-\frac{1}{5}.$$

Siis $\lim_{x\to 2-} f(x)=-1/5$. Koska raja-arvot $\lim_{x\to 2+} f(x)$ ja $\lim_{x\to 2-} f(x)$ ovat erisuuret, raja-arvoa $\lim_{x\to 2} f(x)$ ei ole olemassa (Lause 3.6).

Tehtävän 6 ratkaisu. Koska $x^2+x+1=(x^2+1/2)^2-(1/2)^2+1=(x+1/2)^2+3/4\geqslant 0$ ja $|x^3|+1\neq 0$ kaikilla $x\in\mathbb{R}$, määrittelee lauseke

$$f(x)=\frac{(x^5+2x)\sqrt{x^2+x+1}}{|x^3|+1}$$

funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Funktio f on jatkuva, sillä se voidaan muodostaa jatkuviksi jo tiedetyistä funktioista yhdistämällä, yhteenlaskemalla, kertomalla ja jakamalla (Lauseet 3.25 ja 3.23). Alla on esitetty tämä päättely yksityiskohtaisemmin.

(1) Funktiot $p_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $p_1(x)=x^5+2x$, $p_2:\mathbb{R}\to[0,\infty[$, $p_2(x)=x^2+x+1$, $p_3:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $p_3(x)=x^3$ ja $p_4:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $p_4(x)=1$, ovat polynomeina jatkuvia. (Tässä voi vedota Seuraukseen 3.24, polynomithan saadaan rationaalifunktioiden erikoistapauksista.) Huomaa, että p_2:n maalijoukoksi valittiin $[0,\infty[$ eikä $\mathbb{R}$. Se on mahdollista, koska $p_2(x)\geqslant 0$ kaikilla $x\in\mathbb{R}$. Tämä tehtiin, koska myöhemmin p_2 yhdistetään neliöjuuren kanssa ja neliöjuuren määrittelyjoukko on $[0,\infty[$.

(2) Neliöjuuri $g_2:[0,\infty[\to\mathbb{R}$, $g_2(x)=\sqrt{x}$, ja itseisarvo $h_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h_2(x)=|x|$, ovat jatkuvia (Esimerkit 3.7 ja 3.22).

(3) Funktiot $g_3:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g_3=g_2\circ p_2$, ja $h_3:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h_3=h_2\circ p_3$, ovat jatkuvia, sillä ne saadaan yhdistämällä kohtien (1) ja (2) jatkuvista funktioista (Lause 3.25).

(4) Funktiot $g_4:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g_4(x)=p_1(x)\cdot g_3(x)$, ja $h_4:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h_4(x)=h_3(x)+p_4(x)$, saadaan kertomalla ja yhteenlaskemalla kohtien (1) ja (3) jatkuvia funktioita, joten ne ovat jatkuvia (Lause 3.23).

(5) Tehtävässä annettu funktio voidaan nyt esittää seuraavasti $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=g_4(x)/h_4(x)$. Siksi se on jatkuva kohdan (4) jatkuvien funktioiden osamääränä (Lause 3.23).