Tehtävän 1 ratkaisu.

Väite. $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n^3}{3} + \dfrac{n^2}{2} + \dfrac{n}{6}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}\,(= \{1, 2, \ldots\})$.

Tod. Todistetaan väite induktiolla.

$1°$. Väitteen kaava pätee pienimmällä vaaditulla arvolla eli kun $n = 1$, sillä tällöin yhtälön vasemman puolen ymmärretään olevan 1^2 eli 1 ja sen oikea puoli on $\frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1$.

$2°$. Tehdään induktio-oletus: väitteen kaava pätee, jollakin $n = k \in \mathbb{N}$. On osoitettava, että tällöin se pätee myös arvolla $n = k + 1$. Nyt kaavan vasen puoli on

$$\begin{aligned}
&1^2 + 2^2 + \ldots + (k+1)^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2\\
&\overset{(1)}{=} \frac{k^3}{3} + \frac{k^2}{2} + \frac{k}{6} + (k+1)^2 = \frac{k^3}{3} + \frac{k^2}{2} + \frac{k}{6} + k^2 + 2k + 1\\
&= \frac{k^3}{3} + \frac{3k^2}{2} + \frac{13k}{6} + 1,
\end{aligned}$$

missä kohta (1) pätee induktio-oletuksen perusteella, ja oikea puoli on

$$\begin{aligned}
&\frac{(k+1)^3}{3} + \frac{(k+1)^2}{2} + \frac{k+1}{6}\\
&= \frac{k^3 + 3k^2 + 3k + 1}{3} + \frac{k^2 + 2k + 1}{2} + \frac{k+1}{6}\\
&= \frac{k^3}{3} + \frac{3k^2}{2} + \frac{13k}{6} + 1
\end{aligned}$$

eli väitteen kaava pätee myös arvolla $n = k + 1$.

Induktioperiaatteen mukaan väite seuraa kohdista $1°$ ja $2°$. $\square$

Tehtävän 2 ratkaisu. Rationaalilukujen joukko $\mathbb{Q}$ on $\{\frac{n}{m} \mid n, m \in \mathbb{Z}$ ja $m \neq 0\}$ ja irrationaalilukujen joukko on $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Jos rationaaliluvun $\frac{n}{m}$, $n, m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$, ja reaaliluvun a summa on rationaaliluku, pätee joillakin $u, v \in \mathbb{Z}$, $v \neq 0$,

$$\frac{n}{m} + a = \frac{u}{v} \Leftrightarrow a = \frac{u}{v} - \frac{n}{m} = \frac{um - nv}{mv} \in \mathbb{Q}$$

eli myös a on rationaalinen. Siksi rationaaliluvun ja irrationaaliluvun summa on aina irrationaaliluku.

Rationaaliluku nollan ja minkä tahansa irrationaaliluvun tulo on rationaaliluku nolla. Toisaalta, jos nollasta poikkeavan rationaaliluvun $\frac{n}{m}$,

$n, m \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, ja reaaliluvun a tulo on rationaaliluku, pätee joillakin $u, v \in \mathbb{Z}$, $v \neq 0$,

$$\frac{n}{m} \cdot a = \frac{u}{v} \Leftrightarrow a = \frac{um}{vn}$$

eli myös a on rationaalinen. Siksi nollasta poikkeavan rationaaliluvun ja irrationaaliluvun tulo on aina irrationaaliluku.

Tehtävän 3 ratkaisu. Binomikaavan (verkkomonisteen Lause 2.2) perusteella

$$\begin{aligned}(-x+y^2)^{100} &= \sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} (-x)^{100-k} (y^2)^k \\ &= \sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} (-1)^{100-k} x^{100-k} y^{2k}.\end{aligned}$$

Tässä ei ole muotoa (nollasta poikkeava vakio kertaa) x^6y^4 olevia termejä, sillä yhtälöryhmällä $100 - k = 6$ ja $2k = 4$ ei ole ratkaisua. Edelleen, binomikaavan perusteella

$$(2x - 3y^4)^7 = \sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} (2x)^{7-k} (-3y^4)^k = \sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} 2^{7-k} (-3)^k x^{7-k} y^{4k},$$

missä muotoa x^6y^4 olevan termin kerroin on ($7 - k = 6$ ja $4k = 4$, kun k=1)

$$\binom{7}{1} 2^{7-1} (-3)^1 = -\frac{7!}{1!(7-1)!} \cdot 192 = -\frac{7 \cdot 6!}{6!} \cdot 192 = -7 \cdot 192 = -1344,$$

ja

$$(-2x^2 + y^2)^5 = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} (-2x^2)^{5-k} (y^2)^k = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} (-2)^{5-k} x^{10-2k} y^{2k}.$$

missä muotoa x^6y^4 olevan termin kerroin on ($10 - 2k = 6$ ja $2k = 4$, kun k=2)

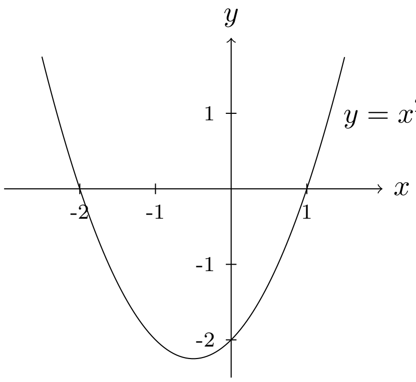
$$\binom{5}{2} (-2)^{5-2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} \cdot (-8) = -\frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2 \cdot 3!} \cdot 8 = -10 \cdot 8 = -80.$$

Niinpä vastaus tehtävän kysymykseen on $0 + (-1344) + (-80) = -1424$.

Tehtävän 4 ratkaisu. Kun $x < 0$, saadaan kertomalla puolittain luvulla $x\,(< 0)$,

$$x < \frac{2}{x} - 1 \Leftrightarrow x^2 > 2 - x \Leftrightarrow x^2 + x - 2 > 0.$$

Koska $x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ tai $x = 1$, ja kyseessä on ylöspäin aukeava paraabeli, pätee epäyhtälö nyt tarkasteltavassa tapauksessa ($x < 0$), kun $x < -2$.



Kun $x > 0$, saadaan vastaavasti kertomalla puolittain luvulla $x\,(> 0)$

$$x < \frac{2}{x} - 1 \Leftrightarrow x^2 < 2 - x \Leftrightarrow x^2 + x - 2 < 0$$

Koska $x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ tai $x = 1$, ja kyseessä on ylöspäin aukeava paraabeli, pätee epäyhtälö nyt tarkasteltavassa tapauksessa ($x > 0$), kun $0 < x < 1$.

Yhdistämällä edellä käsitellyt kaksi tapausta saadaan:

$$x < \frac{2}{x} - 1 \;\Leftrightarrow\; x < -2 \text{ tai } 0 < x < 1.$$

Toiselle epäyhtälölle saadaan (myös tässä voi käyttää hahmottamisen apuna kuvia paraabeleista)

$$\begin{aligned}
&|1 - 3x| \leqslant x^2 - 1 \\
&\overset{(1)}{\Leftrightarrow} -(x^2 - 1) \leqslant 1 - 3x \text{ ja } 1 - 3x \leqslant x^2 - 1 \\
&\Leftrightarrow -x^2 + 3x \leqslant 0 \text{ ja } 0 \leqslant x^2 + 3x - 2 \\
&\Leftrightarrow -x(x-3) \leqslant 0 \text{ ja } 0 \leqslant \Big(x - \frac{-3-\sqrt{17}}{2}\Big)\Big(x - \frac{-3+\sqrt{17}}{2}\Big) \\
&\Leftrightarrow \Big(x \leqslant 0 \text{ tai } x \geqslant 3\Big) \text{ ja } \Big(x \leqslant \frac{-3-\sqrt{17}}{2} \text{ tai } x \geqslant \frac{-3+\sqrt{17}}{2}\Big) \\
&\Leftrightarrow x \leqslant \frac{-3-\sqrt{17}}{2} \text{ tai } x \geqslant 3,
\end{aligned}$$

missä kohta (1) pätee verkkomonisteen Lauseen 2.12(4), perusteella, kun huomioi, että oletus $a > 0$ on siinä tarpeeton, Lause 2.12(4) pätee olipa $a \in \mathbb{R}$ mikä tahansa. Tämän päättelyn viimeinen kohta on hieman hankala, joten siinä täytyy olla tarkkana. Tilanteen hahmottamista voi helpottaa apukuviolla.

Toinen vaihtoehto tehtävän jälkimmäisen epäyhtälön ratkaisemiseksi on käsitellä tapaukset $x \leqslant 1/3$ ja $x > 1/3$ erikseen, jolloin myös päästään eroon itseisarvosta. Tapauksessa $x \leqslant 1/3$ saadaan $|1-3x| \leqslant x^2 - 1 \Leftrightarrow 0 \leqslant x^2 + 3x - 2$, ja edelleen $x \leqslant (-3-\sqrt{17})/2$. Tapauksessa $x > 1/3$ saadaan $|1-3x| \leqslant x^2 - 1 \Leftrightarrow -x^2 + 3x \leqslant 0$, ja edelleen $x \geqslant 3$.

Tehtävän 5 ratkaisu. Soveltamalla kolmioepäyhtälöä (Lause 2.12(5)) kahteen kertaan saadaan

$$\begin{aligned}&|x^2 - 6y + 11z| = |(x^2 - 6y) + 11z| \leqslant |x^2 - 6y| + |11z| \\ &= |x^2 + (-6y)| + |11z| \leqslant |x^2| + |-6y| + |11z| = x^2 + 6|y| + 11|z|.\end{aligned}$$

Yhtäsuuruus pätee ensimmäisessä arviossa, jos ja vain jos $(x^2 - 6y)$ ja $11z$ eivät ole vastakkaismerkkisiä eli

$$(x^2 - 6y) \cdot 11z \geqslant 0, \tag{1}$$

ja jälkimmäisessä vastaavasti, jos ja vain jos

$$x^2 \cdot (-6y) \geqslant 0. \tag{2}$$

Jos $x = 0$, pätee ehto (2) ja ehdosto (1) saadaan $yz \leqslant 0$. Jos $x \neq 0$, saadaan (2):sta $y \leqslant 0$ ja edelleen (1):sta $z \geqslant 0$. Siis edellä johdetussa kaavassa $|x^2 - 6y + 11z| \leqslant x^2 + 6|y| + 11|z|$ pätee yhtäsuuruus, jos ja vain jos

$$(x = 0 \text{ ja } yz \leqslant 0) \text{ tai } (x \neq 0 \text{ ja } y \leqslant 0 \text{ ja } z \geqslant 0).$$

Tämän voi ilmaista hieman tiivistetymminkin:

$$(y \leqslant 0 \text{ ja } z \geqslant 0) \text{ tai } (x = 0 \text{ ja } yz \leqslant 0).$$

Tehtävän 6 ratkaisu. $A = \{\frac{n+1}{n+3} \mid n \in \mathbb{N}\} = \{\frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \frac{5}{7}, \frac{6}{8}, \frac{7}{9}, \frac{8}{10}, \frac{9}{11}, \frac{10}{12}, \ldots\}$.

Vaikuttaa siltä, että joukolla A on pienin alkio ja että se on $1/2 = 2/4$. Tällöin se on myös $\inf A$ (Lause 2.7(2)). Osoiteteaan tämä vielä huolellisesti. Ensinnäkin

$$\frac{1}{2} = \frac{1+1}{1+3} \in A.$$

Toisaalta, kun $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{n+1}{n+3} \geqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2n+2 \geqslant n+3 \Leftrightarrow n \geqslant 1,$$

mikä pätee kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Siis $1/2$ on joukon A pienin alkio, joten se on myös $\inf A$.

Vaikuttaa siltä, että kaikki A:n alkiot ovat pienempiä kuin 1, eli 1 on A:n eräs yläraja, ja mikään 1:stä pienempi luku ei ole A:n yläraja. Tällöin suoraa määritelmän perusteella $\sup A = 1$. Osoitetaan tämä vielä huolellisesti. Ensinnäkin, kun $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{n+1}{n+3} < 1 \Leftrightarrow n+1 < n+3 \Leftrightarrow 0 < 2,$$

mikä on totta. Siis kaikki A:n alkiot ovat pienempiä kuin 1 eli 1 on A:n eräs yläraja.

Toisaalta luku, joka on pienempi kuin 1 voidaan kirjoittaa muotoon $1-\varepsilon$, missä $\varepsilon > 0$. Tällainen luku ei ole A:n yläraja, sillä kun $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}&\frac{n+1}{n+3} > 1-\varepsilon \Leftrightarrow n+1 > n+3-n\varepsilon-3\varepsilon \\ &\Leftrightarrow n\varepsilon > 2-3\varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{2-3\varepsilon}{\varepsilon},\end{aligned}$$

mikä pätee kunhan n on kyllin suuri.