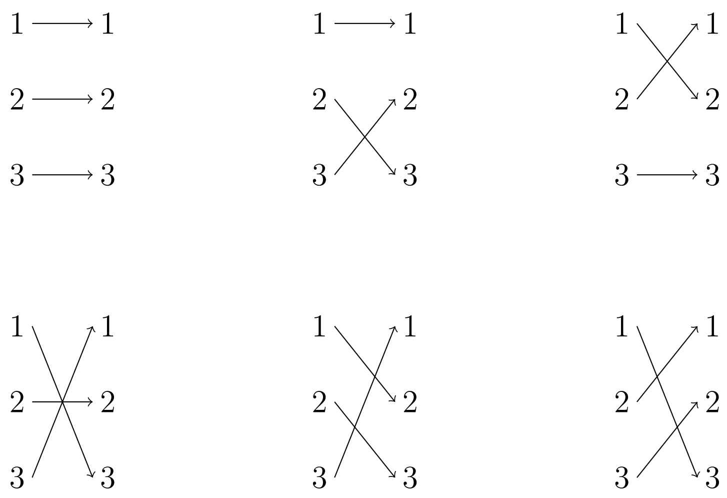
Tehtävän 1 ratkaisu. Kuten tehtäväpaperissa, merkitään $A = \{1, 2, 3\}$. Joukkojen A ja A välisten bijektioiden (eli joukon A bijektioiden itselleen) $f_i : A \to A$, $1 \leqslant i \leqslant 6$, ja niiden käänteisbijektioiden $f_i^{-1} : A \to A$, $1 \leqslant i \leqslant 6$ määrittelevät ehdot on lueteltu seuraavassa.

- $f_1(1) = 1$, $f_1(2) = 2$, $f_1(3) = 3$. $f_1^{-1}(1) = 1$, $f_1^{-1}(2) = 2$, $f_1^{-1}(3) = 3$.
- $f_2(1) = 1$, $f_2(2) = 3$, $f_2(3) = 2$. $f_2^{-1}(1) = 1$, $f_2^{-1}(2) = 3$, $f_2^{-1}(3) = 2$.
- $f_3(1) = 2$, $f_3(2) = 1$, $f_3(3) = 3$. $f_3^{-1}(1) = 2$, $f_3^{-1}(2) = 1$, $f_3^{-1}(3) = 3$.
- $f_4(1) = 3$, $f_4(2) = 2$, $f_4(3) = 1$. $f_4^{-1}(1) = 3$, $f_4^{-1}(2) = 2$, $f_4^{-1}(3) = 1$.
- $f_5(1) = 2$, $f_5(2) = 3$, $f_5(3) = 1$. $f_5^{-1}(1) = 3$, $f_5^{-1}(2) = 1$, $f_5^{-1}(3) = 2$.
- $f_6(1) = 3$, $f_6(2) = 1$, $f_6(3) = 2$. $f_6^{-1}(1) = 2$, $f_6^{-1}(2) = 3$, $f_6^{-1}(3) = 1$.

Huomaa, että $f_i^{-1} = f_i$, kun $1 \leqslant i \leqslant 4$, $f_5^{-1} = f_6$ ja $f_6^{-1} = f_5$. Alla on vielä havainnollisuuden vuoksi kuvat funktioista f_i, $1 \leqslant i \leqslant 6$:



Tehtävän 2 ratkaisu. Osoitetaan kuvaus $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f(x) = 2/(x-1)$, bijektioksi verkkomonisteen Lauseen 1.13 avulla. Oletetaan sitä varten, että $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tällöin

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{2}{x-1} = y \Leftrightarrow \frac{2}{y} = x - 1 \Leftrightarrow x = 1 + \frac{2}{y}.$$

Siis jokaisella $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ on olemassa täsmälleen yksi $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, jolla $f(x) = y$. Niinpä $f : \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $f(x) = 2/(x-1)$, on sekä surjektio että injektio eli se on bijektio. Kuten verkkomonisteen sivulla 9 on todettu, yllä olevasta laskusta saadaan myös f:n käänteisfunktion lauseke: $f^{-1}(y) = 1 + \frac{2}{y}$. Siis f:n käänteiskuvaus (tai käänteisbijektio, koska bijektion käänteiskuvaus on aina bijektio) on $f^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f^{-1}(y) = 1 + \frac{2}{y}$.

Tehtävän 3 ratkaisu. $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f(x) = 2/(x-1)$. Aluksi kannattanee hieman hahmotella funktion f kuvaajaa. Jätän tämän yksityiskohdan lukijalle. Sen avulla voi arvata tehtävän ratkaisun ja ennen kaikkea voi ideoida miten tehtävä olisi mukava ratkaista täsmällisesti. Oletetaan, että $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ja $x_1 < x_2$.

$$f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow \frac{2}{x_1 - 1} > \frac{2}{x_2 - 1}. \tag{1}$$

Jos $x_1, x_2 \in]-\infty, 1[$ tai $x_1, x_2 \in]1, \infty[$, saadaan tästä epäyhtälöstä kertomalla puolittain luvulla $(x_1 - 1)(x_2 - 1)$ (> 0)

$$2(x_2 - 1) > 2(x_1 - 1) \Leftrightarrow x_2 > x_1,$$

mikä pätee oletuksen perusteella. Siis joukoissa $]-\infty, 1[$ ja $]1, \infty[$ funktio f on aidosti vähenevä. Toisaalta, jos $x_1 < 1 < x_2$, niin $f(x_1) < 0 < f(x_2)$. Siksi laajimmat välit, joissa f on monotoninen, ovat edellä mainitut välit. Näistä tiedosta nähdäänkin jo tehtävän vastaus.

- f on monotoninen joukoissa $]-\infty, 1[$ ja $]1, \infty[$ sekä kaikissa niiden osajoukoissa. (Myös tyhjä osajoukko voidaan hyväksyä, joskin sen käsittely menee tämän kurssin kannalta turhan tekniseksi. Perustelu on samantapainen kuin miksi tyhjä joukko on jokaisen joukon osajoukko, katso verkkomonisteen Esimerkki 1.3(i). Ei haittaa vaikka tyhjän joukon tapauksessa rajoittumafunktion määrittelyjoukoksi tuleekin tyhjä joukko, myös tällaiset funktiot sallitaan teknisinä erikoistapauksina.)
- f on monotoninen jokaisessa joukon $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ kahden alkion osajoukossa.
- Muissa joukon $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ osajoukoissa f ei ole monotoninen.

Tehtävän 4 ratkaisu. Relaatio R on määritelty joukossa $X = [-1, 1] \times [0, 2]$ seuraavasti $(x, y)R(u, v) \Leftrightarrow 5x + 2y \geqslant 5u + 2v$.

Osoitetaan ensin, että ehto (a) on voimassa. Jos $(x, y)R(u, v)$ eli $5x+2y \geqslant 5u + 2v$ ei päde, niin

$$5x + 2y < 5u + 2v \Rightarrow 5x + 2y \leqslant 5u + 2v \Rightarrow$$
$$5u + 2v \geqslant 5x + 2y \Rightarrow (u, v)R(x, y).$$

Siis kaikilla $(x, y), (u, v) \in X$ pätee $(x, y)R(u, v)$ tai $(u, v)R(x, y)$. Niinpä ehto (a) on voimassa.

Osoitetaan sitten, että ehto (b) on voimassa. Oletetaan sitä varten, että $(x, y)R(u, v)$ ja $(u, v)R(s, t)$. Tällöin $5x + 2y \geqslant 5u + 2v$ ja $5u + 2v \geqslant 5s + 2t$, mistä saadaan $5x + 2y \geqslant 5s + 2t$ eli $(x, y)R(s, t)$. Siis myös ehto (b) on voimassa, joten R on preferenssirelaatio.

Oletetaan sitten, että X:n relaatio R onkin määritelty seuraavasti:

$$(x, y)R(u, v) \Leftrightarrow u \geqslant x.$$

Tämä relaatio voidaan todistaa preferenssirelaatioksi samaan tapaan kuin edellinenkin.

Ehto (a) on voimassa, sillä, jos $(x, y)R(u, v)$ eli $u \geqslant x$ ei päde, niin $u < x \Rightarrow u \leqslant x \Rightarrow x \geqslant u \Rightarrow (u, v)R(x, y)$.

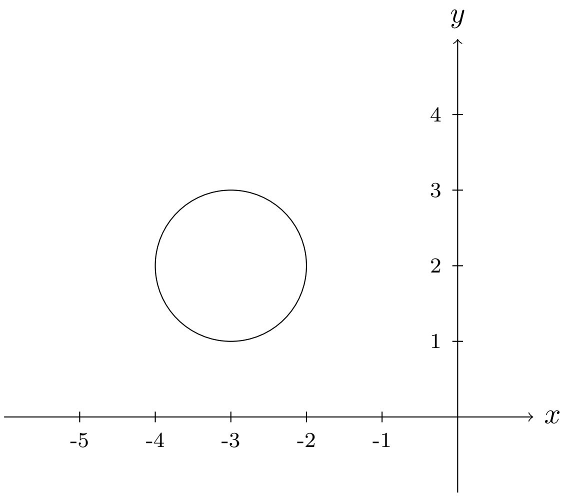
Myös ehto (b) on voimassa, sillä jos $(x, y)R(u, v)$ ja $(u, v)R(s, t)$, niin $u \geqslant x$ ja $s \geqslant u$, ja edelleen $s \geqslant x$, joten $(x, y)R(s, t)$.

(Esimerkin X:n relaatiosta, joka ei ole preferenssirelaatio, tarjoaa vaikkapa sen seuraavasti määritelty relaatio $(x, y)R(u, v) \Leftrightarrow x \geqslant v$. Tämä relaatio ei toteuta ehtoa (a), sillä esimerkiksi kumpikaan vaihtoehdoista $(1, 0)R(-1, 2)$, $(-1, 2)R(1, 0)$ ei päde. Se ei toteuta myöskään ehtoa (b), sillä esimerkiksi $(0, 0)R(1, 0)$ ja $(1, 0)R(0, 1)$ pätevät, mutta kuitenkaan $(0, 0)R(0, 1)$ ei päde.)

Tehtävän 5 ratkaisu. Neliöksi täydentämällä saadaan

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + y^2 - 4y = -12 &\Leftrightarrow (x + \tfrac{6}{2})^2 - \left(\tfrac{6}{2}\right)^2 + (y - \tfrac{4}{2})^2 - \left(\tfrac{4}{2}\right)^2 = -12 \\ &\Leftrightarrow (x+3)^2 - 9 + (y-2)^2 - 4 = -12 \Leftrightarrow (x+3)^2 + (y-2)^2 = 1. \qquad (2) \end{aligned}$$

Siis kyseessä on ympyrä, jonka keskipiste on $(-3, 2)$ ja säde on $\sqrt{1} = 1$:



Yhtälöstä (2) voidaan ratkaista

$$\begin{aligned}(y-2)^2 = 1-(x+3)^2 &\Leftrightarrow y-2 = \pm\sqrt{1-(x+3)^2} \\ &\Leftrightarrow y = 2 \pm \sqrt{1-(x+3)^2},\end{aligned}$$

missä $-4 \leqslant x \leqslant -2$. Olkoot $f_1 : [-4,-2] \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = 2 - \sqrt{1-(x+3)^2}$ ja $f_2 : [-4,-2] \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = 2 + \sqrt{1-(x+3)^2}$. Tehtävän relaatio saadaan näiden funktioiden kuvaajien (eli graafien) yhdisteenä:

$$\big\{(x, f_1(x)) \mid x \in [-4,-2]\big\} \cup \big\{(x, f_2(x)) \mid x \in [-4,-2]\big\},$$

missä ensimmäinen joukko esittää ympyrän alaosaa ja jälkimmäinen yläosaa.

Tehtävän 6 ratkaisu.

Väite. $n! > n^2$ kaikilla $n \geqslant 4$, $n \in \mathbb{N}$.

Tod. Todistetaan väite induktiolla.

1°. Väitteen kaava pätee pienimmällä vaaditulla arvolla eli kun $n = 4$, sillä $4! = 24 > 16 = 4^2$.

2°. Tehdään induktio-oletus: väitteen kaava pätee jollakin $k \geqslant 4$, $k \in \mathbb{N}$. Osoitetaan, että tällöin väitteen kaava pätee myös tapauksessa $n = k+1$:

$$\begin{aligned}(k+1)! = (k+1)\cdot k! &\overset{(1)}{>} (k+1)k^2 = (k+1)kk \\ &\overset{(2)}{>} (k+1)2k > (k+1)(k+1) = (k+1)^2,\end{aligned}$$

missä kohdassa (1) vedottiin induktio-oletukseen ja kohdassa (2) siihen, että $k > 2$, ja lopuksi siihen, että $2k > k+1$. (Kohdasta (2) alkavalla kikkailulla osoitettiin, että $k^2 > k+1$ (kun $k \geqslant 4$). Tämän voi tehdä myös esimerkiksi selvittämällä yhtälön $k^2 - k - 1 = 0$ nollakohdat ja vetoamalla siihen, että kyseessä on ylöspäin aukeava paraabeli.)

Induktioperiaatteen mukaan väite seuraa kohdista 1° ja 2°. $\square$