Tehtävän 1 ratkaisu. (a)

$$\Big(1-\frac{7}{x}\Big)^{3x} \;=\; \Big(1+\frac{1}{-\frac{x}{7}}\Big)^{-\frac{x}{7}\cdot(-21)} \;=\; \bigg(\Big(1+\frac{1}{-\frac{x}{7}}\Big)^{-\frac{x}{7}}\bigg)^{-21} \;\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}\; e^{-21},$$

sillä $-\frac{x}{7}\to-\infty$, kun $x\to\infty$,

$$\lim_{y\to-\infty}\Big(1+\frac{1}{y}\Big)^{y}=e \quad \text{(Lause 7.21(i))}$$

ja kuvaus $t\mapsto t^{-21}$ on jatkuva (pisteessä $t=e$).

(b) Kun $a=0$,

$$x\sin\big(\frac{a}{x}\big) \;=\; x\sin(0) \;=\; 0 \;\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}\; 0.$$

Kun $a\neq 0$,

$$x\sin\big(\tfrac{a}{x}\big) \;=\; \frac{\sin(\frac{a}{x})}{\frac{a}{x}}\cdot a \;\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}\; 1\cdot a=a,$$

sillä tällöin $\frac{a}{x}\to 0$, kun $x\to\infty$, ja Lauseen 7.26 mukaan

$$\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} \;=\; 1.$$

Tehtävän 2 ratkaisu.

$$\begin{aligned}\cos x<\cot x \;\Leftrightarrow\; \cos x<\frac{\cos x}{\sin x} \;\Leftrightarrow\; 0<\frac{\cos x}{\sin x}-\cos x\\ \Leftrightarrow\; 0<\big(\frac{1}{\sin x}-1\big)\cos x. \qquad (1)\end{aligned}$$

Selvitetään epäyhtälön (1) oikean puolen kaavan tekijöiden nollakohdat ja pisteet, joissa niitä ei ole määritelty. Koska nämä tekijät ovat jatkuvia funktioita, Bolzanon lauseen perusteella niiden merkit voivat vaihtua vain tällaisia pisteitä ohitettaessa.

Ensimmäisen tekijän nollakohdat:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin x}-1=0 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{\sin x}=1 \;\Leftrightarrow\; \sin x=1\\ \Leftrightarrow\; x=\frac{\pi}{2}+n2\pi,\quad n\in\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

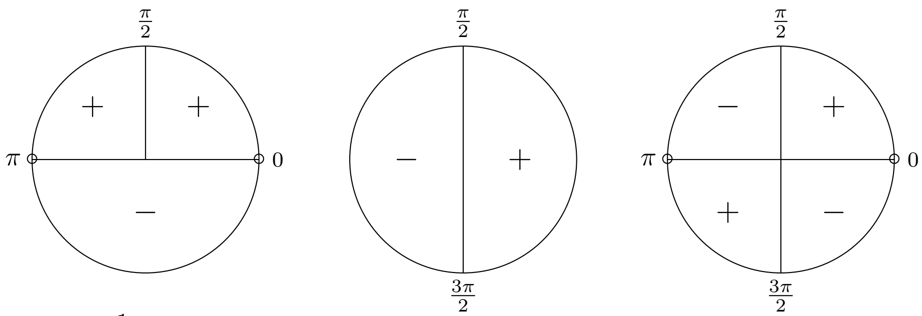
Ensimmäinen tekijä ei ole määritelty, kun

$$\sin x = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0 + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Toisen tekijän nollakohdat:

$$\cos x = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{\pi}{2} + n\pi \; n \in \mathbb{Z}.$$

Jaksollisuuden takia trigonometristen funktioiden merkkikaaviot on havainnollista esittää ympyräsektoreiden avulla:



$\frac{1}{\sin x} - 1$ $\qquad$ $\cos x$ $\qquad$ $\left(\frac{1}{\sin x} - 1\right)\cos x$

Siis

$$\cos x < \cot x \;\Leftrightarrow\; 0 + n\pi < x < \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad \text{jollakin } n \in \mathbb{Z}.$$

Huomaa, että vastauksessa jaksollisuustermi on $n\pi$ eikä $n2\pi$, joten se todellakin kattaa kuvan ympyrän molemmat positiiviset sektorit: parametrien n parilliset tapaukset kattavat ensimmäisen sektorin (nollakulmasta laskien positiiviseen kiertosuuntaan eli vastapäivään) ja parittomat toisen.

Kaavaa $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ käyttäen saadaan

$$\sin 2x > \cot x \;\Leftrightarrow\; 2\sin x\cos x > \frac{\cos x}{\sin x} \;\Leftrightarrow\; 2\sin x \cos x - \frac{\cos x}{\sin x} > 0$$
$$\Leftrightarrow\; \left(2\sin x - \frac{1}{\sin x}\right)\cos x > 0. \tag{2}$$

Selvitetään epäyhtälön (2) vasemman puolen kaavan tekijöiden nollakohdat ja pisteet, joissa niitä ei ole määritelty. Tämän jälkeen merkkikaaviot voidaan piirtää kuten edellä.

Ensimmäisen tekijän nollakohdat:

$$2\sin x - \frac{1}{\sin x} = 0 \;\Leftrightarrow\; 2\sin x = \frac{1}{\sin x} \;\Leftrightarrow\; \sin^2 x = \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow\; \sin x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \;\Leftrightarrow\; x = \frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

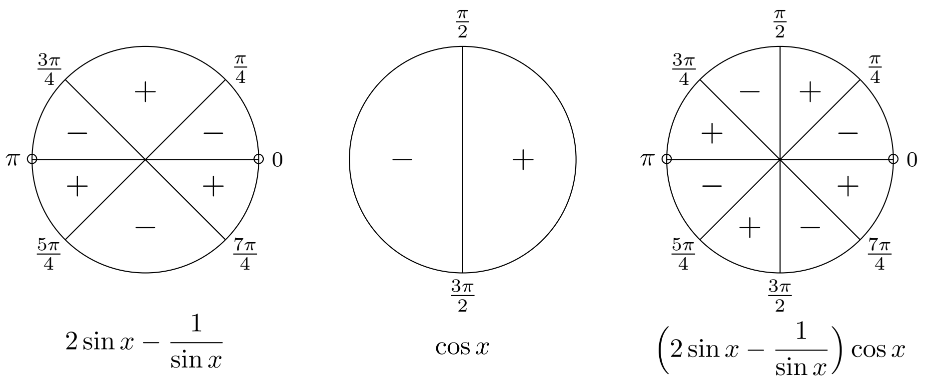
Ensimmäinen tekijä ei ole määritelty, kun

$$\sin x = 0 \iff x = 0 + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Toisen tekijän nollakohdat:

$$\cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + n\pi \; n \in \mathbb{Z}.$$

Merkkikaaviot:



Siis

$$\sin 2x > \cot x$$

$$\iff \frac{\pi}{4} + n\pi < x < \frac{\pi}{2} + n\pi \;\text{ tai }\; \frac{3\pi}{4} + n\pi < x < \pi + n\pi \;\text{ jollakin }\; n \in \mathbb{Z}.$$

Huomaa taas, että vastauksessa jaksollisuustermi on $n\pi$ eikä $n2\pi$, joten se todellakin kattaa kaikki neljä positiivista sektoria: parametrin n parilliset tapaukset kattavat kaksi ensimmäistä (nollakulmasta laskien positiiviseen kierosuuntaan eli vastapäivään) ja parittomat kattavat kaksi viimeistä.

Tehtävän 3 ratkaisu. Kaavasta $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ saadaan

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}\big(\cos 2\alpha + 1\big). \tag{3}$$

Sijoittamalla tähän $\alpha = 2x$ ja korottamalla yhtälö puolittain toiseen potenssiin saadaan

$$\cos^4 2x = \left(\frac{1}{2}\big(\cos 4x + 1\big)\right)^2 = \frac{1}{4}\big(\cos^2 4x + 2\cos 4x + 1\big) \tag{4}$$

Sijoittamalla $\alpha = 4x$ kaavaan (3) saadaan

$$\cos^2 4x = \frac{1}{2}\big(\cos 8x + 1\big)$$

ja sijoittamalla tämä puolestaan kaavaan (4) saadaan

$$\begin{aligned}\cos^4 2x &= \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{2}\big(\cos 8x + 1\big) + 2\cos 4x + 1\Big) \\ &= \frac{1}{8}\cos 8x + \frac{1}{2}\cos 4x + \frac{3}{8}. \qquad (5)\end{aligned}$$

Kaavasta $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ saadaan

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}\big(1 - \cos 2x\big)$$

ja korottamalla tämä puolittain toiseen potenssiin saadaan

$$\sin^4 x = \Big(\frac{1}{2}\big(1 - \cos 2x\big)\Big)^2 = \frac{1}{4}\big(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x\big).$$

soveltamalla tähän vielä kaavaa (3) tapauksessa $\alpha = 2x$ sadaan

$$\begin{aligned}\sin^4 x &= \frac{1}{4}\Big(1 - 2\cos 2x + \frac{1}{2}\big(\cos 4x + 1\big)\Big) \\ &= \frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}. \qquad (6)\end{aligned}$$

Kaavojen (5) ja (6) perusteella:

$$\cos^4 2x - \sin^4 x = \frac{1}{8}\cos 8x + \frac{3}{8}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 2x.$$

Tehtävän 4 ratkaisu. Funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x - \sqrt{3}\sin x$, on derivoituva, joten sen lokaalit ääriarvokohdat löytyvät derivaatan nollakohdista:

$$\begin{aligned}f'(x) = -\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0 \ &\Leftrightarrow\ \sin x = -\sqrt{3}\cos x \\ \Leftrightarrow\ \tan x = -\sqrt{3} \ &\Leftrightarrow\ x = -\frac{\pi}{3} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Pisteissä $x = -\frac{\pi}{3} + n2\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, derivaatan merkki vaihtuu positiivisesta negatiiviseen x:n kasvaessa. Siis niissä f saa lokaalit maksimit:

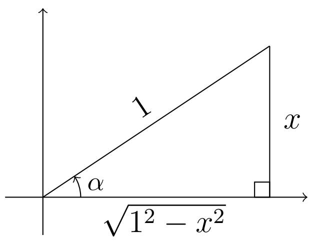
$$f\big(-\frac{\pi}{3} + n2\pi\big) = \cos\big(-\frac{\pi}{3}\big) - \sqrt{3}\sin\big(-\frac{\pi}{3}\big) = \frac{1}{2} + \sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 2.$$

Pisteissä $x = -\frac{\pi}{3} + \pi + n2\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, derivaatan merkki vaihtuu negatiivisesta positiiviseen x:n kasvaessa. Siis niissä f saa lokaalit minimit:

$$f\big(-\frac{\pi}{3} + \pi + n2\pi\big) = \cos\big(-\frac{\pi}{3} + \pi\big) - \sqrt{3}\sin\big(-\frac{\pi}{3} + \pi\big) = -\frac{1}{2} - \sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = -2.$$

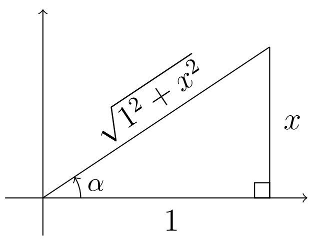
Edellä olevasta nähdään myös, että x:n kasvaessa $f(x)$ vuorotellen kasvaa -2:sta 2:een ja vuorotellen vähenee 2:sta -2:een. Siksi f:llä on pienin ja suurin arvo, jotka siis ovat -2 ja 2, sekä $f(\mathbb{R}) = [-2, 2]$.

Tehtävän 5 ratkaisu. $\overline{\mathrm{arc}}\sin x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ja $\cot(\overline{\mathrm{arc}}\sin x)$ on määritelty, kun $\overline{\mathrm{arc}}\sin x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \setminus \{0\}$ eli $x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$. Pythagoraan lauseen ja trigonometristen funktioiden määritelmien avulla saadaan:



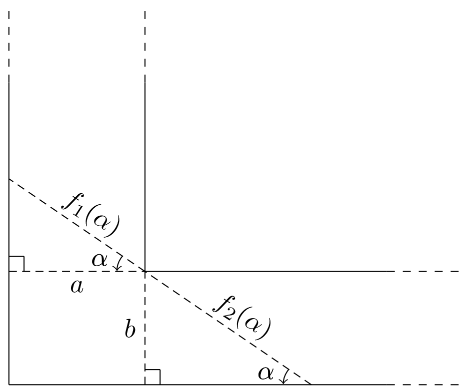
$$\sin\alpha = \frac{x}{1},$$
$$\alpha = \overline{\mathrm{arc}}\sin x \text{ ja}$$
$$\cot(\overline{\mathrm{arc}}\sin x) = \cot\alpha = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$$
kaikilla $x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$.

$\overline{\mathrm{arc}}\tan x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ ja $\cos(\overline{\mathrm{arc}}\tan x)$ on määritelty kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Alla on jälleen käytetty Pythagoraan lausetta ja trigonometristen funktioiden määritelmiä.



$$\tan\alpha = \frac{x}{1},$$
$$\alpha = \overline{\mathrm{arc}}\tan x \text{ ja}$$
$$\cos(\overline{\mathrm{arc}}\tan x) = \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$
kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

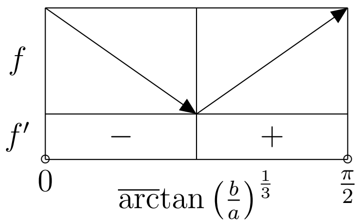
Tehtävän 6 ratkaisu. Tangon läpimitta oletetaan niin pieneksi, että sen vaikutus laskelmiin voidaan jättää huomiotta. Tankoa siis pidetään laskuissa janana. Tämän yksinkertaistuksen takia saatu maksimipituus on oikeasti hieman liian suuri.



$$f_1(\alpha) = \frac{a}{\cos\alpha},$$
$$f_2(\alpha) = \frac{b}{\sin\alpha} \text{ ja}$$
$$f(\alpha) = f_1(\alpha) + f_2(\alpha),$$
missä $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

On aika selvää, että tanko voidaan viedä vaakatasossa kulman läpi jos ja vain jos sen pituus ei ylitä $f(\alpha)$:aa millään $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Selvitetään siksi derivaatan merkkikaavion avulla kuinka pieniä arvoja $f(\alpha)$ saa välillä $]0, \frac{\pi}{2}[$.

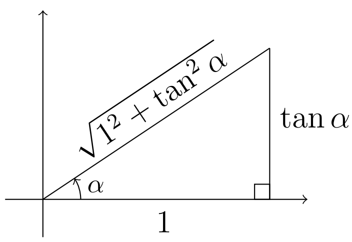
$$\begin{aligned} f'(\alpha) &= -\frac{a}{\cos^2\alpha}\cdot(-\sin\alpha) - \frac{b}{\sin^2\alpha}\cdot\cos\alpha = \frac{a\sin\alpha}{\cos^2\alpha} - \frac{b\cos\alpha}{\sin^2\alpha} \\ &= \frac{a\sin^3\alpha - b\cos^3\alpha}{\cos^2\alpha\,\sin^2\alpha} = 0 \Leftrightarrow a\sin^3\alpha = b\cos^3\alpha \\ &\Leftrightarrow \tan^3\alpha = \frac{b}{a} \Leftrightarrow \tan\alpha = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow \alpha = \overline{\text{arc}}\tan\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$



Siis $f(\alpha)$ saa välillä $]0, \frac{\pi}{2}[$ pienimmän arvon pisteessä $\overline{\text{arc}}\tan\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$ ja tehtävän vastaus on

$$f\Big(\overline{\text{arc}}\tan\left(\tfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}\Big).$$

Vastausta voi sieventää käyttämällä edellisen tehtävän ratkaisun tapaan johdettuja trigonometrisia kaavoja:



$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} \quad \text{ja}$$

$$\sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}.$$

Näitä kaavoja käyttäen saadaan

$$f(\alpha) = \frac{a}{\cos\alpha} + \frac{b}{\sin\alpha} = a\sqrt{1+\tan^2\alpha} + b\frac{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}{\tan\alpha}$$

ja

$$
\begin{aligned}
&f\left(\overline{\mathrm{arc}}\tan\left(\tfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}\right) \;=\; a\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}}} \;+\; b\frac{\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}}}}{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}}\\
&=\; a^{\frac{2}{3}}a^{\frac{1}{3}}\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}}} \;+\; b^{\frac{2}{3}}a^{\frac{1}{3}}\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}}}\\
&=\; a^{\frac{2}{3}}\sqrt{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}} \;+\; b^{\frac{2}{3}}\sqrt{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}\\
&=\; \left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)\sqrt{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}\\
&=\; \left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}.
\end{aligned}
$$