Tehtävän 1 ratkaisu. (a) Merkitään $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x + 1$. Koska $f(-1)$ ja $f(-\frac{1}{2})$ ovat erimerkkiset sekä f on jatkuva, f:llä on Bolzanon lauseen perusteella nollakohta välillä $]-1, -\frac{1}{2}[$. Tämän nollakohdan etsimiseen voidaan käyttää Newtonin menetelmää, sillä f on kahdesti derivoituva ja toteuttaa seuraavat ehdot:

1° $f(-1)$ ja $f(-\frac{1}{2})$ ovat erimerkkiset,

2° $f'(x) = 3x^2 + 1 \neq 0$ kaikilla $x \in [-1, -\frac{1}{2}]$ ja

3° $f''(x) = 6x \neq 0$ kaikilla $x \in [-1, -\frac{1}{2}]$.

Valitaan ensin $x_1 \in]-1, -\frac{1}{2}[$ niin, että $f(x_1)$ on samanmerkkinen kuin f'' on välillä $[-1, -\frac{1}{2}]$ eli negatiivinen. Koska $f(-0,75) < 0$, voidaan valita $x_1 = -0,75$. Verkkomonisteen sivulla 82 olevasta kaavasta 6.32 saadaan edelleen

$$
\begin{aligned}
x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \approx -0,686046512, \\
x_3 &= x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \approx -0,682339583 \text{ ja} \\
x_4 &= x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} \approx -0,682327804.
\end{aligned}
$$

Tästä nähdään, että nollakohdan kaksidesimaalinen likiarvo on $-0,68$.

(b) Merkitään $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^4 + x^2 + a$, jolloin $f'(x) = -4x^3 + 2x$. Kun $x_1 = \frac{1}{3}$, verkkomonisteen sivulla 82 olevasta kaavasta 6.32 saadaan

$$
x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = \frac{1}{3} - \frac{-\frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^2} + a}{-4 \cdot \frac{1}{3^3} + \frac{2}{3}}
$$

ja

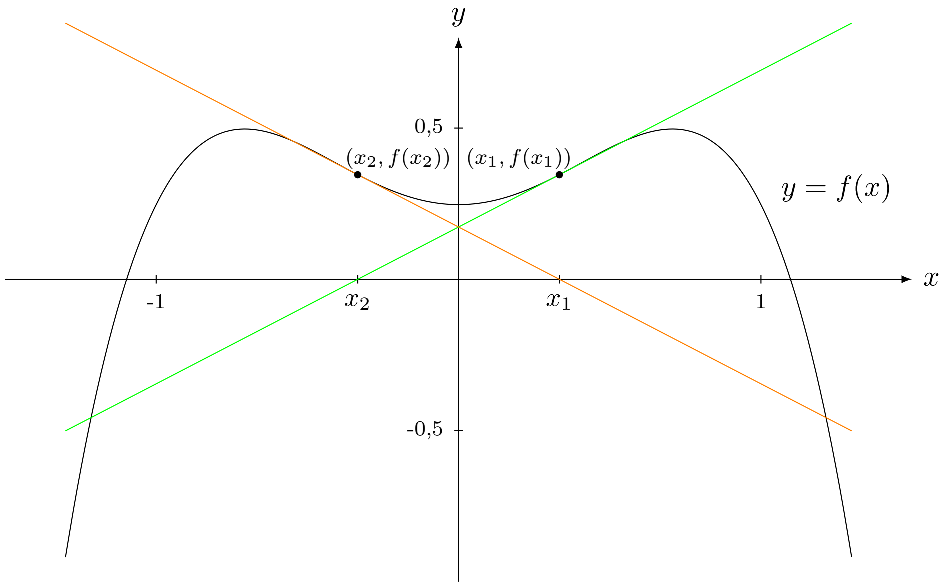
$$
\begin{aligned}
x_2 = -\frac{1}{3} \;&\Leftrightarrow\; \frac{2}{3} = \frac{-1 + 3^2 + a3^4}{-4 \cdot 3 + 2 \cdot 3^3} \;\Leftrightarrow\; 84 = 24 + a3^5 \\
&\Leftrightarrow\; a = \frac{60}{3^5} = \frac{20}{3^4} = \frac{20}{81}.
\end{aligned}
$$

Tällöin verkkomonisteen sivun 82 kaavasta 6.32 saadaan edelleen

$$
\begin{aligned}
x_3 &= x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = -\frac{1}{3} - \frac{-\frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^2} + \frac{20}{3^4}}{\frac{4}{3^3} - \frac{2}{3}} \\
&= -\frac{1}{3} - \frac{-1 + 3^2 + 20}{4 \cdot 3 - 2 \cdot 3^3} = -\frac{1}{3} + \frac{28}{42} = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

Koska $x_3 = x_1$, Newtonin menetelmän kaava 6.32 antaa tässä tapauksessa lukujonon, jossa joka toinen luku on $\frac{1}{3}$ ja joka toinen $-\frac{1}{3}$. Se ei siis suppene. Newtonin menetelmää ei voi soveltaa valinnalla $x_1 = \frac{1}{3}$, koska funktion f molempien nollakohtien ja pisteen $\frac{1}{3}$ väliin jää piste, jossa $f'(x) = 0$. Siis ehto 2° ei voi olla voimassa. Vastaavasta syystä myöskään ehto 3° ei voi olla voimassa.

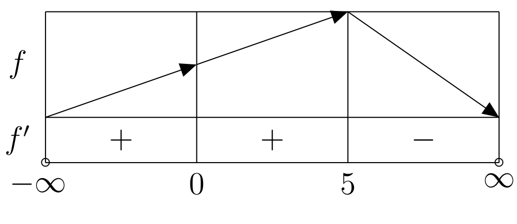
Alla on kuva funktiosta f. Se havainnollistaa miksi Newtonin menetelmän kaava antoi tapauksessa $x_1 = \frac{1}{3}$ lukujonon $\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \ldots$. Pisteeseen $(x_1, f(x_1))$ piirretty tangentti on kuvassa vihreä. Sen ja x-akselin leikkauskohdasta saadaan x_2. Pisteeseen $(x_2, f(x_2))$ piirretty tangentti on kuvassa oranssi. Sen ja x-akselin leikkauskohdasta saadaan x_3, joka on siis sama kuin x_1.



Tehtävän 2 ratkaisu. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^5 e^{-x}$. Selvitetään aluksi f':n merkkikaavio.

$$f'(x) = 5x^4 e^{-x} + x^5(-e^{-x}) = (5 - x)x^4 e^{-x} = 0 \iff x = 5 \text{ tai } x = 0$$

ja saadaan seuraava kaavio.



Tästä kaaviosta nähdään, että f:llä on lokaali maksimi pisteessä 5. Lisäsi siitä nähdään, että f on kasvava välillä $]-\infty, 5]$ ja vähenevä välillä $[5, \infty[$. Siksi f saa suurimman arvonsa pisteessä 5: $f(5) = 3125e^{-5}$.

Esitetään sitten f origokeskisenä potenssisarjana. Määritelmän 7.1 ja Huomautuksen 7.2 perusteella eksponettifunktiolle pätee

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Tämän ja Lauseen 4.10 perusteella saadaan

$$x^5 e^{-x} = x^5 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^5 \frac{1}{n!}(-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{n+5},$$

joka pätee kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Tehtävän 3 ratkaisu. (a) Tämä raja-arvo on muotoa "$\frac{0}{0}$" ja siihen voidaan käyttää L'hospitalin sääntöä (Lauseen 6.34 versiota)

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^8}-1}{e^{x^8}-1} &= \lim_{x\to 0} \frac{D(\sqrt{1+x^8}-1)}{D(e^{x^8}-1)} \\ = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}(1+x^8)^{-\frac{1}{2}} 8x^7}{8x^7 e^{x^8}} &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}(1+x^8)^{-\frac{1}{2}}}{e^{x^8}} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(b) Muokataan lauseketta laskujen helpottamiseksi:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+x^8}}{e^{ax}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4\sqrt{x^{-8}+1}}{e^{ax}} = \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^{-8}+1} \cdot \frac{x^4}{e^{ax}}\right). \tag{1}$$

Huomataan sitten, että

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^{-8}+1} = \sqrt{0+1} = 1. \tag{2}$$

Soveltamalla L'Hospitalin sääntöä neljä kertaa peräkkäin saadaan (kukin raja-arvoista on muotoa "$\frac{\infty}{\infty}$"ja niihin voidaan käyttää L'Hospitalin sääntöä, joskaan tähän tapaukseen sopivaa lausetta ei löydy verkkomonisteesta)

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{e^{ax}} &= \lim_{x\to\infty} \frac{Dx^4}{De^{ax}} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x^3}{ae^{ax}} = \cdots \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{D(4\cdot 3\cdot 2x)}{D(a^3 e^{ax})} = \lim_{x\to\infty} \frac{24}{a^4 e^{ax}} = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

sillä $a > 0$. Kaavojen (1), (2) ja (3) perusteella saadaan

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+x^8}}{e^{ax}} = 1 \cdot 0 = 0.$$

Tehtävän 4 ratkaisu. Lauseke $\ln(x - 5x^4)$ on määritelty, kun $x - 5x^4 > 0$.

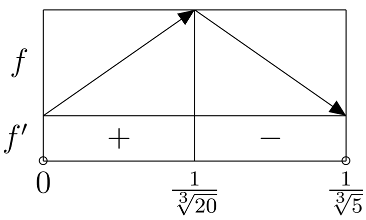
$$x - 5x^4 = 0 \;\Leftrightarrow\; x(1-5x^3) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0 \text{ tai } x = \tfrac{1}{\sqrt[3]{5}}.$$

Seuraavasta merkkikaaviosta nähdään, että tarkasteltava lauseke on määritelty välillä $]0, \frac{1}{\sqrt[3]{5}}[$.

	$-\infty$ … 0	0 … $\frac{1}{\sqrt[3]{5}}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{5}}$ … ∞
x	$-$	$+$	$+$
$1-5x^3$	$+$	$+$	$-$
$x(1-5x^3)$	$-$	$+$	$-$

Funktion $f :]0, \frac{1}{\sqrt[3]{5}}[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x - 5x^4)$, kulun hahmottamiseksi piirretään derivaatan merkkikaavio.

$$f'(x) = \frac{1-20x^3}{x-5x^4} = 0 \;\Leftrightarrow 1 - 20x^3 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{1}{\sqrt[3]{20}}.$$



Derivaatan merkkikaaviosta nähdään, että f saa suurimman arvonsa pisteessä $\frac{1}{\sqrt[3]{20}}$. Lisäksi $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$, joten f:n jatkuvuuden ja Bolzanon lauseen (tai suoremmin Lauseen 3.27) perusteella

$$f\big(\,]0, \tfrac{1}{\sqrt[3]{5}}[\,\big) = \big]-\infty, f\big(\tfrac{1}{\sqrt[3]{20}}\big)\big] = \big]-\infty, \ln\big(\tfrac{3}{4\sqrt[3]{20}}\big)\big].$$

Tehtävän 5 ratkaisu. $f :]0,\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \big(\frac{2}{x}\big)^{\frac{x}{2}} = e^{\frac{x}{2}\ln(\frac{2}{x})}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{\frac{x}{2}\ln(\frac{2}{x})} D\big(\tfrac{x}{2}\ln(\tfrac{2}{x})\big) = \big(\tfrac{2}{x}\big)^{\frac{x}{2}}\big(\tfrac{1}{2}\ln(\tfrac{2}{x}) + \tfrac{x}{2}\cdot\tfrac{1}{\frac{2}{x}} D(\tfrac{2}{x})\big) \\ &= \big(\tfrac{2}{x}\big)^{\frac{x}{2}}\big(\tfrac{1}{2}\ln(\tfrac{2}{x}) + (\tfrac{x}{2})^2(-\tfrac{2}{x^2})\big) = \big(\tfrac{2}{x}\big)^{\frac{x}{2}}\big(\tfrac{1}{2}\ln(\tfrac{2}{x}) - \tfrac{1}{2}\big) \\ &= \tfrac{1}{2}\big(\ln(\tfrac{2}{x}) - 1\big)\big(\tfrac{2}{x}\big)^{\frac{x}{2}} \end{aligned}$$

ja

$$f'(2) = \tfrac{1}{2}\big(\ln(1) - 1\big)1^1 = -\tfrac{1}{2}.$$

Tehtävän 6 ratkaisu. Kun $x > y$, saadaan väliarvolauseen (Lause 6.8) perusteella

$$e^x - e^y = e^\xi (x - y) \tag{4}$$

jollakin $\xi \in]y, x[$. Jos lisäksi $y > 0$, niin $e^\xi > e^0 = 1$ ja kaavasta (4) saadaan

$$e^x - e^y > x - y.$$

Jos taas $0 > x$, niin $e^\xi < e^0 = 1$ ja kaavasta (4) saadaan

$$e^x - e^y < x - y.$$