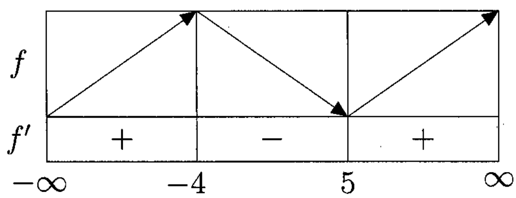
Tehtävän 1 ratkaisu. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 20x + 7$. Tämän tehtävän voi ratkaista derivaatan merkkikaavion avulla. Etsitään siksi aluksi derivaatan nollakohdat:

$$f'(x) = x^2 - x - 20 = 0 \Leftrightarrow x = -4 \text{ tai } x = 5.$$

Derivaatan merkkikaavion voi nyt piirtää joko sillä perusteella, että $f'(x)$ on ylöspäin aukeava paraabeli, tai sillä perusteella, että $f'(x)$ on jatkuva, joten se säilyttää Bolzanon lauseen (Lause 3.28) mukaan merkkinsä peräkkäisten nollakohtien välillä (kullakin välillä tarvitaan yksi merkin testaus). Näin saadaan derivaatan merkkikaavio:



Derivaatan merkkikaavion perusteella funktio f on aidosti monotoninen väleillä $]-\infty, -4]$, $[-4, 5]$ ja $[5, \infty[$. Siitä nähdään myös, että f:llä on pisteessä -4 lokaali maksimi $f(-4) = \frac{173}{3} = 57\frac{2}{3}$ ja pisteessä 5 lokaali minimi $f(5) = -\frac{383}{6} = -63\frac{5}{6}$. Funktiolla f ei ole globaaleja ääriarvoja (eli suurinta ja pienintä arvoa), sillä $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ ja $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

Tehtävän 2 ratkaisu. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 7x^5 - 25x^3 + 10x - 2$. Tutkitaan aluksi edellisen tehtävän tapaan millä väleillä f on aidosti monotoninen, sillä jokaisella tällaisella välillä f:n nollakohtien lukumäärä on helppo selvittää.

$$f'(x) = 35x^4 - 75x^2 + 10 = 0 \Leftrightarrow 7x^4 - 15x^2 + 2 = 0.$$

Merkitään $t = x^2$ $(\geqslant 0)$, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} 7t^2 - 15t + 2 = 0 &\Leftrightarrow t = \frac{15 \pm \sqrt{15^2 - 4 \cdot 7 \cdot 2}}{2 \cdot 7} \\ &\Leftrightarrow t = 2 \ (\geqslant 0) \text{ tai } t = \frac{1}{7} \ (\geqslant 0). \end{aligned}$$

Siis $f'(x) = 0$ jos ja vain jos $x = \pm\sqrt{2}$ tai $x = \pm\frac{1}{\sqrt{7}}$.

Koska f' on jatkuva, se säilyttää Bolzanon lauseen (Lause 3.28) perusteella merkkinsä peräkkäisten nollakohtien välillä. Siksi voidaan piirtää seuraava derivaatan merkkikaavio (kullakin välillä tarvitaan yksi merkin testaus):

f	↗	↘	↗	↘	↗
f'	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

$-\infty \qquad -\sqrt{2} \qquad -\frac{1}{\sqrt{7}} \qquad \frac{1}{\sqrt{7}} \qquad \sqrt{2} \qquad \infty$

1° Koska f on jatkuva, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ ja $f(-\sqrt{2}) > 0$, sillä on Bolzanon lauseen perusteella välillä $]-\infty, -\sqrt{2}]$ ainakin yksi nollakohta. Toisaalta, koska f on aidosti monotoninen välillä $]-\infty, -\sqrt{2}]$, sillä on tällä välillä korkeintaan yksi nollakohta. Siis f:llä on välillä $]-\infty, -\sqrt{2}]$ täsmälleen yksi nollakohta.

2° Koska f on jatkuva ja $f(-\sqrt{2})f(-\frac{1}{\sqrt{7}}) < 0$, sillä on Bolzanon lauseen perusteella välillä $]-\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{7}}]$ ainakin yksi nollakohta. Toisaalta, koska f on aidosti monotoninen välillä $]-\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{7}}]$, sillä on tällä välillä korkeintaan yksi nollakohta. Siis f:llä on välillä $]-\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{7}}]$ täsmälleen yksi nollakohta.

3° Samaan tapaan kuin kohdissa 1° ja 2°, nähdään, että f:llä on kullakin välillä $]-\frac{1}{\sqrt{7}}, \frac{1}{\sqrt{7}}]$, $]\frac{1}{\sqrt{7}}, \sqrt{2}]$ ja $]\sqrt{2}, \infty[$ täsmälleen yksi nollakohta.

Siis tehtävän funktiolla f on täsmälleen viisi nollakohtaa. Derivaatan merkkikaaviosta nähdään myös, että f:n lokaalit ääriarvokohdat ovat

$$-\sqrt{2},\ -\frac{1}{\sqrt{7}},\ \frac{1}{\sqrt{7}} \text{ ja } \sqrt{2},$$

sillä nämä ovat kohdat, joissa derivaatan merkki vaihtuu.

Tehtävän 3 ratkaisu. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x}{1+x^4}.$$

Koska

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\frac{1}{x} + x^3} = 0 > f(-1) \text{ ja}$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x} + x^3} = 0 < f(1),$$

on olemassa $a > 0$ niin, että $f(-1) < f(x) < f(1)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}\setminus]-a, a[$. Tällöin funktiolla f on olemassa suurin arvo jos ja vain jos sillä on olemassa suurin arvo välillä $[-a, a]$, ja ne ovat samat mikäli ovat olemassa. Vastaava pätee pienimmälle arvolle. Siis riittää osoittaa, että funktiolla f on suurin ja pienin arvo tällaisella välillä $[-a, a]$ ja selvittää ne.

Koska f on jatkuva funktio, se saa suljetulla välillä $[-a, a]$ suurimman ja pienimmän arvon (Lause 3.27). Lisäksi, koska f on derivoituva, ne saavutetaan joko välin $[-a, a]$ päätepisteissä tai derivaatan nollakohdissa. Parametrin a valinnan perusteella päätepisteet eivät tule kysymykseen, joten suurin ja pienin arvo saavutetaan derivaataan nollakohdissa:

$$f'(x) = \frac{1(1+x^4) - x(4x^3)}{(1+x^4)^2} = 0 \Leftrightarrow 1 + x^4 - 4x^4 = 0$$
$$\Leftrightarrow x^4 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}}.$$

Siis funktion f suurin ja pienin arvo ovat

$$f\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3}{4\sqrt[4]{3}} = \frac{3\left(\sqrt[4]{3}\right)^3}{4\left(\sqrt[4]{3}\right)^4} = \frac{\sqrt[4]{3^3}}{4} = \frac{\sqrt[4]{27}}{4} \text{ ja}$$
$$f\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) = -\frac{\sqrt[4]{27}}{4}.$$

Tehtävän 4 ratkaisu. Koska funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 + 5x^3 - 23x^2$, on jatkuva sillä on suurin ja pienin arvo suljetulla välillä $[-6, 2]$. Koska f on derivoituva, se saa ne joko välin päätepisteissä tai derivaatan nollakohdissa:

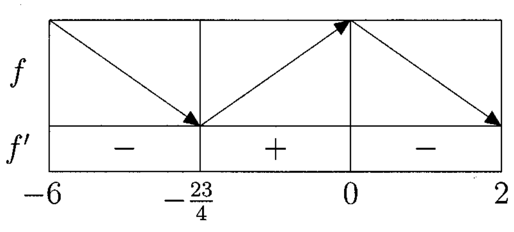
$$f'(x) = 4x^3 + 15x^2 - 46x = 0 \Leftrightarrow x(4x^2 + 15x - 46) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ tai } 4x^2 + 15x - 46 = 0 \Leftrightarrow x = -\tfrac{23}{4} \text{ tai } x = 0 \text{ tai } x = 2.$$

Siis funktion f suurin ja pienin arvo välillä $[-6, 2]$ löydetään seuraavista ehdokkaista:

$$f(-6) = -612, \quad f(2) = -36, \quad f(-\tfrac{23}{4}) = -\tfrac{158171}{4^4} = -617\tfrac{219}{256} \text{ ja } f(0) = 0$$

eli ne ovat 0 ja $-617\frac{219}{256}$.

Funktion f monotonisuutta välilllä $[-6, 2]$ voidaan tutkia tehtävien 1 ja 2 ratkaisujen tapaan derivaatan merkkikaaviosta:

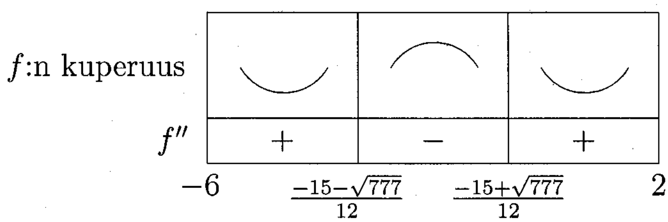


Siis välillä $[-6, 2]$ funktio f on monotoninen väleillä $[-6, -\frac{23}{4}]$, $[-\frac{23}{4}, 0]$ ja $[0, 2]$. Laitimmaisilla väleillä se on aidosti vähenevä ja keskimmäisellä aidosti kasvava.

Funktion f kuperuussuuntien selvittämiseksi lasketaan sen toinen derivaatta:

$$\begin{aligned} f''(x) = 12x^2 + 30x - 46 = 0 &\Leftrightarrow 6x^2 + 15x - 23 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-15 \pm \sqrt{777}}{12}. \end{aligned}$$

Koska f'' on jatkuva, se ei vaihda merkkiä peräkkäisten nollakohtiensa välillä. Funktion f kuperuussuunnat tutkittavalla välillä ilmenevät seuraavasta kaaviosta:



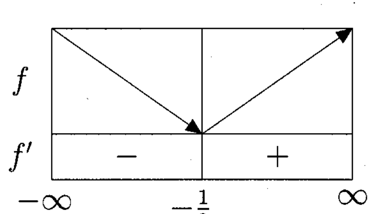
Tehtävän 5 ratkaisu. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x^2 + x + 3}.$$

(Huomaa, että $x^2 + x + 3 = (x + \frac{1}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2 + 3 > 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.) Selvitetään ensin funktion f monotonisuusvälit, koska niiden avulla saadaan selville myös kuvajoukko $f(\mathbb{R})$. Kuten aikaisemmissa tehtävissä, monotonisuusvälit nähdään derivaatan merkkikaaviosta.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x+1)(x^2 + x + 3) - (x^2 + x + 2)(2x + 1)}{(x^2 + x + 3)^2} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (2x + 1)((x^2 + x + 3) - (x^2 + x + 2)) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

joten f:n derivaatalle saadaan seuraava merkkikaavio



josta nähtävien monotonisuusvälien perusteella

$$\begin{aligned} f(\,]-\infty, -\tfrac{1}{2}]) &= [f(-\tfrac{1}{2}), \lim_{x\to-\infty} f(x)[\; = [\tfrac{7}{11}, 1[\quad \text{ja} \\ f([-\tfrac{1}{2}, \infty[\,) &= [f(-\tfrac{1}{2}), \lim_{x\to\infty} f(x)[\; = [\tfrac{7}{11}, 1[. \end{aligned}$$

Tästä havaitaan, että

$$f(\mathbb{R}) = [\tfrac{7}{11}, 1[.$$

Tehtävän 6 ratkaisu. Koska $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ on (jopa vahvasti) konveksi, pätee Määritelmän 6.26 mukaan

$$f(x) \geqslant f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \tag{1}$$

kaikilla $x, x_0 \in [a, b]$ (eli funktio f on pisteisiin $(x_0, f(x_0))$, $x_0 \in [a, b]$ piirrettyjen tangenttisuoriensa yläpuolella tai sivuaa niitä). Erityisesti tapauksissa $x = a$ ja $x = b$ saadaan

$$f(a) \geqslant f'(x_0)(a - x_0) + f(x_0) \quad \text{ja} \tag{2}$$
$$f(b) \geqslant f'(x_0)(b - x_0) + f(x_0). \tag{3}$$

Jos $f'(x_0) \leqslant 0$, niin $f'(x_0)(a - x_0) \geqslant 0$ ja kaavasta (2) saadaan

$$f(a) \geqslant f'(x_0)(a - x_0) + f(x_0) \geqslant f(x_0).$$

Jos taas $f'(x_0) \geqslant 0$, niin $f'(x_0)(b - x_0) \geqslant 0$ ja kaavasta (3) saadaan

$$f(b) \geqslant f'(x_0)(\overset{b}{\cancel{a}} - x_0) + f(x_0) \geqslant f(x_0).$$

Siis $\max(f(a), f(b)) \geqslant f(x_0)$ jokaisella $x_0 \in [a, b]$.

(Koska f on peräti vahvasti konveksi, epäyhtälö (1) on aito (eli $\geqslant$ voidaan korvata symbolilla $>$), kun $x \neq x_0$. Siksi edellä olevasta päättelystä nähdään hieman enemmänkin: $\max(f(a), f(b)) > f(x_0)$ kaikilla $x_0 \in \,]a, b[$.)