**Tehtävän 1 ratkaisu.** Kaksi joukkoa ovat samat, jos niillä on samat alkiot. Siksi kaksi joukkoa voidaan osoittaa samoiksi osoittamalla ne toistensa osajoukoiksi. Siis osoitetaan joukot $2\mathbb{Z} + 7\mathbb{Z} = \{2n + 7m \mid n \in \mathbb{Z} \text{ ja } m \in \mathbb{Z}\}$ ja $\mathbb{Z} = \{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$ toistensa osajoukoiksi.

Oletetaan ensin, että $a \in 2\mathbb{Z}+7\mathbb{Z}$. Tällöin $a = 2n+7m$ joillakin $n, m \in \mathbb{Z}$. Siksi myös $a$ on kokonaisluku eli $a \in \mathbb{Z}$. Siis mikä tahansa joukon $2\mathbb{Z} + 7Z$ alkio on myös joukon $\mathbb{Z}$ alkio eli joukko $2\mathbb{Z} + 7\mathbb{Z}$ on joukon $\mathbb{Z}$ osajoukko eli $2\mathbb{Z} + 7\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$.

Oletetaan sitten, että $a \in \mathbb{Z}$. Huomataan aluksi, että $1 = 2n + 7m$, kun valitaan esimerkiksi $n = 4$ ja $m = -1$. Tämän avulla saadaan $a = a \cdot 1 = a(2 \cdot 4 + 7 \cdot (-1)) = 2 \cdot 4a + 7 \cdot (-a) \in 2\mathbb{Z} + 7\mathbb{Z}$, sillä $4a \in \mathbb{Z}$ ja $-a \in \mathbb{Z}$. Siis $\mathbb{Z} \subset 2\mathbb{Z} + 7\mathbb{Z}$.

**Tehtävän 2 ratkaisu.**

**Väite.** $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

**Tod.** Edellisen tehtävän ratkaisun tapaan riittää osoittaa, että nämä kaksi joukkoa ovat toistensa osajoukkoja.

Oletetaan ensin, että $x \in (A \cap B)^c$. Tällöin $x \notin A \cap B$. Siis $x \notin A$ tai $x \notin B$. Niinpä $x \in A^c$ tai $x \in B^c$ eli $x \in A^c \cup B^c$. Tämä osoittaa, että $(A \cap B)^c \subset A^c \cup B^c$.

Oletetaan sitten, että $x \in A^c \cup B^c$. Tällöin $x \in A^c$ tai $x \in B^c$. Siis $x \notin A$ tai $x \notin B$. Niinpä $x \notin A \cap B$ eli $x \in (A \cap B)^c$. Tämä osoittaa, että $A^c \cup B^c \subset (A \cap B)^c$. $\square$

Samaan tapaan voidaan todistaa, että $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$. Seuraavassa tämän kuitenkin osoitetaan soveltamalla jo todistettua väitettä joukkoihin $A^c$ ja $B^c$. Sen mukaan

$$(A^c \cap B^c)^c = (A^c)^c \cup (B^c)^c.$$

Koska joukon komplementin komplementti on aina joukko itse, saadaan tästä

$$(A^c \cap B^c)^c = A \cup B.$$

Ottamalla tästä yhtälöstä puolittain komplementit ja huomioimalla, että vasemmalla puolella olevat kaksi peräkkäistä komplementia kumoavat toisensa, saadaan haluttu tulos:

$$A^c \cap B^c = (A \cup B)^c.$$

**Tehtävän 3 ratkaisu.** Lauseke $\sqrt{x+2}$ on määritelty, kun $x + 2 \geqslant 0$ eli $x \geqslant -2$. Siis laajin mahdollinen määrittelyjoukko (eli lähtöjoukko) tämän lausekkeen määrittelemälle funktiolle on $[-2, \infty[$. Tällöin suppein mahdollinen maalijoukko on $\{\sqrt{x+2} \mid x \in [-2, \infty[\,\} = [0, \infty[$. Näin saadaan kuvaus

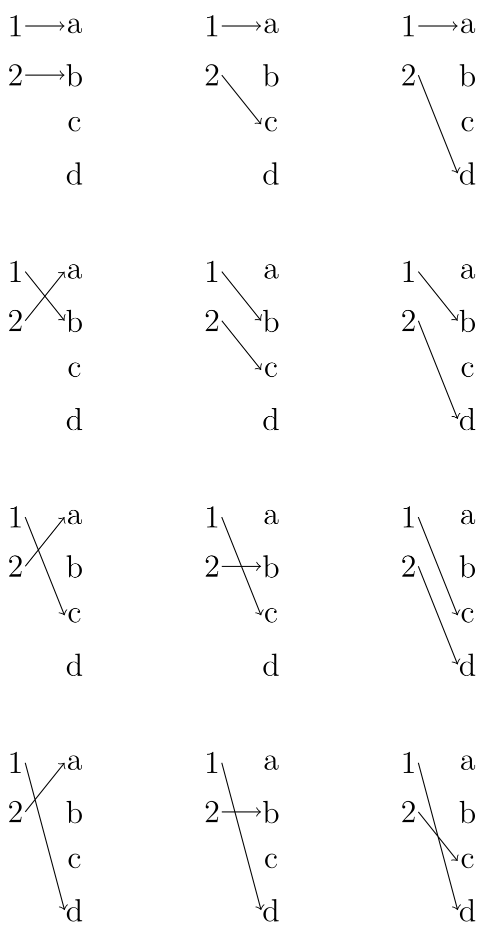
$$f : [-2, \infty[ \to [0, \infty[\,, \quad f(x) = \sqrt{x+2}.$$

Osoitetaan vielä, että tämä kuvaus on bijektio eli, että se on injektio ja surjektio. Se on injektio, sillä jos $x_1, x_2 \in [-2, \infty[$, niin

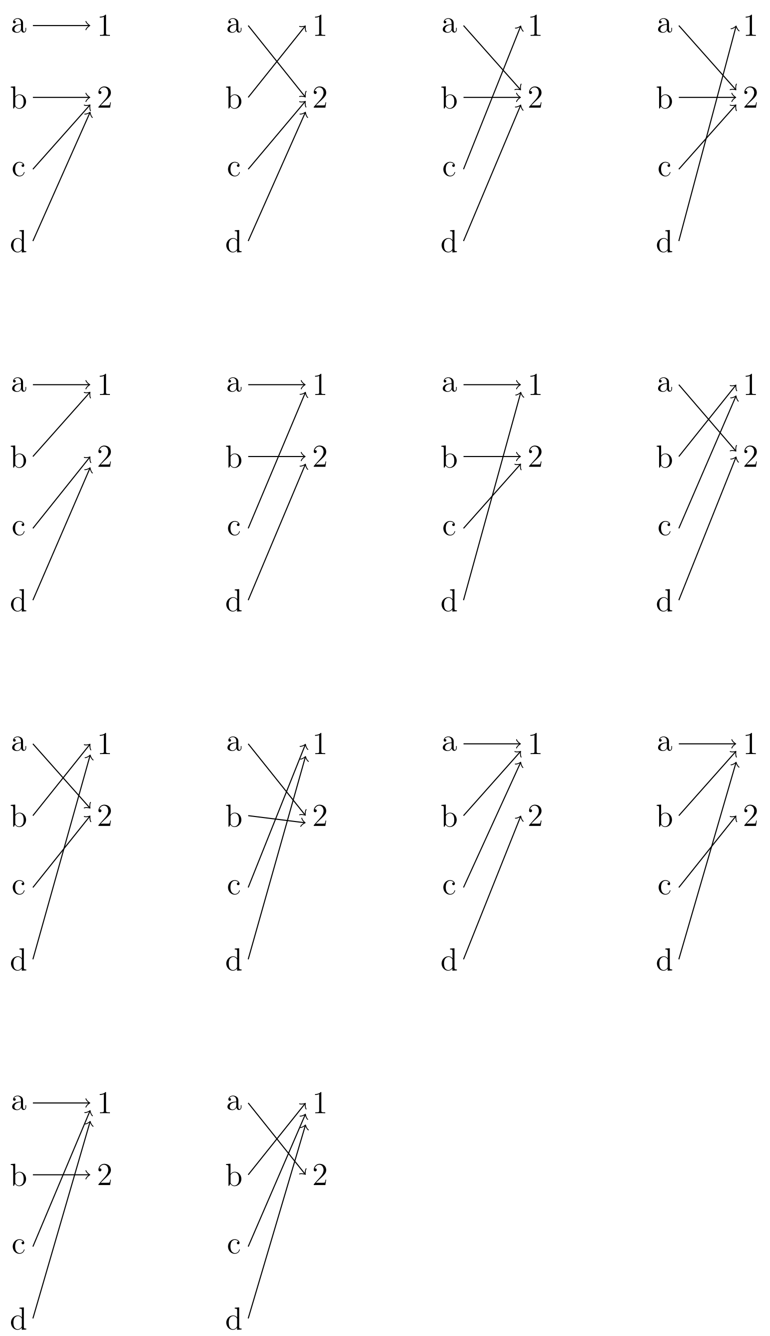
$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \sqrt{x_1 + 2} = \sqrt{x_2 + 2} \Rightarrow x_1 + 2 = x_2 + 2 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Toisaalta $f$ on surjektio, sillä maalijoukko valittiin mahdollisimman pieneksi eli $f$:n saamien arvojen joukoksi: $f([-2, \infty[\,) = [0, \infty[$.

**Tehtävän 4 ratkaisu.** Alla on kuvat kaikista injektioista $f : \{1, 2\} \to \{a, b, c, d\}$. (Tässä oletetaan, että $a$, $b$, $c$ ja $d$ ovat eri alkioita, esimerkiksi aakkoston neljä ensimmäistä kirjainta. Erityisesti ei päde esimerkiksi, että $a = 3 = b$.)



Kaikista surjektioista $f : \{a, b, c, d\} \to \{1, 2\}$ on puolestaan kuvat seuraavassa. (Surjektiot kannatta luetella jossain systemaattisessa järjestyksessä. Seuraavassa luettelointi on tehty sen mukaan montako alkiota kuvautuu 1:lle yksi, kaksi vai kolme.)



**Tehtävän 5 ratkaisu.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2+1)^3$. Merkitään $g_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_\alpha(x) = x^\alpha$, missä $\alpha \in ]0, \infty[$ . Olkoon lisäksi $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = x^2 + 1$. Kun $\alpha > 0$, $g_{3/\alpha} \circ g_\alpha \circ h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on määritelty ja

$$\begin{aligned}(g_{3/\alpha} \circ g_\alpha \circ h)(x) &= (g_{3/\alpha} \circ g_\alpha)(h(x)) = g_{3/\alpha}(g_\alpha(h(x))) \\ &= ((h(x))^\alpha)^{3/\alpha} = h(x)^{3\alpha/\alpha} = h(x)^3 = (x^2+1)^3 = f(x)\end{aligned}$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Siis näin saatiin $f$:lle vaaditut äärettömän monta (jokaiselle $\alpha > 0$ omansa) esitystä yhdistettyinä funktiona.

**Tehtävän 6 ratkaisu.** Oletetaan, että $f : A \to B$ ja $g : B \to C$ ovat injektioita. Tällöin myös niiden yhdistetty kuvaus $g \circ f : A \to C$ on injektio, sillä

$$\begin{aligned}x_1 \neq x_2 &\overset{(1)}{\Rightarrow} f(x_1) \neq f(x_2) \overset{(2)}{\Rightarrow} g(f(x_1)) \neq g(f(x_2)) \\ &\Rightarrow (g \circ f)(x_1) \neq (g \circ f)(x_2),\end{aligned}$$

missä kohdat (1) ja (2) pätevät $f$:n ja $g$:n injektiivisyyden perusteella.

Oletetaan sitten, että $f : A \to B$ ja $g : B \to C$ ovat surjektioita, mutta eivät välttämättä injektioita. Tällöin myös niiden yhdistetty kuvaus $g \circ f : A \to C$ on surjektio, sillä

$$(g \circ f)(A) = g(f(A)) \overset{(1)}{=} g(B) \overset{(2)}{=} C,$$

missä kohdat (1) ja (2) pätevät $f$:n ja $g$:n surjektiivisyyden perusteella.