Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Matemaattisen analyysin kurssi
Harjoitus 9, 16.11.2012

1. Kehitä geometrisen sarjan teorian avulla origokeskiseksi potenssisarjaksi funktio
$$f(x) = \frac{x^2}{2-3x^3}.$$
Määritä kehitelmäsi avulla funktion f origoderivaatat $f^{(k)}(0)$ k:n arvoilla $1 \leq k \leq 5$. (Neuvo: muokkaa ensin nimittäjää muotoon $1-$suhdeluku.)

2. Muodosta tehtävän 1 funktion f asteiden 2, 3, 4 ja 5 Taylorin polynomit origossa ja tutki laskimella kokeillen, kuinka hyvin ne approksimoivat f:ää välillä $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

3. Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivaatta toteuttaa ehdon $0 < f'(x) \leq 1$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Mitä arvoja erotus $f(1000) - f(999)$ voi saada?

4. Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivaatta toteuttaa ehdon $\lim_{x \to \infty} f'(x) = 0$. Laske
$$\lim_{x \to \infty} (f(x+1) - f(x)).$$
(Neuvo: sovella väliarvolausetta sopivalla välillä.)

5. Olkoon $f(x) = \sqrt[5]{x}$. Arvioi lukua $f(100\ 001) - f(100\ 000)$ väliarvolauseen ja differentiaalikehitelmän avulla. Hae väliarvolauseen avulla varma arvio.

6. Olkoon $f(x) = x^3 - ax^2$, kun $x \leq -1$ ja $f(x) = ax + b$, kun $x > -1$. Tutki voiko vakiot a ja b valita niin, että f on derivoituva funktio.