

Matematiikan ja tilastotieteen laitos  
Matemaattisen analyysin kurssi  
Harjoitus 5, 12.10.2012

1. Funktio  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  toteuttaa seuraavat ehdot

- (1)  $f(x) = x^2 + x + a$ , kun  $x \leq 2$
- (2)  $x + 5 \leq f(x) \leq 2x + 3$ , kun  $x > 2$ .

Tutki, millä  $a$ :n arvoilla  $f$  on jatkuva kohdassa  $x = 2$ . Pohdi lisäksi, voiko  $f$  olla epäjatkuva  $x$ :ssä jokaisella  $x > 2$ . (Neuvo: eri lausekkeet rationaali- ja irrationaaliluvuilla. Tarkkaa todistusta ei vaadita.)

2. Osoita, että funktiolla  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{x^6 + x^3 + 1},$$

on suurin arvo, muttei pienintä arvoa.

3. Tarkastellaan rekursiokaavojen

$$x_1 = 1, x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$$

määrittelemää lukujonoa. Laske jonon termi  $x_5$ . Osoita jono kasvavaksi. Jos jonolla olisi raja-arvo, niin minkä yhtälön se toteuttaisi? (Neuvo: Anna  $n$ :n lähetä ääretöntä rekursiokaavassa.) Osoita tämän avulla, että jono ei voi olla ylhäältä rajoitettu.

4. Laske raja-arvot

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6^n + 2^{2n}}{3^n + 6^{n-2}}$  ja

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (2^{2n+1} - 3^n)$ .

5. a) Esitä geometrisen sarjan teorian avulla päättymätön jaksollinen desimaaliluku  $a = 0,3712712(712)\dots$  kahden kokonaisluvun osamääränä.

b) Onko luku  $0,999(9)\dots$  pienempi kuin luku 1?

6. Millä  $x$ :n arvoilla sarja  $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x+1}{x+3}\right)^k$  suppenee ja mikä on tällöin sen summa?