

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Matemaattisen analyysin kurssi
Harjoitus 3, 28.9.2012

1. Todista induktiolla kaava

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}.$$

2. Osoita, että rationaaliluvun ja irrationaaliluvun summa on aina irrationaaliluku. Voiko niiden tulo olla rationaaliluku ja jos voi, niin millä ehdolla?

3. Määritä termin x^6y^4 kerroin lausekkeessa

$$(-x + y^2)^{100} + (2x - 3y^4)^7 + (-2x^2 + y^2)^5,$$

kun samanmuotoiset termit on potenssien laskemisen jälkeen yhdistetty.

4. Ratkaise epäyhtälöt $x < \frac{2}{x} - 1$ ja $|1 - 3x| \leq x^2 - 1$.

5. Osoita kolmioepäyhtälön avulla, että

$$|x^2 - 6y + 11z| \leq x^2 + 6|y| + 11|z|,$$

kun x , y ja z ovat reaalilukuja. Milloin tässä pätee yhtälö?

6. Olkoon $A = \{\frac{n+1}{n+3} | n \in \mathbb{N}\}$. Määritä $\sup A$ ja $\inf A$.