Mått- och integrationsteori [1][2]

Ilkka Holopainen

24 september 2012

[1]Grundar sig främst på Tylli: Mitta ja integraali (2000) och Väisälä: Diff. Int. III (1985)

[2]Svensk översättning av Alexander Kainberg 2011, bearbetad av Mats Gyllenberg 2012. Om du hittar tryck- eller andra fel meddela Mats Gyllenberg `mats.gyllenberg@helsinki.fi`

1 Repetition och komplettering av förhandskunskaper

1.1 Praktisk mängdlära

Låt X vara en godtycklig mängd. Med *potensmängden till* X förstås mängden av alla delmängder till X. Den betcknas $\mathcal{P}(X)$. Vi har alltså

$$\mathcal{P}(X) = \{A\colon A \subset X\}.$$

En delmängd $\mathcal{F}$ till $\mathcal{P}(X)$ kallas *(mängd)familj*. *Unionen* av mängdfamiljen $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ är

$$\bigcup_{A\in\mathcal{F}} A = \{x \in X : x \in A \text{ \underline{för något} } A \in \mathcal{F}\}$$

och *snittet* är

$$\bigcap_{A\in\mathcal{F}} A = \{x \in X : x \in A \text{ \underline{för alla} } A \in \mathcal{F}\}.$$

Låt $\mathcal{A}$ vara en (index)mängd och antag att det mot varje $\alpha \in \mathcal{A}$ svarar en entydig delmängd $V_\alpha \subset X$, dvs. $\alpha \mapsto V_\alpha$ är en avbildning $\mathcal{A} \to \mathcal{P}(X)$. Då kallas familjen

$$\mathcal{F} = \{V_\alpha \colon \alpha \in \mathcal{A}\}$$

en *indexerad mängdfamilj* till X.

Unionen av en indexerad mängdfamilj är

$$\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} V_\alpha = \{x \in X : x \in V_\alpha \text{ \underline{för något} } \alpha \in \mathcal{A}\}$$

och på motsvarande sätt är *snittet*

$$\bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} V_\alpha = \{x \in X : x \in V_\alpha \text{ \underline{för alla} } \alpha \in \mathcal{A}\}.$$

Vi betecknar även

$$\bigcup_{\alpha} V_\alpha \quad \text{och} \quad \bigcap_{\alpha} V_\alpha, \quad \text{om } \mathcal{A} \text{ framgår av sammanhanget.}$$

Exempel 1.2.

1. Låt $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$. Vi kan tolka $\mathcal{F}$ som en indexerad mängdfamilj genom att använda $\mathcal{F}$ självt som indexmängd. Om $\alpha \in \mathcal{F}$ (dvs. om α är en delmängd av X), så betecknar vi $V_\alpha = \alpha$. Då gäller att $\mathcal{F} = \{V_\alpha \colon \alpha \in \mathcal{F}\}$.

2. Den delmängd till X som innehåller bara ett element, nämligen x, bectecknas $\{x\}$. Då är

$$X = \bigcup_{x\in X} \{x\}.$$

Om indexmängden är $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ betecknar man ofta unionen $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$ enklare

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n \quad \text{eller} \quad \bigcup_{n} V_n,$$

och på motsvarande sätt

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n \quad \text{eller} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \quad \text{eller} \quad \bigcap_{n} V_n.$$

Beteckningarna (V_n), $(V_n)_{n=1}^{\infty}$, $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$, och $V_1, V_2, \ldots$ avser *följder* (av mängder).

Differensen mellan mängderna $A, B \subset X$ är

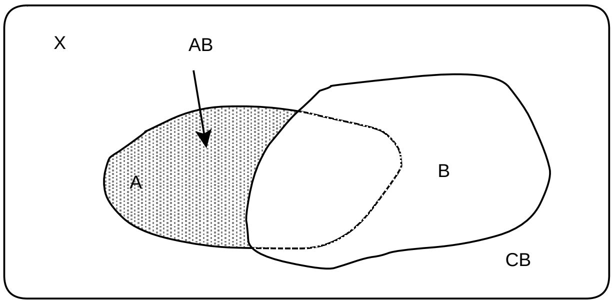
$$A \setminus B = \{x \in X \colon x \in A \text{ och } x \notin B\}.$$

Komplementet till B (med avseende på X) är

$$B^c = X \setminus B.$$

Anmärkning 1.3.

$$A \setminus B = A \cap B^c.$$



Sats 1.4. *Låt $\{V_\alpha \colon \alpha \in \mathcal{A}\} \subset \mathcal{P}(X)$ vara en mängdfamilj. Då gäller* de Morgans lagar*:*

$$\Big(\bigcup_{\alpha} V_\alpha\Big)^c = \bigcap_{\alpha} V_\alpha^c \tag{1.5}$$

och

$$\Big(\bigcap_{\alpha} V_\alpha\Big)^c = \bigcup_{\alpha} V_\alpha^c. \tag{1.6}$$

Låt $B \subset X$. Då gäller de s.k. distributiva lagarna för union och snitt*:*

$$B \cap \Big(\bigcup_{\alpha} V_\alpha\Big) = \bigcup_{\alpha} (B \cap V_\alpha) \tag{1.7}$$

och

$$B \cup \Big(\bigcap_{\alpha} V_\alpha\Big) = \bigcap_{\alpha} (B \cup V_\alpha). \tag{1.8}$$

Bevis. (1.5):

$$x \in \Big(\bigcup_{\alpha} V_\alpha\Big)^c \iff x \notin \bigcup_{\alpha} V_\alpha \iff \forall\alpha \colon x \notin V_\alpha \iff \forall\alpha \colon x \in V_\alpha^c \iff x \in \bigcap_{\alpha} V_\alpha^c.$$

(1.6): På liknande sätt.

(1.7):

$$x \in B \cap \Big(\bigcup_\alpha V_\alpha\Big) \iff x \in B \text{ och } x \in \bigcup_\alpha V_\alpha \iff x \in B \text{ och } x \in V_\alpha \text{ för något } \alpha \in \mathcal{A}$$

$$\iff x \in B \cap V_\alpha \text{ för något } \alpha \in \mathcal{A} \iff x \in \bigcup_\alpha \big(B \cap V_\alpha\big).$$

(1.8): På liknande sätt. □

Bilder och urbilder av unioner/snitt i en mängdfamilj.
Låt X och Y vara icke-tomma mängder och $f\colon X \to Y$ en avbildning.
Bilden av $A \subset X$ (under avbildningen f) är

$$f(A) = \{f(x)\colon x \in A\} \subset Y.$$

Vi betecknar kortare fA.
Urbilden av $B \subset Y$ (under avbildningen f) är

$$f^{-1}(B) = \{x \in X\colon f(x) \in B\}.$$

Vi betecknar kortare $f^{-1}B$. Vi använder även beteckningen

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(\{y\}),$$

när $y \in Y$. [Obs.: f behöver inte ha en invers.]

Sats 1.9. *Låt $f\colon X \to Y$, $\{V_\alpha\colon \alpha \in \mathcal{A}\}$ en mängdfamilj i X och $\{W_\beta\colon \beta \in \mathcal{B}\}$ en mängdfamilj i Y. Då gäller*

$$f\Big(\bigcup_\alpha V_\alpha\Big) = \bigcup_\alpha fV_\alpha \tag{1.10}$$

$$f^{-1}\Big(\bigcup_\beta W_\beta\Big) = \bigcup_\beta f^{-1}W_\beta \tag{1.11}$$

$$f^{-1}\Big(\bigcap_\beta W_\beta\Big) = \bigcap_\beta f^{-1}W_\beta. \tag{1.12}$$

Bevis. (1.10):

$$y \in f\Big(\bigcup_\alpha V_\alpha\Big) \iff y = f(x) \text{ och } x \in \bigcup_\alpha V_\alpha \iff y = f(x) \text{ och } x \in V_\alpha \text{ för något } \alpha \in \mathcal{A}$$

$$\iff y \in fV_\alpha \text{ för något } \alpha \in \mathcal{A} \iff y \in \bigcup_\alpha fV_\alpha.$$

(1.11) och (1.12): På liknande sätt. □

Anmärkning 1.13. Det gäller alltid att

$$f\Big(\bigcap_\alpha V_\alpha\Big) \subset \bigcap_\alpha fV_\alpha,$$

men inklusionen kan vara äkta. Likheten $f(\cap_\alpha V_\alpha) = \cap_\alpha fV_\alpha$ gäller t.ex. om f är en injektion.

Uppräkneliga och ouppräkneliga mängder.

Uppräknelighet är mycket viktigt inom måtteori!

Definition 1.14. Mängden A är *uppräknelig* om $A = \emptyset$ eller om $\exists$ injektion $f\colon A \to \mathbb{N}$ ($\iff$ $\exists$ surjektion $g\colon \mathbb{N} \to A$).

A är *ouppräknelig* om A inte är uppräknelig.

Anmärkning 1.15.

1. A är uppräknelig $\iff$ A är ändlig (inklusive $\emptyset$) eller *uppräkneligt oändlig* ($\exists$ bijektion $f\colon A \to \mathbb{N}$).
2. $A \neq \emptyset$ är uppräknelig $\iff$ $A = \{x_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ (upprepning tillåten, d.v.s. A kan vara ändlig).
3. A är uppräknelig, $B \subset A \;\Rightarrow\; B$ är uppräknelig.

Sats 1.16. *Om mängderna A_n är uppräkneliga $\forall n \in \mathbb{N}$, så är*

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \text{ *uppräknelig.*}$$

(D.v.s. "en uppräknelig union av uppräkneliga mängder är uppräknelig".)

Bevis. Antag att $A_n \neq \emptyset \;\forall\; n \in \mathbb{N}$. A_n är uppräknelig $\Rightarrow$ $A_n = \{x_m(n)\colon m \in \mathbb{N}\}$. Definiera avbildningen

$$g\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \cup_n A_n, \quad g(n,m) = x_m(n).$$

Då är g en surjektion $\mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \cup_n A_n$. Det räcker att hitta en surjektion $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, ty då är

$$g\circ h\colon \mathbb{N} \to \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

en surjektion och därmed är $\cup_n A_n$ uppräknelig. Ett exempel på en surjektion är $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$

$$\begin{array}{cccccccccc}
\underset{=h(1)}{(1,1)} & & \underset{=h(3)}{(1,2)} & & \underset{=h(6)}{(1,3)} & & \underset{=h(10)}{(1,4)} & & \underset{=h(15)}{(1,5)} & \cdots \\
& \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \\
\underset{=h(2)}{(2,1)} & & \underset{=h(5)}{(2,2)} & & \underset{=h(9)}{(2,3)} & & \underset{=h(14)}{(2,4)} & & & \\
& \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & & & \\
\underset{=h(4)}{(3,1)} & & \underset{=h(8)}{(3,2)} & & \underset{=h(13)}{(3,3)} & & & & & \\
& \nearrow & & \nearrow & & & & & & \\
\underset{=h(7)}{(4,1)} & & \underset{=h(12)}{(4,2)} & & & & & & & \\
& \nearrow & & & & & & & & \\
\underset{=h(11)}{(5,1)} & & & & & & & & & \\
\vdots & & & & & & & & &
\end{array}$$

$\square$

Följd 1.17. Mängden av de rationella talen

$$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid n, m \in \mathbb{Z},\ n \neq 0\}$$

är uppräknelig. Orsak: Mängden

$$A_k = \{\frac{m}{n} \mid n, m \in \mathbb{Z},\ n \neq 0,\ |m| \leq k, |n| \leq k\}$$

är ändlig (och därav uppräknelig) $\forall k \in \mathbb{N}$. Sats 1.16 $\Rightarrow$ $\mathbb{Q} = \cup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ uppräknelig. $\square$

Exempel 1.18. (En ouppräknelig mängd). Intervallet $[0,1]$ är ouppräkneligt (härav följer att också mängden $\mathbb{R}$ av alla reella tal är ouppräknelig).

Idé: $x \in [0,1] \Rightarrow\ x$ har en decimalutveckling

$$x = 0, a_1 a_2 a_3 \dots,$$

där $a_j \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$.

Antites: $[0,1]$ är uppräknelig, varav $[0,1] = \{x_n \colon n \in \mathbb{N}\}$. Punkterna x_n har decimal-utvecklingarna

$$\begin{aligned}
x_1 &= 0, a_1^{(1)} a_2^{(1)} a_3^{(1)} \dots \\
x_2 &= 0, a_1^{(2)} a_2^{(2)} a_3^{(2)} \dots \\
x_3 &= 0, a_1^{(3)} a_2^{(3)} a_3^{(3)} \dots \\
&\vdots \\
x_n &= 0, a_1^{(n)} a_2^{(n)} a_3^{(n)} \dots a_n^{(n)} \dots \\
&\vdots
\end{aligned}$$

På "diagonalen" finns talföljden $a_1^{(1)}, a_2^{(2)}, a_3^{(3)}, \dots, a_n^{(n)}, \dots$, där $a_n^{(n)} = n$:te decimalen i x_n. Definiera talet $x \in [0,1]$ genom $x = 0, b_1 b_2 b_3 \dots$, där

$$b_n = \begin{cases} a_n^{(n)} + 2, & \text{om } a_n^{(n)} \in \{0, 1, 2, \dots, 7\}, \\ a_n^{(n)} - 2, & \text{om } a_n^{(n)} \in \{8, 9\}. \end{cases} \tag{1.19}$$

Den n:te decimalen till talet x uppfyller $|b_n - a_n^n| = 2\ \forall n \in \mathbb{N}$, så $x \neq x_n\ \forall n \in \mathbb{N}$. Detta strider mot antagandet, ty $[0,1] = \{x_n \colon n \in \mathbb{N}\}$. $[0,1]$ är alltså ouppräkneligt.

[Obs. Decimalutvecklingen är inte entydig: t.ex. $0,5999\dots = 0,6000\dots$ (detta kan vi se med hjälp av en geometrisk serie). Detta spelar ingen roll för beviset, ty i (1.19) är $b_n = a_n^{(n)} \pm 2$.]

Summering.

Låt $\mathcal{A} \neq \emptyset$ vara en godtycklig indexmängd och $a_\alpha \geq 0\ \forall \alpha \in \mathcal{A}$. Fråga: Vad betyder

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} a_\alpha ?$$

Definition.

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} a_\alpha = \sup\{ \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_0} a_\alpha \mid \mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A} \text{ ändlig}\}.$$

Vi återkommer senare till detta.

1.20 Euklidiska rummet $\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^n = \overbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}^{n \text{ st}} \quad \text{kartesisk produkt}$$

Element kallas *punkter* eller *vektorer*.

$$x \in \mathbb{R}^n \iff x = (x_1, \dots, x_n),\ x_j \in \mathbb{R},\ j = 1, \dots, n.$$

Algebraisk struktur.

Summan av punkterna $x, y \in \mathbb{R}^n$ är

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Produkten av det reella talet $\lambda \in \mathbb{R}$ och punkten $x \in \mathbb{R}^n$ är

$$\lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Nollvektorn

$$0 = \bar{0} = (0, \ldots, 0).$$

Motvektorn till punkten $x \in \mathbb{R}^n$ är

$$-x = (-1)x = (-x_1, \ldots, -x_n).$$

Differensen mellan punkterna $x, y \in \mathbb{R}^n$ är

$$x - y = x + (-y).$$

I $\mathbb{R}^n$ uppfyller summan och multiplikation med ett reellt tal villkoren för ett *vektorrum* (Lin.alg.I), t.ex. gäller det att

$$\begin{gathered} x + y = y + x, \quad x + 0 = 0 + x = x, \\ \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y, \quad (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x \quad \text{osv.} \\ \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \end{gathered}$$

Inre produkten av vektorerna $x, y \in \mathbb{R}^n$ är

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \in \mathbb{R}.$$

Vi betecknar

$$|x| = \sqrt{x \cdot x} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i x_i \right)^{1/2} \qquad \textit{normen} \text{ av } x.$$

Euklidiska avståndet i $\mathbb{R}^n$

Avståndet mellan punkterna $x, y \in \mathbb{R}^n$ är

$$|x - y| = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}.$$

Ofta betecknas $d(x, y) = |x - y|$. Då är d en *metrik* i $\mathbb{R}^n$, d.v.s. avbildningen $d \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uppfyller villkoren för en metrik:

$$\begin{aligned} & d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \\ & d(x, y) = 0 \iff x = y \\ & d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \\ & d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}^n \quad \text{(triangelolikheten, } \triangle\text{).} \end{aligned}$$

Öppna och slutna mängder i $\mathbb{R}^n$. (Vektoranalys, Topo I)

Den euklidiska metriken d definierar öppna och slutna mängder i $\mathbb{R}^n$ (och därav topologin i $\mathbb{R}^n$):

Låt $x \in \mathbb{R}^n$ och $r > 0$. Mängden

$$B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| < r\}$$

är ett *öppet klot* (med medelpunkten x och radien r) och

$$S(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| = r\}$$

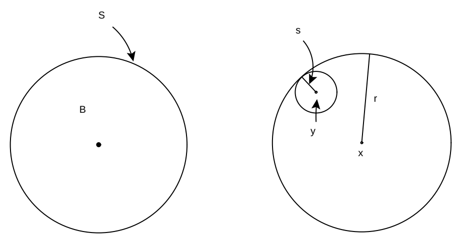
är en *sfär* (med medelpunkten x och radien r). På motsvarande sätt är

$$\bar{B}(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| \leq r\}$$

ett *slutet klot* (med medelpunkten x och radien r).

Mängden $V \subset \mathbb{R}^n$ är *öppen* om $\forall x \in V \ \exists\, r = r(x) > 0$ s.a. $B(x,r) \subset V$.

Mängden $V \subset \mathbb{R}^n$ är *sluten* om komplementmängden $\mathbb{R}^n \setminus V$ är öppen.



Exempel 1.21.

1. $B(x,r)$ är öppen $\forall x \in \mathbb{R}^n, r > 0$ ($\triangle$, se bilden ovan).
2. Ett slutet klot $\bar{B}(x,r)$ är en sluten mängd.
3. $\mathbb{R}^n$ och $\emptyset$ är både öppna och slutna.
4. Halvöppna intervall, t.ex. $[0,1) \subset \mathbb{R}$, är varken öppna eller slutna.

Anmärkning 1.22. *Det slutna höljet* till mängden $A \subset \mathbb{R}^n$ är

$$\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : x \in A \text{ eller } x \text{ är en hopningspunkt till } A\}.$$

Punkten $x \in \mathbb{R}^n$ är en hopningspunkt till mängden $A \subset \mathbb{R}^n$ om $\forall r > 0$ gäller att $B(x,r) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$. I $\mathbb{R}^n$ gäller det att $\bar{B}(x,r) = \overline{B(x,r)}$.

Anmärkning 1.23. Om (X,d) är ett *metriskt rum*, d.v.s. $d \colon X \times X \to \mathbb{R}$ uppfyller villkoren för en metrik, så kan man definiera de öppna och slutna mängderna i X (med avseende på d) som tidigare genom att ersätta $|y - x|$ med metriken $d(x,y)$.

Följande resultat gäller allmänt:

Sats 1.24. *Låt $\mathcal{A}$ vara en godtycklig indexmängd. Då gäller att*

$$V_\alpha \subset \mathbb{R}^n \text{ öppen } \forall \alpha \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha \text{ öppen;} \tag{1.25}$$

$$V_\alpha \subset \mathbb{R}^n \text{ sluten } \forall \alpha \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha \text{ sluten;} \tag{1.26}$$

(1.27) $$V_1, \dots, V_k \subset \mathbb{R}^n \textit{ öppna} \Rightarrow \bigcap_{j=1}^{k} V_j \textit{ öppen;}$$

(1.28) $$V_1, \dots, V_k \subset \mathbb{R}^n \textit{ slutna} \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{k} V_j \textit{ sluten.}$$

Bevis. (Topo I) (1.25):

$$x \in \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha \Rightarrow \exists \alpha_0 \in \mathcal{A} \text{ s.a. } x \in V_{\alpha_0},$$
$$V_{\alpha_0} \text{ öppen } \Rightarrow \exists \text{ öppet klot } B(x,r) \subset V_{\alpha_0} \subset \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha.$$

(1.26):

$$\begin{aligned} V_\alpha \quad &\text{sluten } \forall\ \alpha \ \Rightarrow\ V_\alpha^c \quad \text{öppen } \forall\ \alpha \\ \overset{(1.25)}{\Longrightarrow} \quad &\bigcup_\alpha V_\alpha^c \overset{\text{de Morg.}}{=} \Big(\bigcap_\alpha V_\alpha\Big)^c \quad \text{öppen} \\ &\Rightarrow \bigcap_\alpha V_\alpha \quad \text{sluten.} \end{aligned}$$

(1.27) och (1.28): Övningsuppgift. □

Anmärkning 1.29.

$$V_j \text{ öppen } \forall j \in \mathbb{N} \not\Rightarrow \bigcap_{j=1}^{\infty} V_j \text{ öppen,}$$
$$V_j \text{ sluten } \forall j \in \mathbb{N} \not\Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} V_j \text{ sluten.} \quad \text{(Övningsuppgift)}$$

2 Lebesguemått i $\mathbb{R}^n$

2.1 Inledning

Geometrisk utgångspunkt: Om $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ är ett begränsat intervall, så är dess längd

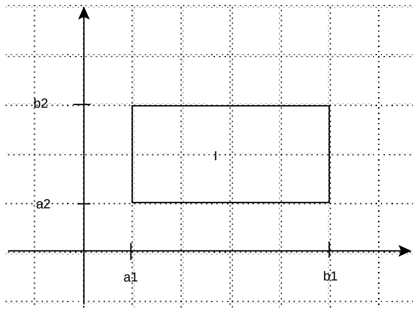
$$\ell(I) = b - a.$$

(Samma om I är öppet eller halvöppet.)

Mängden $I \subset \mathbb{R}^n$ är ett *n-intervall* om den är av formen

$$I = I_1 \times \cdots \times I_n,$$

där varje $I_j \subset \mathbb{R}$ är ett intervall (antingen öppet, slutet eller halvöppet).



I är ett öppet (motsvarande slutet) n-intervall om varje I_j är öppet (motsvarande slutet).

Låt ändpunkterna till I_j vara a_j, b_j; $a_j < b_j$. Då är det *geometriska måttet* av I

$$\ell(I) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n) = \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j)$$

($n = 1$ längd, $n = 2$ area, $n = 3$ volym). Beteckna $\ell(\emptyset) = 0$.

Målet är att definiera ett "mått" , det vill säga en avbildning

$$m_n \colon \mathcal{M} \to [0, +\infty],$$

som uppfyller följande villkor:

(1) $\mathcal{M}$ är en så stor delmängd av $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ som möjligt.

(2) $m_n(E) \geq 0$ för alla $E \in \mathcal{M}$ och $m_n(\emptyset) = 0$.

(3) Varje n-intervall I hör til $\mathcal{M}$ och $m_n(I) = \ell(I)$.

(4) Om $\{E_k\}$ är en *disjunkt* (d.v.s. $E_j \cap E_k = \emptyset$ då $j \neq k$) familj av mängder i $\mathcal{M}$, så är

$$m_n\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m_n(E_k) \qquad \text{"}\sigma\text{-additivitet"}.$$

(5) m_n är *translationsinvariant*, d.v.s. om $E \in \mathcal{M}$ så gäller $x + E \in \mathcal{M}$ för alla $x \in \mathbb{R}^n$ och

$$m_n(x + E) = m_n(E).$$

Här är $x + E = \{x + y \mid y \in E\}$.

Det visar sig att man inte kan definiera ett mått som uppfyller (2) – (5) för $\mathcal{M} = \mathbb{R}$. Vi kommer att definiera (det n-dimensionella) Lebesgueåttet m_n som en avbildning

$$m_n \colon \operatorname{Leb} \mathbb{R}^n \to [0, +\infty],$$

där

$$\operatorname{Leb} \mathbb{R}^n \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n).$$

$\operatorname{Leb} \mathbb{R}^n$ kallas familjen av *Lebesguemätbara* mängder. Den innehåller bl.a. alla öppna och slutna mängder.

2.2 Yttre Lebesguemått i $\mathbb{R}^n$

Överenskommelse.

$$\begin{aligned}
a+\infty=\infty+a=\infty, &\qquad a\neq-\infty\\
a-\infty=-\infty+a=-\infty, &\qquad a\neq\infty\\
\infty-\infty, \quad -\infty+\infty &\quad \text{inte definierat}\\
-(\infty)=-\infty, &\qquad -(-\infty)=\infty
\end{aligned}$$

$$\infty\cdot a=a\cdot\infty=\begin{cases}\infty, & a>0\\ -\infty, & a<0\\ 0, & a=0\end{cases} \qquad \text{Obs! } 0\cdot\infty=0$$

$$(-\infty)a=a(-\infty)=\begin{cases}-\infty, & a>0\\ +\infty, & a<0\\ 0, & a=0\end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\infty\cdot\infty&=(-\infty)(-\infty)=\infty\\
(-\infty)\infty&=\infty(-\infty)=-\infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{a}{0}&=\begin{cases}\infty, & a>0\\ -\infty, & a<0\\ \text{inte definierat }, & a=0\end{cases}\\
\frac{a}{\infty}&=\frac{a}{-\infty}=0, \quad a\in\mathbb{R}\\
\frac{\pm\infty}{\pm\infty}&\quad \text{inte definierat}
\end{aligned}$$

Varning: överenskommelsen $0\cdot\infty=0$ kan <u>inte</u> användas för att beräkna gränsvärden $\lim_{k\to\infty}x_ky_x$ i situationer där $\lim_{k\to\infty}x_k=0,\ \lim_{k\to\infty}y_k=\infty$. Man får alltså <u>inte</u> dra slutsatsen att $\lim_{k\to\infty}x_ky_x=(\lim_{k\to\infty}x_k)(\lim_{k\to\infty}y_k)=0\cdot\infty=0$.

Påminnelse: Om $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ är en följd s.a. $a_j\geq 0\ \forall\ j$, så är antingen

$$\sum_{j=1}^{\infty}a_j=\lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{k}a_j\in\mathbb{R} \quad \text{eller} \quad \sum_{j=1}^{\infty}a_j=+\infty.$$

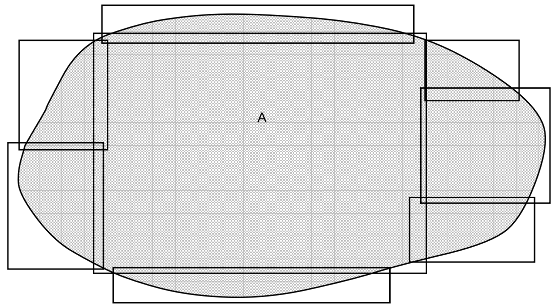
Orsak: delsummorna $\sum_{j=1}^{k}a_j$ bildar en växande följd.

Låt $A\subset\mathbb{R}^n$. Betrakta *uppräkneliga öppna övertäckningar* till A (ev. ändliga)

$$\mathcal{F}=\{I_1,I_2,\ldots\},$$

där varje $I_k\subset\mathbb{R}^n$ är ett begränsat och öppet n-intervall (eller $\emptyset$) och

$$A\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}I_k.$$



Vi säger att $\mathcal{F}$ är en *Lebesgue-övertäckning* till A. Vi bildar summan[1]

$$S(\mathcal{F}) = \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k), \quad 0 \leq S(\mathcal{F}) \leq +\infty.$$

Definition 2.3. Det *n-dimensionella yttre (Lebesgue)måttet* av mängden $A \subset \mathbb{R}^n$ är

$$\boxed{m_n^*(A) = \inf\left\{S(\mathcal{F})\colon\ \mathcal{F} \text{ är en Lebesgue-övertäckning till } \mathcal{A}\right\}.}$$

(Vi visar senare att även slutna n-intervall duger i övertäckningen.)

Anmärkning 2.4.

1. Beteckna $J_k = \{x \in \mathbb{R}^n\colon |x_j| < k\ \forall j\}$ (öppet n-intervall). Självfallet är
$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k,$$
så $\underline{\exists \text{ alltid öppna övertäckningar}}$ $\cup_{k=1}^{\infty} I_k \supset A$ (och därav existerar inf).

2. $I_k \subset \mathbb{R}^n$ öppet n-intervall $\Rightarrow\ 0 \leq \ell(I_k) < \infty\ \Rightarrow$ summan existerar och
$$0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) \leq +\infty.$$

3. Det yttre måttet $m_n(A)$ beror (förstås) på dimensionen n. Om n framgår av sammanhanget betecknar vi kortare $m^*(A) = m_n^*(A)$.

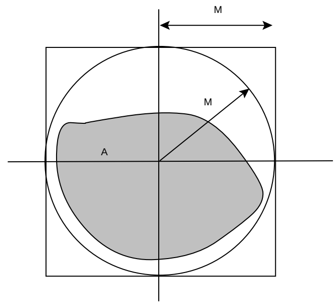
4. Ur definitionen följer direkt att: $\forall \varepsilon > 0\ \exists$ Lebesgue-övertäckning $\mathcal{F}$ till A, (som ofta beror på ε) så att
$$S(\mathcal{F}) \leq m^*(A) + \varepsilon.$$
(Vi tillåter $m^*(A) = +\infty$.) Definitionen innebär inte att man (alltid) kan hitta en Lebesgue-övertäckning $\mathcal{F}$ till A, där $m_n^*(A) = S(\mathcal{F})$.

5. Alltså: $A \mapsto m^*(A)$ är en avbildning $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$, speciellt är m^* definierad i hela $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.

Exempel 2.5.

1. Låt $n = 2$ och låt $A = \{(x, 0)\colon a \leq x \leq b\} \subset \mathbb{R}^2$.
Påstående: $m_2^*(A) = 0$.
Bevis. Låt $\varepsilon > 0$ och $I_\varepsilon =]a-\varepsilon, b+\varepsilon[\times]-\varepsilon, \varepsilon[\subset \mathbb{R}^2$ vara ett öppet 2-intervall.
$$A \subset I_\varepsilon \Rightarrow 0 \leq m_2^*(A) \leq \ell(I_\varepsilon) = 2\varepsilon(b - a + 2\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0,$$
alltså är $m_2^*(A) = 0$.

[1]Egentligen är $S(\mathcal{F})$ en missvisande beteckning, ty $\mathcal{F}$ är en mängd. Överenskommelse: Varje n-intervall i $\mathcal{F}$ indexeras endast en gång, varav det geometriska måttet för varje n-intervall inkluderas exakt en gång i summan $S(\mathcal{F})$.

2. Låt $n = 1$. Betrakta de rationella talen $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
   <u>Påstående:</u> $m_1^*(\mathbb{Q}) = 0$.
   <u>Bevis.</u> $\mathbb{Q}$ är uppräknelig, alltså är $\mathbb{Q} = \{q_j : j \in \mathbb{N}\}$. Låt $\varepsilon > 0$ vara godtyckligt. För varje $j \in \mathbb{N}$ låter vi
   $$I_j = \left]q_j - \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}, q_j + \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}\right[\subset \mathbb{R}$$
   vara ett öppet intervall. Dess längd är $\ell(I_j) = 2\varepsilon/2^{j+1} = \varepsilon/2^j$.
   $$q_j \in I_j \quad \forall j \in \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{Q} \subset \bigcup_j I_j \Rightarrow$$
   $$0 \leq m_1^*(\mathbb{Q}) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \ell(I_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^j} = \varepsilon \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0,$$
   alltså är $m_1^*(\mathbb{Q}) = 0$.
3. $A \subset \mathbb{R}^n$ uppräknelig $\Rightarrow$ $m_n^*(A) = 0$ (Som i 2.)
4. Låt $A \subset \mathbb{R}^n$ vara en *begränsad* mängd, d.v.s. $\exists R > 0$ s.a. $A \subset B(0, R)$. Då är $A \subset I$, där
   $$I =]-R, R[\times \overset{n \text{ st}}{\cdots} \times]-R, R[\quad \text{är ett öppet } n\text{-intervall.}$$
   

   Vi får uppskattningen
   $$m^*(A) \leq \ell(I) = (2R)^n.$$

Yttre (Lebesgue)måttets egenskaper.

Sats 2.6. *(1)* $m_n^*(\emptyset) = 0$;

(2) Det yttre måttet m_n^* *är monotont:* $A \subset B \Rightarrow m_n^*(A) \leq m_n^*(B)$;

(3) Det yttre måttet m_n^* *är subadditivt: För en godtycklig följd av mängder* $A_1, A_2, \ldots \subset \mathbb{R}^n$ *gäller*
$$m_n^*\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m_n^*(A_j).$$

Anmärkning 2.7. (3) gäller även för ändliga unioner $\cup_{j=1}^k (A_j)$ (välj $A_{k+1} = \cdots = \emptyset$).

Bevis.

(1): Klart.

(2): Låt $\mathcal{F}$ vara en Lebesgue-övertäckning till B.

$$A \subset B \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F} \text{ är också en Lebesgue-övertäckning till } A \quad \overset{\text{def.}}{\Longrightarrow} \quad m_n^*(A) \leq S(\mathcal{F}).$$

Vi tar inf över alla Lebesgue-övertäckningar till $B \quad \Rightarrow \quad m_n^*(A) \leq m_n^*(B)$.

(3): Beteckna $A = \cup_j A_j$. Låt $\varepsilon > 0$. För varje j väljer vi Lebesgue-övertäckningen $\mathcal{F}_j = \{I_{j1}, I_{j2} \ldots\}$ till A s.a.

$$S(\mathcal{F}_j) \leq m_n^*(A_j) + \varepsilon/2^j.$$

Nu är $\mathcal{F} = \bigcup_j \mathcal{F}_j = \{I_{jk} \colon j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}\}$ en Lebesgue-övertäckning till A.

$$\overset{\text{def.}}{\Longrightarrow} \quad m_n^*(A) \leq S(\mathcal{F}) = \sum_{j=1}^{\infty} S(\mathcal{F}_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m_n^*(A_j) + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon/2^j = \sum_{j=1}^{\infty} m_n^*(A_j) + \varepsilon.$$

Låt $\varepsilon \to 0 \quad \Rightarrow \quad$ påståendet.

□

Anmärkning 2.8. Ovan behövde vi summeringsteori (ekvationen $S(\mathcal{F}) = \sum_{j=1}^{\infty} S(\mathcal{F}_j)$). Se Lemma 2.13 och 2.14 nedan.

Sats 2.9. *Låt $A \subset \mathbb{R}^n$. Då gäller*

$$m_n^*(A + x) = m_n^*(A) \tag{2.10}$$

för alla $x \in \mathbb{R}^n$, där $A + x = \{y + x \colon y \in A\}$;

$$m_n^*(tA) = t^n m_n^*(A), \tag{2.11}$$

då $t > 0$, där $tA = \{ty \colon y \in A\}$.

Bevis. (Övningsuppgift) □

Summeringsteori. Låt I vara en (index)mängd och $a_i \geq 0 \ \forall \ i \in I$. Om $J \subset I$ är ändlig betecknar vi

$$S_J = \sum_{i \in J} a_i \,, \qquad S_\emptyset = 0.$$

Definition 2.12.

$$\sum_{i \in I} a_i = \sup\{S_J \colon J \subset I \text{ ändlig}\}.$$

Lemma 2.13.

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} a_i = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

d.v.s. Definition 2.12 är ekvivalent med den gängse definitionen för summan av en serie (Analys I).

Bevis. Beteckna $J_n = \{1, \dots, n\}$, $\quad S = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i \quad (= \sup\{S_J \colon J \subset \mathbb{N} \text{ ändlig}\})$.

$$\begin{gathered}\big(S_{J_n}\big) \quad \text{växande följd} \quad \Rightarrow \quad \exists \lim_{n\to\infty} S_{J_n} = S' \\ S_{J_n} \le S \quad \Rightarrow \quad S' \le S.\end{gathered}$$

å andra sidan

$$\begin{aligned} J \subset \mathbb{N} \text{ ändlig} \quad &\Rightarrow \quad \exists\, n \in \mathbb{N} \ \text{ s.a. } \ J \subset J_n \\ &\Rightarrow \quad S_J \le S_{J_n} \le S' \\ \Rightarrow \quad S \le S' \quad &(\text{genom att ta sup över } \forall\ J). \end{aligned}$$

□

I följande lemma är både I och J godtyckliga indexmängder. (Vi betecknar även kortare $a_{ij} = a_{(i,j)}$.)

Lemma 2.14.

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{ij} = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_{ij} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} a_{ij}.$$

Bevis. Vi betecknar S^{v} = vänstra summan, S^{m} = summan i mitten och S^{h} = högra summan.
(a): Om $\mathcal{A} \subset I \times J$ är ändlig så $\exists$ ändliga $I' \subset I,\ J' \subset J$ s.a. $\mathcal{A} \subset I' \times J'$

$$\begin{gathered}\Rightarrow \quad S_{\mathcal{A}} \le S_{I'\times J'} \overset{(*)}{=} \sum_{i\in I'}\sum_{j\in J'} a_{ij} \le \sum_{i\in I'}\sum_{j\in J} a_{ij} \le S_{\mathrm{m}} \\ \Rightarrow \quad S^{\mathrm{v}} \le S^{\mathrm{m}} \quad (\text{genom att ta sup över } \forall\ \mathcal{A}).\end{gathered}$$

[$(*)$: summan $S_{I'\times J'}$ har ändligt många termer så summeringsordningen spelar ingen roll.]
(b): Låt $I' \subset I$ och $J'_i \subset J$ vara ändliga $\forall\ i \in I'$. Beteckna

$$\mathcal{A} = \{(i,j)\colon i \in I', j \in J'_i\}.$$

Då gäller att

$$S^{\mathrm{v}} \ge S_{\mathcal{A}} = \sum_{i\in I'}\sum_{j\in J'_i} a_{ij}.$$

Vi tar $(\forall\ i \in I')$ sup över de ändliga $J'_i \subset J$

$$\begin{gathered} S^{\mathrm{v}} \ge \sum_{i\in I'}\sum_{j\in J} a_{ij} \\ \text{sup över de ändliga } I' \subset I \quad \Rightarrow \quad S^{\mathrm{v}} \ge S^{\mathrm{m}}.\end{gathered}$$

Vi har nu visat att $S^{\mathrm{v}} \ge S^{\mathrm{m}}$.
Likheten $S_{\mathrm{v}} = S_{\mathrm{h}}$ bevisas på motsvarande sätt. □

Korollarium 2.15.

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_{ij} = \sum_{i\in\mathbb{N}}\sum_{j\in\mathbb{N}} a_{ij} = \sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{i\in\mathbb{N}} a_{ij}\,.$$

Anmärkning 2.16. Subadditivitet gäller (oftast) <u>inte</u> i formen

$$m_n^*\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) \le \sum_{i\in I} m_n^*(A_i), \tag{2.17}$$

där $A_i \subset \mathbb{R}^n$, $i \in I$ och I är en *ouppräknelig* indexmängd. <u>Orsak:</u>

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{x\in\mathbb{R}^n} \{x\}, \quad m_n^*(\{x\}) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Om (2.17) gällde så vore

$$0 \le m_n^*(\mathbb{R}^n) = m_n^*\Big(\bigcup_{x\in\mathbb{R}^n} \{x\}\Big) \overset{(2.17)}{\le} \sum_{x\in\mathbb{R}^n} m_n^*(\{x\}) = 0.$$

Å andra sidan så är det uppenbart att $m_n^*(\mathbb{R}^n) = +\infty$ (detta följer också omedelbart av Lemma 2.36 som bevisas senare). Detta visar att (2.17) inte gäller.

2.18 (Lebesgue)mätbara mängder

Vi definierar (Lebesgue-)mätbara mängder i $\mathbb{R}^n$, $\mathrm{Leb}\,\mathbb{R}^n$, med hjälp av *Carathéodorys villkor*.

Subadditivitet (Sats 2.6 (3)): $A, B \subset \mathbb{R}^n \quad \Rightarrow$

$$m^*(A \cup B) \le m^*(A) + m^*(B).$$

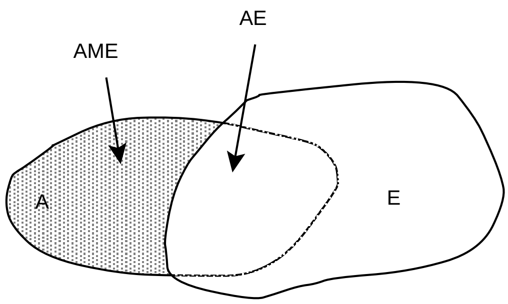
Dessutom (bevisas senare): $\exists\, A, B \subset \mathbb{R}^n$ s.a. $A \cap B = \emptyset$, men

$$m^*(A \cup B) < m^*(A) + m^*(B)$$

d.v.s. m^* är inte σ-additiv. Vi vill undvika det senare fallet (genom att lämna bort en del av delmängderna):

Låt $E \subset \mathbb{R}^n$ vara en given mängd och $A \subset \mathbb{R}^n$ en testmängd". Då är

$$A = (A \cap E) \cup (A \setminus E) \quad \text{disjunkt union}$$
$$m^* \ \text{ subadditiv } \ \Rightarrow \ m^*(A) \le m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E).$$



Definition 2.19. (Carathéodorys villkor, 1914.) Mängden $E \subset \mathbb{R}^n$ är *(Lebesgue-)mätbar* om

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(\underbrace{A \setminus E}_{=A\cap E^c}) \quad \underline{\text{för alla}} \quad A \subset \mathbb{R}^n.$$

Sats 2.20. *$E \subset \mathbb{R}^n$ mätbar* $\iff$

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E) \quad \textit{för alla } A \subset \mathbb{R}^n, \; \textit{där } m^*(A) < \infty. \tag{2.21}$$

Bevis. $\Rightarrow$ är trivialt. Antag att (2.21) gäller. Vi bör visa att Carathéodorys villkor gäller. Om man ersätter likhetstecknet med $\leq$ i Carathéodorys villkor så gäller olikheten på grund av att det yttre måttet är subadditivt. Om man ersätter $=$ med $\geq$ så gäller olikheten trivialt för alla A med $m^*(A) = \infty$. Det räcker alltså att kontrollera att villkoret gäller med $\geq$ istället för $=$ för alla A med $m^*(A) < \infty$ och detta är precis vad (2.21) förutsätter.

Definition 2.22. Om $E \subset \mathbb{R}^n$ är mätbar så betecknar vi

$$m(E) = m^*(E) \quad (\text{vid behov } m_n(E)).$$

$m(E)$ är E:s *(n-dimensionella Lebesgue-)mått.*

Beteckna

$$\operatorname{Leb}\mathbb{R}^n = \{E \subset \mathbb{R}^n \colon E \text{ är Lebesgue-mätbar}\} \quad \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n).$$

Lebesguemåttet m är alltså det yttre måttets m^* restriktion till $\operatorname{Leb}\mathbb{R}^n$:

$$m = m^*|_{\operatorname{Leb}\mathbb{R}^n} \colon \operatorname{Leb}\mathbb{R}^n \to [0, \infty].$$

Senare visar vi att

$$\operatorname{Leb}\mathbb{R}^n \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n).$$

Sats 2.23.

$$m^*(E) = 0 \quad \Rightarrow \quad E \textit{ mätbar.}$$

Bevis. Låt $A \subset \mathbb{R}^n$ vara en testmängd.

$$\begin{aligned} A \cap E \subset E &\overset{\text{monot.}}{\Longrightarrow} m^*(A \cap E) = 0 \\ A \supset A \setminus E &\overset{\text{monot.}}{\Longrightarrow} m^*(A) \geq m^*(A \setminus E) = \underbrace{m^*(A \cap E)}_{=0} + m^*(A \setminus E) \\ &\Rightarrow \quad E \text{ mätbar.} \end{aligned}$$

□

Sats 2.24.

$$E \quad \textit{mätbar} \quad \iff \quad E^c \quad \textit{mätbar.}$$

Bevis. Det räcker med att visa $\boxed{\Rightarrow}$: Låt E vara mätbar och $A \subset \mathbb{R}^n$. Då gäller

$$\begin{aligned} m^*(A) &= m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c) \\ &= m^*\big(A \cap (E^c)^c\big) + m^*(A \cap E^c) \\ &\Rightarrow \quad E^c \quad \text{mätbar.} \end{aligned}$$

□

Exempel 2.25.

$$
\begin{aligned}
&E \subset \mathbb{R}^n \quad \text{uppräknelig} \overset{\text{Ex. 3}}{\Longrightarrow} m^*(E) = 0 \\
&\overset{\text{S. 2.23}}{\Longrightarrow} E \quad \text{mätbar} \overset{\text{S. 2.24}}{\Longrightarrow} E^c \quad \text{mätbar.}
\end{aligned}
$$

<u>Specialfall:</u>

$$
\begin{gathered}
\emptyset \in \operatorname{Leb}\mathbb{R}, \qquad \mathbb{R} \in \operatorname{Leb}\mathbb{R}, \\
\text{rationella talen } \mathbb{Q} \in \operatorname{Leb}\mathbb{R}, \text{ irrationella talen } \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \in \operatorname{Leb}\mathbb{R}.
\end{gathered}
$$

Låt $E_1,\ E_2, \ldots$ vara mätbara. Vi visar att

$$
\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \quad \text{och} \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i \quad \text{är mätbara.}
$$

För detta behöver vi några lemman. Först det ändliga fallet:

Lemma 2.26. $E_1, \ldots, E_k$ *mätbara* $\Rightarrow$ $\bigcup_{i=1}^{k} E_i$ *och* $\bigcap_{i=1}^{k} E_i$ *mätbara.*

Bevis. $\boxed{\text{(a) union:}}$

$$
\bigcup_{i=1}^{k} E_i = \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} E_i \right) \cup E_k
$$

$\Rightarrow$ man kan anta $k = 2$.

Låt $E_1,\ E_2$ vara mätbara. Låt $A \subset \mathbb{R}^n$ vara en testmängd.

$$
\left.
\begin{gathered}
E_1 \quad \text{mätbar} \quad \Rightarrow \\
m^*(A) = m^*(A \cap E_1) + m^*(A \cap E_1^c) \\
\\
E_2 \quad \text{mätbar, } A \cap E_1^c \text{ som testmängd} \quad \Rightarrow \\
m^*(A \cap E_1^c) = m^*(A \cap E_1^c \cap E_2) + m^*(A \cap E_1^c \cap E_2^c)
\end{gathered}
\right\} \Longrightarrow
$$

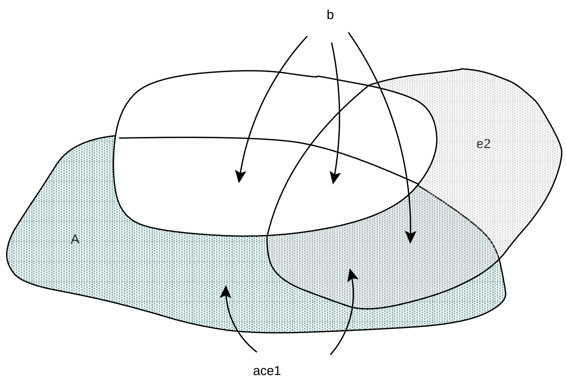
$$
m^*(A) = \underbrace{m^*(A \cap E_1) + m^*(A \cap E_1^c \cap E_2)}_{\text{(subadd. } \Rightarrow) \ \geq\ m^*(B)} + m^*(A \cap E_1^c \cap E_2^c),
$$

där

$$
\begin{aligned}
B &= (A \cap E_1) \cup (A \cap E_1^c \cap E_2) = A \cap \big(E_1 \cup (E_1^c \cap E_2)\big) = A \cap \big(E_1 \cup (E_2 \setminus E_1)\big) \\
&= A \cap (E_1 \cup E_2).
\end{aligned}
$$

Därav är

$$
\begin{aligned}
m^*(A) &\geq m^*(B) + m^*(A \cap E_1^c \cap E_2^c) \\
&= m^*\big(A \cap (E_1 \cup E_2)\big) + m^*\big(A \cap (E_1 \cup E_2)^c\big) \\
&\Rightarrow \quad E_1 \cup E_2 \quad \text{mätbar.}
\end{aligned}
$$



$\boxed{\text{(b) snitt:}}$ de Morgan, Sats 2.24 ("komplementets mätbarhet") och (a) $\Rightarrow$

$$\bigcap_{i=1}^{k} E_i = \left(\bigcup_{i=1}^{k} E_i^c\right)^c \quad \text{mätbar.}$$

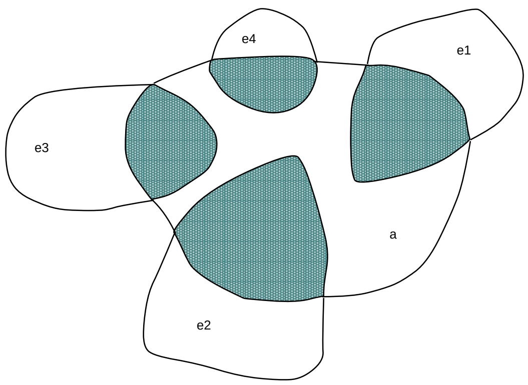
$\square$

Sats 2.27. $E_1,\ E_2$ *mätbara* $\Rightarrow$ $E_1 \setminus E_2$ *mätbar.*

Bevis. $E_1 \setminus E_2 = E_1 \cap E_2^c$. $\square$

Lemma 2.28. *Låt* $E_1, \ldots, E_k$ *vara disjunkta och mätbara och låt* $A \subset \mathbb{R}^n$ *vara godtycklig. Då är*

$$m^*\big(A \cap (\bigcup_{i=1}^{k} E_i)\big) = \sum_{i=1}^{k} m^*(A \cap E_i).$$



Bevis. $\boxed{\text{(a) Fallet } k = 2 :}$ E_1 mätbar och testmängden $A \cap (E_1 \cup E_2) = B$ $\Rightarrow$

$$m^*(B) = m^*(\underbrace{B \cap E_1}_{=A\cap E_1}) + m^*(\underbrace{B \setminus E_1}_{=A\cap E_2})$$

$$= m^*(A \cap E_1) + m^*(A \cap E_2) \quad \text{d.v.s. påståendet.}$$

$\boxed{\text{(b) Allmänna fallet:}}$ Induktion: Antag att påståendet gäller då $2 \le k \le p$, d.v.s.

$$\left.\begin{array}{c} E_1, \ldots, E_p \text{ mätbara} \\ E_i \cap E_j = \emptyset,\ i \neq j \\ A \subset \mathbb{R}^n \end{array}\right\} \Rightarrow m^*\big(A \cap (\bigcup_{i=1}^{p} E_i)\big) = \sum_{i=1}^{p} m^*(A \cap E_i).$$

Då får vi att

$$\left.\begin{array}{l} A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{p+1} E_i\right) = A \cap \left(\left(\bigcup_{i=1}^{p} E_i\right) \cup E_{p+1}\right) \\ \bigcup_{i=1}^{p} E_i,\ E_{p+1} \ \text{ disjunkta och mätbara} \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned} m^*(A \cap (\bigcup_{i=1}^{p+1} E_i)) &\overset{k=2}{=} m^*(A \cap (\bigcup_{i=1}^{p} E_i)) + m^*(A \cap E_{p+1}) \\ &\overset{k=p}{=} \sum_{i=1}^{p} m^*(A \cap E_i) + m^*(A \cap E_{p+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{p+1} m^*(A \cap E_i). \end{aligned}$$

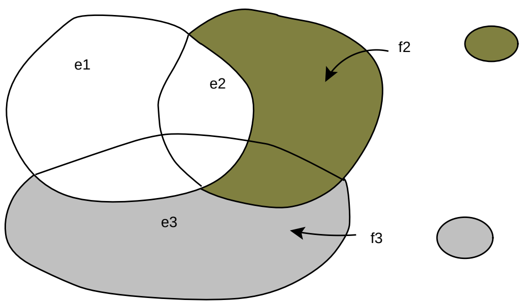
□

Lemma 2.29. *Låt* $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$*, där alla* E_i *är mätbara. Då existerar det* disjunkta *och mätbara* $F_i \subset E_i$ *s.a.*

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i.$$

Bevis. Välj

$$\begin{aligned} &F_1 = E_1, \qquad [\text{mätbar}] \\ &F_2 = E_2 \setminus E_1, \qquad [\text{mätbar (S. 2.27)}] \\ &\quad\vdots \\ &F_k = E_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} E_i, \qquad [\text{mätbar (S. 2.27 och 2.26)}] \\ &\quad\vdots \end{aligned}$$



Då gäller (klart) att

$$F_i \subset E_i \quad \forall\, i, \quad E = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \quad \text{och} \quad F_i \cap F_j = \emptyset \ \forall\, i \neq j.$$

□

Lebesgue-mätbara mängders fundamentalsats

Sats 2.30. *Låt $E_1, E_2, \ldots$ vara en följd (möjligen ändlig) av mätbara mängder. Då är mängderna*

$$\bigcup_i E_i \quad \text{och} \quad \bigcap_i E_i$$

mätbara. Om mängderna E_i dessutom är disjunkta så gäller

$$m\Big(\bigcup_i E_i\Big) = \sum_i m(E_i). \qquad (\sigma\text{-additivitet}) \tag{2.31}$$

Bevis. Beteckna

$$S = \bigcup_i E_i \overset{2.29}{=} \bigcup_i F_i, \quad \text{där mängderna } F_i \text{ är mätbara och disjunkta,}$$

$$S_k = \bigcup_i^k F_i, \quad S_k \subset S.$$

S. 2.26 (ändlig union mätbar) $\Rightarrow$ S_k mätbar. Låt A vara en testmängd. Då är

$$\begin{aligned} m^*(A) &= m^*(A \cap S_k) + m^*(A \setminus S_k) \\ &\overset{\text{monot.}}{\geq} m^*(A \cap S_k) + m^*(A \setminus S) \\ &\overset{2.28}{=} \sum_{i=1}^k m^*(A \cap F_i) + m^*(A \setminus S) \quad \forall k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Då vi låter $k \to \infty$ får vi

$$\begin{aligned} m^*(A) &\geq \sum_{i=1}^\infty m^*(A \cap F_i) + m^*(A \setminus S) \\ &\overset{\text{subadd.}}{\geq} m^*\big(\cup_{i=1}^\infty (A \cap F_i)\big) + m^*(A \setminus S) \\ &= m^*(A \cap S) + m^*(A \setminus S) \\ &\Rightarrow S = \bigcup_i E_i \ \text{ mätbar.} \end{aligned} \tag{2.32}$$

Olikheten (2.32), då $A = S$, och subadditiviteten $\Rightarrow$

$$\sum_i^\infty m(F_i) \overset{\text{subadd.}}{\geq} m(S) \overset{(2.32)}{\geq} \sum_{i=1}^\infty m^*(\overbrace{S \cap F_i}^{=F_i}) + \overbrace{m^*(S \setminus S)}^{=0} = \sum_{i=1}^\infty m(F_i).$$

Om mängderna E_i är disjunkta så kan vi välja $F_i = E_i$, varav (2.31) gäller.

På basis av den första delen och S. 2.24 är $\bigcap_i E_i = \big(\bigcup_i E_i^c\big)^c$ mätbar. $\square$

Exempel 2.33. Låt $A \subset \mathbb{R}^2$ s.a.

$$m^*\big(A \cap B(x,r)\big) \leq |x| r^3 \quad \forall x \in \mathbb{R}^2, \ \forall r > 0. \tag{2.34}$$

<u>Påstående:</u> $m(A) = 0$

<u>Bevis.</u> (a) Låt A vara begränsad, varav $A \subset Q = [-a,a] \times [-a,a]$ (sluten kvadrat) för något a. Låt $n \in \mathbb{N}$. Dela Q i slutna delkvadrater Q_j, vars sidor har längden $2a/n$, och antalet kvadrater är n^2. Låt x_j vara mittpunkten till Q_j. Då gäller:

$$|x_j| \le 2a \quad \text{och} \quad Q_j \subset B(x_j, 2a/n) \qquad \text{(grova uppskattningar)}$$

$$\Rightarrow \; m^*(A \cap Q_j) \overset{\text{monot.}}{\le} m^*\big(A \cap B(x_j, 2a/n)\big) \overset{(2.34)}{\le} |x_j|(2a/n)^3 \le (2a)^4 n^{-3}.$$

$$A = \bigcup_{j=1}^{n^2} (A \cap Q_j) \overset{\text{subadd.}}{\Longrightarrow}$$

$$\begin{aligned} m^*(A) = m^*\Big(\bigcup_{j=1}^{n^2}(A \cap Q_j)\Big) &\le \sum_{j=1}^{n^2} m^*(A \cap Q_j) \\ &\le n^2 (2a)^4 n^{-3} = (2a)^4 n^{-1} \quad \forall\, n \\ &\overset{n\to\infty}{\Longrightarrow} m^*(A) = 0 \;\Rightarrow\; m(A) = 0. \end{aligned}$$

(b) Allmänna fallet.

$$A = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j, \;\text{ där } A_j = A \cap B(0,j) \text{ är begränsad.}$$

$$A_j \subset A \;\Rightarrow \text{samma villkor (2.34) gäller för } A_j \overset{\text{(a)}}{\Rightarrow} m(A_j) = 0 \;\forall j$$

$$\overset{\text{subadd.}}{\Longrightarrow} m(A) = 0.$$

2.35 Exempel på mätbara mängder

De enda exemplen hittills:

$$m^*(A) = 0 \quad \Rightarrow \; A \text{ och } A^c \text{ mätbara}$$

I detta kapitel visar vi bl.a. att de öppna och slutna mängderna är mätbara. Först:

$$I \subset \mathbb{R}^n \quad n\text{-intervall (öppet, slutet, osv.)} \quad \Rightarrow \quad I \text{ mätbar och } m(I) = \ell(I).$$

(Riemann-)integralen som stöd:

Låt $I = I_1 \times \cdots \times I_n \subset \mathbb{R}^n$ vara ett n-intervall, där $I_j \subset \mathbb{R}$ är ett intervall med ändpunkterna $a_j < b_j,\ j = 1, \dots, n$. Låt $\chi_I \colon \mathbb{R}^n \to \{0,1\}$ (karakteristiska funktionen till I)

$$\chi_I(x) = \begin{cases} 1, & x \in I \\ 0, & x \notin I\,. \end{cases}$$

Vi väljer det slutna n-intervallet $Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \supset I$ och (Riemann-)integrerar

$$\int_Q \chi_I = \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} 1 \, dx_1 \cdots dx_n = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n) = \ell(I).$$

Lemma 2.36. *Låt I och $I_1, \dots, I_k$ vara n-intervall s.a. $I \subset \bigcup_{j=1}^k I_j$. Då är $\ell(I) \le \sum_{j=1}^k \ell(I_j)$. Om dessutom snitten $I_i \cap I_j,\ i \ne j$, saknar inre punkter (d.v.s. inget $I_i \cap I_j,\ i \ne j$, innehåller ett öppet klot) och $I = \bigcup_{j=1}^k I_j$, så är $\ell(I) = \sum_{j=1}^k \ell(I_j)$.*

Bevis. Definiera $\chi, \chi_j \colon \mathbb{R}^n \to \{0,1\}$,

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in I \\ 0, & x \notin I \end{cases} \qquad \text{och} \qquad \chi_j(x) = \begin{cases} 1, & x \in I_j \\ 0, & x \notin I_j. \end{cases}$$

Ur antagandet $I \subset \bigcup_{j=1}^k I_j$ följer att $\chi(x) \le \sum_{j=1}^k \chi_j(x)\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n$. Välj ett slutet n-intervall Q som innehåller alla ovannämnda n-intervall och integrera över Q

$$\ell(I) = \int_Q \chi \le \int_Q \big(\sum_j \chi_j\big) = \sum_j \int_Q \chi_j = \sum_j \ell(I_j).$$

Om intervallen I_j saknar gemensamma inre punkter gäller $\chi(x) = \sum_{j=1}^k \chi_j(x)$, förutom möjligtvis för intervallets ändpunkter, vilket inte inverkar på integreringen. $\square$

Anmärkning 2.37. Detta kan även bevisas utan integrering genom att dela alla n-intervall (tillräckligt tätt) i delintervall, så att varje delintervall till I är ett delintervall till åtminstone ett delintervall I_j. (Vi kan anta att alla ursprungliga och nya n-intervall är slutna.)

Lemma 2.38. *Om I är ett n-intervall så är*

$$m^*(I) = \ell(I).$$

Bevis. (a): $\forall \varepsilon > 0\ \exists$ öppet n-intervall $J \supset I$ s.a. $\ell(J) < \ell(I) + \varepsilon$.

$$\{J\} \quad \text{Leb. övertäckning till } I \ \Rightarrow\ m^*(I) \le \ell(I) + \varepsilon$$
$$\varepsilon > 0 \text{ godt.} \ \Rightarrow\ m^*(I) \le \ell(I).$$

(b): Antag först att I är slutet. Låt $\mathcal{F}$ vara en Lebesgue-övertäckning till I. I slutet och begränsat $\Rightarrow$ I kompakt $\Rightarrow$ $\exists$ ändlig delövertäckning $\mathcal{F}_0 = \{I_1, \dots, I_k\} \subset \mathcal{F}$. Lemma 2.36 $\Rightarrow$

$$\ell(I) \le S(\mathcal{F}_0) \le S(\mathcal{F})$$
$$\text{inf över } \forall \mathcal{F} \ \Rightarrow\ \ell(I) \le m^*(I).$$

<u>Alltså:</u> $\ell(I) = m^*(I)$ om I är slutet. Antag sedan att I inte (nödvändigtvis) är slutet. Låt $\varepsilon > 0$. Nu $\exists$ slutet n-intervall $I_c \subset I$ s.a. $\ell(I_c) > \ell(I) - \varepsilon$. Därav är

$$m^*(I) \overset{\text{monot.}}{\ge} m^*(I_c) = \ell(I_c) > \ell(I) - \varepsilon$$
$$\varepsilon > 0 \text{ godt.} \ \Rightarrow\ m^*(I) \ge \ell(I).$$

$\square$

Anmärkning 2.39. (1) Det ovannämnda gäller också för *förkrympta* n-intervall $I = I_1 \times \cdots \times I_n \subset \mathbb{R}^n$, varav (åtminstone) något I_j är en singletonmängd. Då är $\ell(I) \overset{\text{def.}}{=} 0 = m_n^*(I)$.

(2) Låt $A \subset \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ och $J_1, J_2, \ldots \subset \mathbb{R}^n$ godtyckliga n-intervall s.a. $A \subset \bigcup_{i=1}^\infty J_i$. För varje $i\ \exists$ *öppet* n-intervall $I_i \supset J_i$ s.a. $\ell(I_i) < \ell(J_i) + \varepsilon/2^i$. Nu är $\{I_1, I_2 \ldots\}$ en Lebesgue-övertäckning till A, varav $m^*(A) \le \sum_{i=1}^\infty \ell(I_i) \le \sum_{i=1}^\infty \ell(J_i) + \varepsilon$. (Geometrisk serie.) Ur detta följer att

$$m^*(A) = \inf\Big\{\sum_{i=1}^\infty \ell(J_i) \colon A \subset \bigcup_{i=1}^\infty J_i,\ J_i \text{ godtyckligt } n\text{-intervall}\Big\}.$$

Sats 2.40. *Om I är ett n-intervall, så är I mätbart och*

$$m(I) = \ell(I).$$

Bevis. S. 2.38 $\Rightarrow$ räcker att visa att I är mätbart. Låt $A \subset \mathbb{R}^n$ vara en testmängd. Påstående:

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap I) + m^*(A \setminus I).$$

Låt $\varepsilon > 0$. Då $\exists$ en Lebesgue-övertäckning till A; $\mathcal{F} = \{I_1, I_2, \ldots\}$ (öppna n-intervall) s.a.

$$S(\mathcal{F}) \leq m^*(A) + \varepsilon.$$

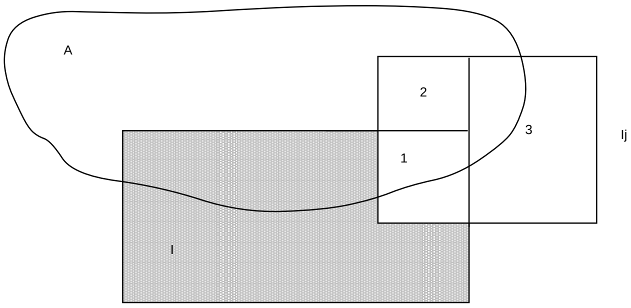
$$\left.\begin{aligned} I &= \Delta_1 \times \cdots \times \Delta_n \\ I_j &=]a_1, b_1[\times \cdots \times]a_n, b_n[\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$I_j \cap I = \big(]a_1, b_1[\cap \Delta_1\big) \times \cdots \times \big(]a_n, b_n[\cap \Delta_n\big) = \begin{cases} n\text{-intervall } I'_j \\ \emptyset. \end{cases}$$

$I_j \setminus I$ är inte nödvändigtvis ett n-intervall, men

$$I_j \setminus I = \bigcup_k I''_{j,k}$$

är en ändlig union av n-intervall s.a. snittena $I'_j \cap I''_{j,k}$ och $I''_{j,k} \cap I''_{j,i}$, $k \neq i$, saknar inre punkter.



Lemma 2.36 och 2.38 $\Rightarrow$

$$\ell(I_j) \overset{2.36}{=} \ell(I'_j) + \sum_k \ell(I''_{j,k}) \overset{2.38}{=} m^*(I'_j) + \sum_k m^*(I''_{j,k}).$$

Summa över j $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} m^*(A) + \varepsilon \geq{} & S(\mathcal{F}) = \sum_j \ell(I_j) = \sum_j m^*(I'_j) + \sum_j \sum_k m^*(I''_{j,k}) \\ & \overset{\text{subadd.}}{\geq} m^*\Big(\underbrace{\bigcup_j I'_j}_{\supset A \cap I}\Big) + m^*\Big(\underbrace{\bigcup_{j,k} I''_{j,k}}_{\supset A \setminus I}\Big) \\ & \overset{\text{monot.}}{\geq} m^*(A \cap I) + m^*(A \setminus I). \end{aligned}$$

Låt $\varepsilon \to 0$ $\Rightarrow$ $m^*(A) \geq m^*(A \cap I) + m^*(A \setminus I)$. $\square$

Sats 2.41. *(Lindelöfs sats) Låt $A \subset \mathbb{R}^n$ vara en godtycklig delmängd och låt*

$$\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha \supset A$$

vara en övertäckning bestående av öppna mängder $V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathcal{A}$. Då existerar en uppräknelig *delövertäckning*

$$\bigcup_{j \in \mathbb{N}} V_{\alpha_j} \supset A.$$

Bevis. Övningsuppgift □

Sats 2.42. *De öppna och slutna mängderna i $\mathbb{R}^n$ är mätbara.*

Bevis. (a) Låt A vara öppen. Om $x \in A$ $\exists$ ett öppet n-intervall $I(x)$ s.a. $x \in I(x) \subset A$ ($\exists$ ett öppet klot $B(x, r_x) \subset A$ och i klotet finns ett öppet n-intervall).

$$\{I(x) \colon x \in A\} \quad \text{är en öppen övertäckning till } A.$$

Lindelöf $\Rightarrow$ $\exists$ uppräknelig delövertäckning $\{I(x_j) \colon j \in \mathbb{N}\}$

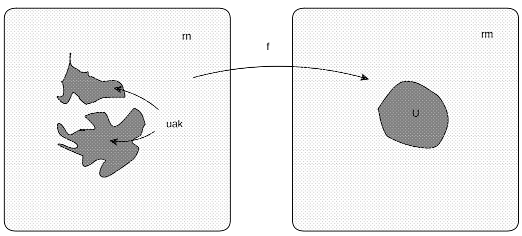
$$\begin{aligned} &\Rightarrow A = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} I(x_j) \quad \text{är en uppräknelig union av mätbara mängder} \\ &\Rightarrow A \quad \text{är mätbar.} \end{aligned}$$

(b) Om A är sluten, så är A^c öppen och därav mätbar $\Rightarrow$ $A = (A^c)^c$ mätbar. □

Exempel 2.43. Låt $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara kontinuerlig. Påstående: $f\mathbb{R}^2$ är mätbar.
Bevis.

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &= \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j, \quad \text{där } A_j = \bar{B}(0, j) \text{ är kompakt} \\ &f \ \text{ kontinuerlig } \ \Rightarrow \ fA_j \ \text{ kompakt} \\ &\Rightarrow fA_j \ \text{ sluten } \ \Rightarrow \ fA_j \ \text{ mätbar} \\ f\mathbb{R}^2 &= \bigcup_{j \in \mathbb{N}} fA_j \ \Rightarrow \ f\mathbb{R}^2 \ \text{ mätbar.} \end{aligned}$$

Påminnelse: Låt $n, m \geq 1$. Avbildningen $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ är kontinuerlig $\iff$ $f^{-1}U \subset \mathbb{R}^n$ är öppen $\forall$ öppna $U \subset \mathbb{R}^m$.



Om $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ är kontinuerlig och $C \subset \mathbb{R}^n$ är kompakt så är $fC \subset \mathbb{R}^m$ kompakt. Argumentering:

$$fC \subset \bigcup_{i\in I} U_i \quad \text{öppen övertäckning}$$

$$\left.\begin{array}{r} \Rightarrow\ C \subset \bigcup_{i\in I} f^{-1}U_i \quad \text{öppen övertäckning} \\[2ex] C \quad \text{kompakt} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \text{ ändlig delövertäckning}$$

$$C \subset \bigcup_{j=1}^{k} f^{-1}U_{i_j} \ \Rightarrow\ fC \subset \bigcup_{j=1}^{k} U_{i_j}.$$

Allmänna mätbara mängder, σ-algebran.

$\mathcal{F}_\sigma$-mängder $\displaystyle\bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i$, $\quad F_i$ slutna $\quad$ (t.ex. $\mathbb{Q}$, $[a,b)$, $(a,b]$)

$\mathcal{G}_\delta$-mängder $\displaystyle\bigcap_{i\in\mathbb{N}} G_i$, $\quad G_i$ öppna $\quad$ (t.ex. $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $[a,b)$, $(a,b]$)

$\mathcal{F}_{\sigma\delta}$-mängder $\displaystyle\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_j,\ A_j \in \mathcal{F}_\sigma$

$\mathcal{G}_{\delta\sigma}$-mängder $\displaystyle\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_j,\ B_j \in \mathcal{G}_\delta$

o.s.v.

Definition 2.44. Låt X vara en godtycklig mängd. Familjen $\Gamma \subset \mathcal{P}(X)$ är en *σ-algebra* över X om

(a) $\emptyset \in \Gamma$;

(b) $A \in \Gamma \ \Rightarrow\ A^c \in \Gamma$;

(c) $A_i \in \Gamma,\ i \in \mathbb{N} \ \Rightarrow\ \bigcup_{i=1}^\infty A_i \in \Gamma$.

Anmärkning 2.45. (1) Av (a) och (b) följer genast att $X \in \Gamma$.

(2) Om Γ är en σ-algebra och $A_i \in \Gamma$, $i \in \mathbb{N}$, så gäller även $\bigcap_i A_i \in \Gamma$, ty

$$\bigcap_i A_i = \bigcap_i \big(A_i^c\big)^c = \big(\bigcup_{i=1} A_i^c\big)^c \in \Gamma.$$

(3) Vi har bevisat: Familjen $\operatorname{Leb}\mathbb{R}^n$ av Lebesgue-mätbara mängder är en σ-algebra över $\mathbb{R}^n$ (Satserna 2.23, 2.24, 2.30).

(4) $\mathcal{P}(X)$ är den största σ-algebran över X; $\{\emptyset, X\}$ är den minsta σ-algebran över X; om $A \subset X$ (fixerad) $\Rightarrow$ $\{\emptyset, X, A, A^c\}$ är en σ-algebra över X.

Definition 2.46. Familjen av *Borel-mängder* $\operatorname{Bor}\mathbb{R}^n$ är den minsta σ-algebran över $\mathbb{R}^n$ som innehåller de slutna mängderna.

Existens: Beteckna

$$\boxed{\mathcal{B} = \bigcap\{\Gamma\colon \Gamma \text{ är en } \sigma\text{-algebra över } \mathbb{R}^n,\ \Gamma \text{ innehåller de slutna mängderna}\}.}$$

(T.ex. $\Gamma = \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ är en σ-algebra över $\mathbb{R}^n$ som innehåller de slutna mängderna.)
$\mathcal{B}$ är en σ-algebra, ty

(a) $\emptyset \in \mathcal{B}$;

(b) $A \in \mathcal{B} \;\Rightarrow\; A^c \in \Gamma \;\forall\Gamma \;\Rightarrow\; A^c \in \mathcal{B}$;

(c) $A_i \in \mathcal{B} \;\Rightarrow\; \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \Gamma \;\forall\Gamma \;\Rightarrow\; \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{B}$.

Konstruktion $\Rightarrow$ $\mathcal{B}$ är den minsta σ-algebran över $\mathbb{R}^n$ som innehåller de slutna mängderna, varav

$$\boxed{\operatorname{Bor}\mathbb{R}^n = \mathcal{B}\,.}$$

Öppna, slutna, $\mathcal{F}_\sigma$, $\mathcal{G}_\delta$, o.s.v. mängder är Borel-mängder.

Sats 2.47. *Varje Borel-mängd är mätbar.*

Bevis. Familjen av mätbara mängder $\operatorname{Leb}\mathbb{R}^n$ är en σ-algebra och innehåller de slutna mängderna, varav

$$\operatorname{Bor}\mathbb{R}^n \subset \operatorname{Leb}\mathbb{R}^n.$$

□

2.48 Allmän måtteori. Hausdorffmått

Definition 2.49. Låt Γ vara en σ-algebra över X. Funktionen $\mu\colon \Gamma \to [0,+\infty]$ är ett *mått* i X, om

(i) $\mu(\emptyset) = 0$;

(ii) $A_i \in \Gamma,\; i \in \mathbb{N},$ disjunkta $\Rightarrow\; \mu\big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\big) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i)$. "$\sigma$-additivitet"

Vi säger att (X, Γ, μ) är ett *måttrum*.

Anmärkning 2.50. 1. Varje mått μ är även *monotont*:

$$A, B \in \Gamma,\; A \subset B \;\Rightarrow\; 0 \le \mu(A) \le \mu(B).$$

<u>Orsak:</u> $A,\; B \setminus A \in \Gamma$ disjunkta, $B = A \cup (B \setminus A)$

$$\Rightarrow\; \mu(B) = \mu(A) + \underbrace{\mu(B \setminus A)}_{\ge 0} \ge \mu(A).$$

2. $A, B \in \Gamma,\; A \subset B,\; \mu(A) < \infty \;\Rightarrow\; \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

3. Måttet μ är ett *sannolikhetsmått*, om $\mu(X) = 1$.

Exempel 2.51. (1) Det n-dimensionella Lebesguemåttet

$$m_n\colon \operatorname{Leb}\mathbb{R}^n \to [0,+\infty]$$

är ett mått (inte ett sannolikhetsmått).
<u>Orsak</u>: $\operatorname{Leb}\mathbb{R}^n$ är en σ-algebra över $\mathbb{R}^n$ och m är σ-additiv.

(2) Låt $X \neq \emptyset$ vara en godtycklig mängd. Fixera $x \in X$ och låt

$$\mu(A) = \begin{cases} 1, & \text{om } x \in A; \\ 0, & \text{om } x \notin A. \end{cases}$$

för alla $A \subset X$. Då är $\mu\colon \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ ett sannolikhetsmått (det s.k. *Diracmåttet* i elementet $x \in X$).
Orsak: (a) $\mathcal{P}(X)$ är en σ-algebra.
(b) Låt $A_j \subset X,\ j \in \mathbb{N}$, vara disjunkta (d.v.s. $A_i \cap A_j = \emptyset,\ \forall i \neq j$). Då är

$$\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j),$$

ty

$$\begin{cases} x \notin \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \ \Rightarrow \ \text{båda sidorna } = 0 \\ x \in \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \overset{\text{sep.}}{\Longrightarrow} \exists \text{ exakt ett } j_0 \in \mathbb{N} \text{ s.a. } x \in A_{j_0} \ \Rightarrow \ \text{båda sidorna } = 1. \end{cases}$$

(3) $\mu\colon \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty],\ \mu(A) = 0\ \forall A \subset X$, är ett mått.

(4) Låt $p_j \geq 0,\ j \in \mathbb{N}$, $\sum_{j=1}^{\infty} p_j = 1$. För alla $A \subset \mathbb{N}$ definierar vi

$$\mu(A) = \sum_{j \in A} p_j.$$

Då är $\mu\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0, 1]$ ett sannolikhetsmått (Övningsuppgift).

Definition 2.52. Låt X vara en godtycklig mängd. Avbildningen $\mu^*\colon \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ är ett *yttre mått* i X, om

(1) $\mu^*(\emptyset) = 0$;

(2) $A \subset B \ \Rightarrow \ \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$;

(3) $A_j \subset X,\ j \in \mathbb{N} \ \Rightarrow \ \mu^*\big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\big) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j)$.

Mängden $E \subset X$ är dessutom (μ^*-)*mätbar*, om (Carathéodorys villkor)

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E) \tag{2.53}$$

gäller $\forall A \subset X$.
Beteckna

$$\mathcal{M}_{\mu^*}(X) = \{E \subset X \colon E \text{ är } \mu^*\text{-mätbar}\}$$

eller kortare $\mathcal{M}(X)$, om μ^* framgår av sammanhanget.

Anmärkning 2.54. $\mathcal{M}(X) \subset \mathcal{P}(X)$ är en σ-algebra över X och restriktionen

$$\mu^*|\mathcal{M}(X)\colon \mathcal{M}(X) \to [0, +\infty]$$

är ett mått. Bevis. Som för Lebesgues yttre mått.

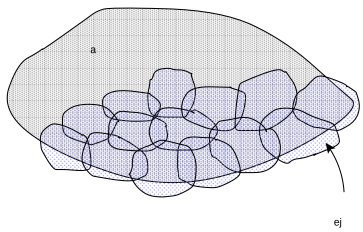
Hausdorffmått och -dimension.
Diametern för mängden $A \subset \mathbb{R}^n$ är

$$d(A) = \sup\{|x-y| : x, y \in A\}, \quad d(\emptyset) = 0.$$

Låt $0 \le s < \infty$ och $\delta > 0$. Om $A \subset \mathbb{R}^n$, definierar vi

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) = \inf\Big\{\sum_{j=1}^{\infty} d(E_j)^s : A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j,\ d(E_j) \le \delta\Big\},$$

med överenskommelserna $d(\{x\})^0 = 1\ \forall x \in \mathbb{R}^n$ och $d(\emptyset)^s = 0\ \forall s \ge 0$. (Ovan är $E_j \subset \mathbb{R}^n$ en godtycklig delmängd.)



Vi inser genast att $0 \le \delta_1 \le \delta_2 \ \Rightarrow\ \mathcal{H}^s_{\delta_1}(A) \ge \mathcal{H}^s_{\delta_2}(A)$ (inf över en mindre mängd).

Definition 2.55. Det s-dimensionella (yttre) Hausdorffmåttet för mängden $A \subset \mathbb{R}^n$ är

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta \to 0+} \mathcal{H}^s_\delta(A) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}^s_\delta(A).$$

(Vi kan ha $\mathcal{H}^s(A) = \infty$.)

Sats 2.56. *Låt $0 \le s < \infty$. Då är $\mathcal{H}^s$ ett yttre mått i $\mathbb{R}^n$.*

Bevis. Övningsuppgift. □

$\mathcal{H}^s$-mätbara mängder, $\mathcal{M}_{\mathcal{H}^s}(\mathbb{R}^n)$, definieras med hjälp av Carathéodorys villkor (2.53).
Tilläggsinformation:

$$\operatorname{Bor}\mathbb{R}^n \subset \mathcal{M}_{\mathcal{H}^s}(\mathbb{R}^n).$$

Sats 2.57. *För varje $A \subset \mathbb{R}^n$ existerar ett entydigt tal $s = s(A) \ge 0$, som uppfyller*

$$\mathcal{H}^{s+\varepsilon}(A) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0, \ \text{och}$$
$$\mathcal{H}^{s-\varepsilon}(A) = +\infty \quad \forall \varepsilon \in (0, s].$$

Det entydight bestämda talet $s = s(A)$ kallas för A:s *Hausdorffdimension.*

Bevis. Påstående 1:

$$s \ge 0 \ \text{ och } \ \mathcal{H}^s(A) < \infty \ \Rightarrow \mathcal{H}^t(A) = 0 \ \forall t > s.$$

Låt $\delta > 0$. $\Rightarrow\ \exists$ övertäckning $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \supset A$ s.a. $d(E_j) \le \delta\ \forall j$ och

$$\sum_{j=1}^{\infty} d(E_j)^s \le \mathcal{H}^s_\delta(A) + 1 \le \mathcal{H}^s(A) + 1 \overset{\text{ant.}}{<} \infty$$

$$\Rightarrow\ \mathcal{H}^t_\delta(A) \overset{\text{inf}}{\le} \sum_{j=1}^{\infty} d(E_j)^t = \sum_{j=1}^{\infty} d(E_j)^s \underbrace{d(E_j)}_{\le \delta}{}^{t-s} \overset{t>s}{\le} \delta^{t-s} \sum_{j=1}^{\infty} d(E_j)^s$$

$$\le \delta^{t-s} \underbrace{\big(\mathcal{H}^s(A) + 1\big)}_{<\infty}$$

Låt $\delta \to 0 \;\Rightarrow\; \delta^{t-s} \to 0 \;\Rightarrow\; \mathcal{H}^t(A) = \lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}^t_\delta(A) = 0$, d.v.s. Påstående 1 är bevisat. Låt

$$s(A) = \inf\{t > 0 \colon \mathcal{H}^t(A) = 0\}.$$

Påstående 1 $\Rightarrow$ $\mathcal{H}^{s(A)+\varepsilon}(A) = 0 \;\forall \varepsilon > 0$. å andra sidan; Påstående 1 $\Rightarrow$ om $0 \le s < t < \infty$ och $\mathcal{H}^t(A) > 0$, så är $\mathcal{H}^s(A) = +\infty$. □

Anmärkning 2.58. (1) Hausdorffmåttet kan definieras på samma sätt i ett godtyckligt metriskt rum (X, d) (diametern till $A \subset X$ är $d(A) = \sup\{d(x, y) \colon x, y \in X\}$).

(2) $\mathcal{H}^0$ är kardinalitetsmåttet, d.v.s. $\mathcal{H}^0(A) = \operatorname{card} A =$ mängden av element i A.

(3) I $\mathbb{R}^n$ gäller: $\mathcal{H}^n = c\, m_n^*$, där $c = c(n)$ är en konstant. Därför normerar man ofta $\mathcal{H}^s$ genom att multiplicera med en konstant som beror på s.

(4) $A \subset \mathbb{R}^n$ given $\Rightarrow$ Hausdorffdimensionen $s(A) \in [0, n]$ (inte nödvändigtvis ett heltal). Det motsvarande värdet för måttet $\mathcal{H}^{s(A)}(A)$ är något tal $\in [0, +\infty]$.

(5) I $\mathbb{R}^n$ anpassar sig $\mathcal{H}^s$, $0 \le s \le n$, bra till att mäta småmängder. T.ex. mängden A med måttet $m_n(A) = 0$, kan ha $\mathcal{H}^s(A) > 0$, $0 \le s < n$. $\mathcal{H}^s(A)$ serfinstrukturen i A p.g.a. villkoren $d(E_j) \le \delta$, $\delta \to 0$.

2.59 Konvergens av mått

Låt $X \neq \emptyset$, $\Gamma \subset \mathcal{P}(X)$ vara en σ-algebra och $\mu \colon \Gamma \to [0, +\infty]$ ett mått.

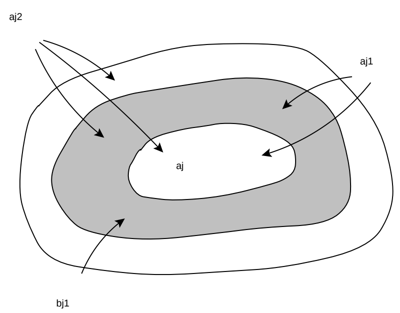
Sats 2.60. *Låt $A_j \in \Gamma$, $j = 1, \ldots,$ vara en växande följd (d.v.s. $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset X$ (μ-)mätbara). Då gäller att*

$$\mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) = \lim_{j\to\infty} \mu(A_j).$$

Obs.: $A_j \in \Gamma \;\forall j \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \Gamma$.

Bevis.

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} \underbrace{(A_j \setminus A_{j-1})}_{\text{sep. mätb.}}, \quad A_0 = \emptyset \;\; \text{(överenskommelse)}$$



Måttets σ-additivitet $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\mu\big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\big) &= \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j \setminus A_{j-1}) \\ &= \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} \mu(A_j \setminus A_{j-1}) \\ &= \lim_{k\to\infty} \mu\underbrace{\big(\bigcup_{j=1}^{k} (A_j \setminus A_{j-1})\big)}_{=A_k} \\ &= \lim_{k\to\infty} \mu(A_k).\end{aligned}$$

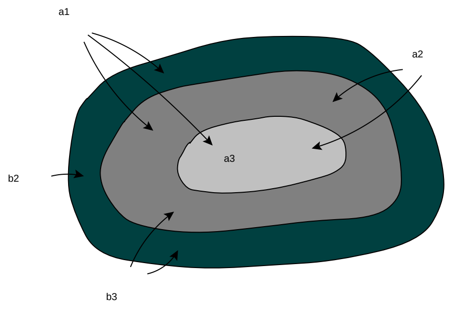
□

Sats 2.61. *Låt $A_j \in \Gamma$, $j = 1, \ldots,$ vara en* <u>*avtagande*</u> *följd (d.v.s. $X \supset A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ (μ-)mätbara). Om dessutom $\mu(A_k) < \infty$ för något $k \in \mathbb{N}$, så är*

$$\mu\big(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\big) = \lim_{j\to\infty} \mu(A_j).$$

<u>Obs.:</u> Γ σ-alg. $\Rightarrow$ $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \Gamma$.

Bevis. Vi kan anta att $\mu(A_1) < \infty$ (vid behov indexerar vi mängderna A_j pånytt). Beteckna $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = A$ och $B_j = A_1 \setminus A_j$. Då är mängderna $B_1 \subset B_2 \subset \cdots$ mätbara.



$$\text{Sats 2.60} \quad \Rightarrow \mu\big(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\big) = \lim_{j\to\infty} \mu(B_j).$$

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} (A_1 \setminus A_j) = A_1 \setminus \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = A_1 \setminus A$$

$$A_1 = A_j \cup \underbrace{(A_1 \setminus A_j)}_{=B_j} \quad \text{disjunkt union} \;\Rightarrow\; \mu(A_1) = \mu(A_j) + \mu(B_j)$$

$$A_1 = A \cup (A_1 \setminus A) \quad \text{disjunkt union} \;\Rightarrow\; \mu(A_1) = \mu(A) + \mu(A_1 \setminus A)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\ \mu(A) &= \mu(A_1) - \mu(A_1 \setminus A) \quad (\text{här måste vi ha } \mu(A_1) < \infty) \\
&= \mu(A_1) - \mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\Big) \\
&= \mu(A_1) - \lim_{j\to\infty} \mu(B_j) \\
&= \mu(A_1) - \lim_{j\to\infty} \big(\mu(A_1) - \mu(A_j)\big) \\
&= \lim_{j\to\infty} \mu(A_j).
\end{aligned}$$

□

Anmärkning 2.62. Villkoret $\mu(A_k) < \infty$ för något $k \in \mathbb{N}$ är nödvändigt. T.ex.

$$\begin{gathered}
A_j = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x > j\} \\
A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots \\
m_2(A_j) = \infty \ \forall j \\
\bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j = \emptyset \ \Rightarrow\ m_2\Big(\bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j\Big) = 0 \neq \lim_{j\to\infty} m_2(A_j).
\end{gathered}$$

Anmärkning 2.63. (Viktig tillämpning inom sannolikhetsteori) Borel-Cantellis lemma: Låt (X, Γ, μ) vara ett måttrum, $A_j \in \Gamma,\ j \in \mathbb{N}$, och

$$A = \{x \in X \colon x \in A_j \text{ för oändligt många index } j \in \mathbb{N}\}.$$

Då gäller att:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) < \infty \ \Rightarrow \mu(A) = 0.$$

(Övningsuppgift)

2.64 Lebesguemåttets samband med Jordanmåttet

Sats 2.65. *$E \subset \mathbb{R}^n$ (Leb.-)mätbar $\iff$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists$ (Leb.-)mätbara A och B s.a. $A \subset E \subset B$ och $m(B \setminus A) < \varepsilon$.*

Bevis. Övningsuppgift □

Definition 2.66. $E \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-mätbar $\iff$ E begränsad och χ_E Riemann-integrerbar. Då är Jordanmåttet för E

$$m_J(E) = \int \chi_E.$$

Sats 2.67. *Om $E \subset \mathbb{R}^n$ är Jordan-mätbar, så är E Lebesgue-mätbar och $m_J(E) = m(E)$.*

Bevis. Antag $n = 2$, allmänna n på liknande sätt. Välj en sluten rektangel $R \supset E$. Låt $D = \{R_j\}$ vara en delning av R i ändligt många slutna rektanglar R_j som saknar gemensamma inre punkter. Den karakteristiska funktionen χ_E har övre summan

$$M_D = \sum_j G_j \ell(R_j), \quad G_j = \begin{cases} 1, & R_j \cap E \neq \emptyset; \\ 0, & R_j \cap E = \emptyset. \end{cases}$$

Beteckna

$$B_D = \bigcup\{R_j \colon R_j \cap E \neq \emptyset\}, \quad \text{varav } B_D \text{ är mätbar och}$$
$$M_D = \sum_{R_j \cap E \neq \emptyset} \ell(R_j) \overset{\text{S. 2.36}}{=} m(B_D).$$

Den motsvarande undre summan är

$$m_D = \sum_j g_j \ell(R_j), \quad g_j = \begin{cases} 1, & R_j \subset E; \\ 0, & R_j \not\subset E. \end{cases}$$

Beteckna

$$A_D = \bigcup\{R_j \colon R_j \subset E\}, \quad \text{varav } A_D \text{ är mätbar och}$$
$$m_D = m(A_D).$$

Låt $\varepsilon > 0$. E Jordan-mätbar $\Rightarrow$ χ_E Riemann-integrerbar $\Rightarrow$

$$\begin{gathered} \exists \text{ delning } D \text{ s.a. } M_D - m_D < \varepsilon \\ B_D = (B_D \setminus A_D) \cup A_D \text{ disjunkt union} \\ \Rightarrow \; m(B_D \setminus A_D) = m(B_D) - m(A_D) = M_D - m_D < \varepsilon \\ A_D \subset E \subset B_D \overset{\text{S. 2.65}}{\Longrightarrow} E \text{ mätbar.} \end{gathered}$$

Dessutom är

$$\begin{gathered} m(A_D) \le m(E) \le m(B_D) \quad \text{och} \\ m(A_D) = m_D \le m_J(E) \le M_D = m(B_D) \\ \Rightarrow \; -\varepsilon < m_D - M_D \le m(E) - m_J(E) \le M_D - m_D < \varepsilon \\ \text{d.v.s.} \quad |m(E) - m_J(E)| < \varepsilon \\ \Rightarrow \; m(E) = m_J(E). \end{gathered}$$

□

Följd. De kända formlerna (som fås genom Riemann-integrering) för yta och volym är i kraft. T.ex. Beteckna $B^n(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n \colon |y - x| < r\} \subset \mathbb{R}^n$ (öppet klot).

$$m_2\big(B^2(x,r)\big) = \pi r^2\,; \quad m_3\big(B^3(x,r)\big) = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Tilläggsinformation: (bevisas inte) $E \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-mätbar $\iff$ E begränsad och $m_n(\partial E) = 0$.

2.68 En icke-(Lebesgue-)mätbar mängd i $\mathbb{R}$

Sats 2.69. *(Vitali, 1905)*

$$\operatorname{Leb}\mathbb{R} \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R})$$

d.v.s. $\exists\, E \subset \mathbb{R}$ *som inte är Lebesgue-mätbar.*

<u>Idèn</u> är att hitta en mängd $B \subset \mathbb{R},\ 0 < m^*(B) < \infty$, och en delning till B

$$B = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

i *disjunkta* mängder A_i s.a.

$$m^*(A_i) = m^*(A_1)\ \forall i.$$

Då måste någon av mängderna A_i vara icke-mätbar. Ett sätt att vara säker på att mängderna A_i har samma yttre mått är att sträva efter att välja

$$A_i = A + x_i$$

för någon (fixerad) mängd $A \subset \mathbb{R}$ och $x_i \in \mathbb{R}$, och använda yttre måttets translationsinvarians.

Bevis. Betrakta kvotgruppen $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$, vars element är ekvivalensklasser $E(x),\ x \in \mathbb{R}$.

$$E(x) = E(y) \iff x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}.$$

Vi kan skriva $E(x) = x + \mathbb{Q}$. Ur varje ekvivalensklass $E(x),\ x \in \mathbb{R}$, väljer vi exakt en representant som ligger i intervallet $[0,1]$. Låt A vara mängden av dessa representanter.

<u>Påstående</u>: $A \notin \operatorname{Leb}\mathbb{R}$.

<u>Motantagande</u>: $A \in \operatorname{Leb}\mathbb{R}$.

(i) Mängderna $A + r,\ r \in \mathbb{Q}$, är disjunkta:

$$\begin{aligned} x \in (A+r)\cap(A+s),\ r,s \in \mathbb{Q} &\Rightarrow x = a_1 + r \text{ och } x = a_2 + s, \quad a_1, a_2 \in A \\ &\Rightarrow a_1 - a_2 = s - r \in \mathbb{Q} \\ &\Rightarrow a_1 \sim a_2 \Rightarrow E(a_1) = E(a_2) \\ &\Rightarrow a_1 = a_2 \quad (\text{ty vi valde } \underline{\text{exakt}} \text{ ett element}) \\ &\Rightarrow s = r. \end{aligned}$$

(ii) $m(A) = 0$ (vi använder translationsinvariansen: $A \in \operatorname{Leb}\mathbb{R} \Rightarrow A + a \in \operatorname{Leb}\mathbb{R}$ och $m(A) = m(A+a)$):

$$\begin{aligned} A \subset [0,1] &\Rightarrow A + \frac{1}{n} \subset [0,2] \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ &\Rightarrow 2 \geq m\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A + \frac{1}{n})\Big) \overset{\text{disj.}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} m(A + \frac{1}{n}) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A) \\ &\Rightarrow m(A) = 0. \end{aligned}$$

(iii) $\mathbb{R} = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}}(A + r)$:

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{R} &\Rightarrow \exists a \in E(x) \cap A \Rightarrow x - a = r \in \mathbb{Q},\ a \in A \\ &\Rightarrow x = a + r, \quad a \in A \\ &\Rightarrow x \in A + r. \end{aligned}$$

(i), (ii) och (iii) $\Rightarrow$

$$+\infty = m(\mathbb{R}) = \sum_{r\in\mathbb{Q}} m(A+r) = \sum_{r\in\mathbb{Q}} \underbrace{m(A)}_{=0} = 0.\ \underline{\text{MS}}$$

$\square$

Anmärkning 2.70. 1. I $\mathbb{R}^n$, $\forall n \geq 1$, $\exists$ liknande exempel, varav

$$\operatorname{Leb}\mathbb{R}^n \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n).$$

2. Om $A \subset \mathbb{R}$ är en godtycklig mängd s.a. $m^*(A) > 0$, så $\exists\ B \subset A$ s.a. $B \notin \operatorname{Leb}\mathbb{R}$. (Övningsuppgift)

Tilläggsinformation: (Banach-Tarskis paradox, 1924): Ett slutet klot $\overline{B}$ i $\mathbb{R}^3$ kan delas upp i ändligt många (disjunkta) bitar A_j,

$$\overline{B} = \bigcup_{j=1}^{m} A_j$$

(med ett lämpligt $m \geq 2$) och sedan kan bitarna ordnas om med avbildningarna

$$g_j \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ g_j(x) = y_j + T_j(x),$$

där $y_j \in \mathbb{R}^3$ och $T_j \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ är en linjär rotation ($j = 1, \ldots, m$), så att det uppstår lika stora (med samma radie) slutna kulor som $\overline{B}$. Lebesguemåttet translations- och rotationsinvariant $\Rightarrow$ mängderna $A_1, \ldots, A_m$ inte mätbara.

3 Mätbara avbildningar

3.1 Mätbar avbildning

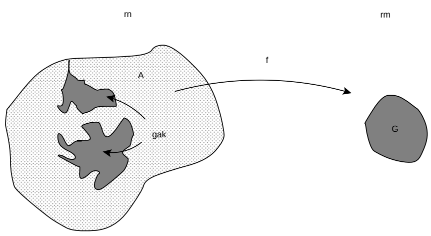
Beteckna $\dot{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$.

Definition 3.2. Låt $A \subset \mathbb{R}^n$. Avbildningen $f \colon A \to \mathbb{R}^m$ är mätbar (i avseende på σ-algebran $\operatorname{Leb}\mathbb{R}^n$) om $f^{-1}G$ är (Lebesgue-)mätbar för alla öppna $G \subset \mathbb{R}^m$. Avbildningen $f \colon A \to \dot{\mathbb{R}}$ är mätbar om

(i) $f^{-1}G$ är mätbar för alla öppna $G \subset \mathbb{R}^m$,

(ii) $f^{-1}(+\infty)$ är mätbar och

(iii) $f^{-1}(-\infty)$ är mätbar.



Anmärkning 3.3. 1. $f \colon A \to \mathbb{R}^m$ är mätbar $\Rightarrow$

$$A = f^{-1}\mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n \quad \text{är en mätbar mängd.}$$

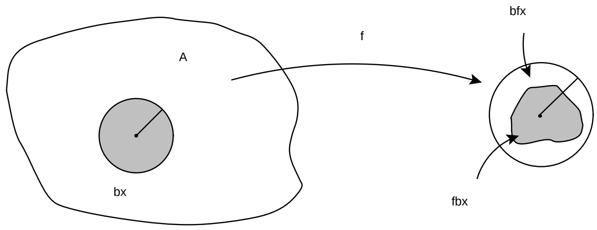
Om $f \colon A \to \dot{\mathbb{R}}$ är mätbar $\Rightarrow$

$$A = f^{-1}(\mathbb{R}) \cup f^{-1}(+\infty) \cup f^{-1}(+\infty) \subset \mathbb{R}^n \quad \text{är en mätbar mängd.}$$

2. $f\colon A \to \mathbb{R}^m$ mätbar, $B \subset A$ mätbar $\Rightarrow$ $f|B\colon B \to \mathbb{R}^m$ mätbar.
Orsak: $G \subset \mathbb{R}^m$ öppen $\Rightarrow$
$$(f|B)^{-1}(G) = \underbrace{B}_{\text{mätbar}} \cap \underbrace{f^{-1}G}_{\text{mätbar}}$$
är mätbar.

3. Låt X vara en godtycklig mängd och $\Gamma \subset \mathcal{P}(X)$ en σ-algebra.
Def. Avbildningen $f\colon X \to \mathbb{R}$ är mätbar (i avseende på σ-algebran Γ) om $f^{-1}G \in \Gamma$ för alla öppna $G \subset \mathbb{R}$.

Påminnelse. (Vektoranalys/Topo I) Avbildningen $f\colon A \to \mathbb{R}^m,\ A \subset \mathbb{R}^n$, är kontinuerlig i $x \in A$ om $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ s.a.
$$f\big(B(x,\delta) \cap A\big) \subset B(f(x),\varepsilon).$$
$f\colon A \to \mathbb{R}^m$ är kontinuerlig om f är kontinuerlig $\forall x \in A$.



Det gäller att: $f\colon A \to \mathbb{R}^m$ är kontinuerlig $\iff$

(3.4) $\qquad f^{-1}G$ är öppen i A $\forall$ öppna $G \subset \mathbb{R}^m$, d.v.s. $f^{-1}G = A \cap V$, där $V \subset \mathbb{R}^n$ är öppen.

Sats 3.5. *A mätbar och $f\colon A \to \mathbb{R}^m$ kontinuerlig $\Rightarrow$ f mätbar.*

Bevis.

$$G \subset \mathbb{R}^m \text{ öppen} \overset{(3.4)}{\Longrightarrow} f^{-1}G \text{ öppen i } A \Rightarrow \exists \text{ öppen mängd } V \subset \mathbb{R}^n \text{ s.a.}$$
$$f^{-1}G = \underbrace{A}_{\text{mätbar}} \cap \underbrace{V}_{\text{mätbar}} \in \operatorname{Leb}\mathbb{R}^n$$
$$\Rightarrow f \text{ mätbar.}$$

□

Sats 3.6. *Om $f\colon A \to \mathbb{R}^m$ är mätbar, så är $f^{-1}B$ mätbar för alla Borel-mängder $B \subset \mathbb{R}^m$.*

Bevis. Beteckna $\Gamma = \{V \subset \mathbb{R}^m\colon f^{-1}V \text{ mätbar}\}$. Då är Γ en σ-algebra, ty

(1) $f^{-1}\emptyset = \emptyset$ mätbar $\Rightarrow$ $\emptyset \in \Gamma$,

(2) $V \in \Gamma \ \Rightarrow\ f^{-1}V^c = \underbrace{A}_{\text{mätbar}} \setminus \underbrace{f^{-1}V}_{\text{mätbar}}$ mätbar $\Rightarrow$ $V^c \in \Gamma$,

(3) $V_i \in \Gamma,\ i \in \mathbb{N} \ \Rightarrow\ f^{-1}\big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} V_i\big) = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \underbrace{f^{-1}V_i}_{\text{mätbar}}$ mätbar $\Rightarrow$ $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} V_i \in \Gamma$.

Dessutom innehåller Γ de slutna mängderna: F sluten $\Rightarrow$ F^c öppen $\Rightarrow$ $f^{-1}F = \big(\underbrace{f^{-1}(F^c)}_{\text{mätbar}}\big)^c$ mätbar $\Rightarrow$ $F \in \Gamma$.

Alltså $\Gamma \supset \operatorname{Bor}\mathbb{R}^m$ (= minsta σ-algebran som innehåller de slutna mängderna). $\square$

Korollarium 3.7. *f mätbar $\Rightarrow$ urbilden av intervall och punkter är mätbara.*

Exempel 3.8. Låt $E \subset \mathbb{R}^n$ och $\chi_E\colon \mathbb{R}^n \to \{0,1\}$ vara karakteristiska funktionen till E

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & \text{om } x \in E, \\ 0, & \text{om } x \notin E. \end{cases}$$

Påstående: χ_E är en mätbar funktion $\iff$ E är en mätbar mängd.
Bevis. $\boxed{\Rightarrow}$ $E = \chi_E^{-1}(1)$ mätbar (K. 3.7).
$\boxed{\Leftarrow}$ Låt E vara mätbar och $G \subset \mathbb{R}$ öppen.

$$\chi_E^{-1}(G) = \begin{cases} \mathbb{R}^n, & \text{om } \{0,1\} \subset G, \\ \emptyset, & \text{om } \{0,1\} \cap G = \emptyset, \\ E, & \text{om } \{0,1\} \cap G = \{1\}, \\ E^c, & \text{om } \{0,1\} \cap G = \{0\}. \end{cases}$$

Dessa mängder är mätbara $\Rightarrow$ χ_E är en mätbar funktion. $\square$

Sats 3.9. *Låt $f\colon A \to \mathbb{R}^m$ vara mätbar, $A \subset \mathbb{R}^n$, och $g\colon B \to \mathbb{R}^k$ kontinuerlig, där $fA \subset B \subset \mathbb{R}^m$. Då är $g \circ f$ mätbar.*

Bevis.

$$\left.\begin{array}{c} G \subset \mathbb{R}^k \text{ öppen} \\ g \text{ kontinuerlig} \end{array}\right\} \overset{(3.4)}{\Longrightarrow} g^{-1}G \text{ öppen i } B$$

$$\Rightarrow \ \exists \ \underline{\text{öppen mängd}}\ V \subset \mathbb{R}^m \text{ s.a. } g^{-1}G = B \cap V$$

$$\Rightarrow \ (g \circ f)^{-1}G = f^{-1}(g^{-1}G) = f^{-1}(B \cap V) \overset{fA \subset B}{=} f^{-1}(V) \quad \text{mätbar.}$$

$\square$

Varning: f och g mätbara $\not\Rightarrow$ $g \circ f$ mätbar.
Om $f\colon A \to \mathbb{R}^m$, så är

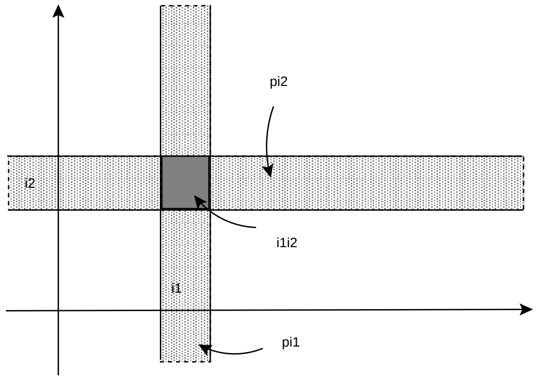
$$f = (f_1, \dots, f_m), \ f(x) = \big(f_1(x), \dots, f_m(x)\big),$$

där

$$f_j\colon A \to \mathbb{R},\ f_j(x) = (P_j \circ f)(x) \text{ och } P_j(y_1, \dots, y_m) = y_j \ (P_j \text{ projektion till } j\text{:nde koord.}).$$

Sats 3.10. $f = (f_1, \dots, f_m)\colon A \to \mathbb{R}^m$ *är mätbar* $\iff$ f_j *är mätbar* $\forall j \in \{1, \dots, m\}$.

Bevis. $\boxed{\Rightarrow}$ Om f är mätbar, så är $f_j = P_j \circ f$ mätbar (S. 3.9), ty P_j är kontinuerlig.
$\boxed{\Leftarrow}$ Antag att f_j är mätbar $\forall j$. Låt $G \subset \mathbb{R}^m$ vara öppen.



$$\text{Lindelöf} \Rightarrow G = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} I^{(i)}, \quad I^{(i)} \text{ öppet } m\text{-intervall (jfr beviset för S. 2.42)}$$

$$I^{(i)} = I_1^{(i)} \times \cdots \times I_m^{(i)} = \bigcap_{j=1}^{m} P_j^{-1} I_j^{(i)}, \quad I_j^{(i)} \subset \mathbb{R} \text{ öppen}$$

$$f^{-1}G = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} f^{-1} I^{(i)} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \bigcap_{j=1}^{m} f^{-1} P_j^{-1} I_j^{(i)} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \bigcap_{j=1}^{m} \underbrace{f_j^{-1} I_j^{(i)}}_{\text{mätbar}} \quad \text{mätbar.}$$

$\square$

Sats 3.11. *Summan och produkten av mätbara funktioner $f, g\colon A \to \dot{\mathbb{R}}$ är mätbara (ifall de är definierade). Även λf, $\lambda \in \mathbb{R}$, och $|f|^a$, $a > 0$, är mätbara.*

Bevis. $\boxed{\text{Summan.}}$ Låt $f, g\colon A \to \mathbb{R}$ vara mätbara. Beteckna $f + g = u \circ v$, där

$$A \xrightarrow{v} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{u} \mathbb{R}, \quad v = (f, g) \quad \text{och} \quad u(x, y) = x + y.$$

$$\left.\begin{array}{c} \text{Sats 3.10} \Rightarrow v \text{ mätbar} \\ u \text{ kontinuerlig} \end{array}\right\} \Rightarrow f + g = u \circ v \text{ mätbar.}$$

Obs. Fallet $f, g\colon A \to \mathbb{R}^m$ mätbara $\Rightarrow$ $f + g$ mätbar följer ur Sats 3.10.

Låt $f, g\colon A \to \dot{\mathbb{R}}$ vara mätbara. [Summan $f + g$ är definierad om det inte finns ett $x \in A$ så att $f(x) = +\infty$, $g(x) = -\infty$, eller tvärtom.] Beteckna $f + g = h$. Vi vet att A är mätbar (Obs. 1.). å andra sidan gäller att

$$\begin{aligned} A &= h^{-1}(+\infty) \cup h^{-1}(-\infty) \cup A_0\,, \quad \text{där } A_0 = h^{-1}\mathbb{R}. \\ h^{-1}(+\infty) &= f^{-1}(+\infty) \cup g^{-1}(+\infty) \ \text{ är mätbar.} \\ h^{-1}(-\infty) &= f^{-1}(-\infty) \cup g^{-1}(-\infty) \ \text{ är mätbar.} \\ &\Rightarrow A_0 \ \text{ är mätbar.} \end{aligned}$$

$$f|A_0 \text{ och } g|A_0 \ \text{ är mätbara (Obs. 2.)} \overset{\text{1. delen}}{\Longrightarrow} h^{-1}G \text{ är mätbar } \forall \text{ öppna } G \subset \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow h \text{ är mätbar.}$$

$\boxed{\text{Produkten.}}$ På liknande sätt.
$\boxed{\lambda f}$ Specialfall av produkten.
$\boxed{|f|^a}$ $|f|^a = u \circ f$, där $u(x) = |x|^a$ är kontinuerlig om $a > 0$. S. 3.9 $\Rightarrow$ $|f|^a$ är mätbar. $\square$

Härefter betraktar vi enbart funktioner $f\colon A \to \dot{\mathbb{R}}$, $A \subset \mathbb{R}^n$.
Viktigt fundamentalkriterium:

Sats 3.12. *Låt $A \subset \mathbb{R}^n$ vara mätbar och $f\colon A \to \dot{\mathbb{R}}$. FVE (= följande villkor är ekvivalenta)*

(1) f *är mätbar;*

(2) $E_a = \{x \in A\colon f(x) < a\}$ *är mätbar* $\forall a \in \mathbb{R}$;

(3) $E'_a = \{x \in A\colon f(x) > a\}$ *är mätbar* $\forall a \in \mathbb{R}$;

(4) $E''_a = \{x \in A\colon f(x) \le a\}$ *är mätbar* $\forall a \in \mathbb{R}$;

(5) $E'''_a = \{x \in A\colon f(x) \ge a\}$ *är mätbar* $\forall a \in \mathbb{R}$.

Bevis.

$$\begin{aligned}
E'''_a &= A \setminus E_a \quad \text{varav (2)} \iff \text{(5)}\\
E''_a &= A \setminus E'_a \quad \text{varav (3)} \iff \text{(4)}\\
E''_a &= \bigcap_{j\in\mathbb{N}} E_{a+1/j} \quad \text{varav (2)} \overset{\text{S. 2.30}}{\Longrightarrow} \text{(4)}\\
E_a &= \bigcup_{j\in\mathbb{N}} E''_{a-1/j} \quad \text{varav (4)} \overset{\text{S. 2.30}}{\Longrightarrow} \text{(2)}\\
E_a &= f^{-1}\big(\underbrace{(-\infty, a)}_{\text{öppen}}\big) \cup f^{-1}(-\infty) \quad \text{varav (1)} \Rightarrow \text{(2)}
\end{aligned}$$

Antag att (2) gäller [och därav även (3),(4),(5)] Påstående: (1) gäller, d.v.s. f är mätbar.
Bevis. Låt $G \subset \mathbb{R}$ vara öppen.

$$\begin{aligned}
G &= \bigcup_{j\in\mathbb{N}} I_j, \quad I_j = (a_j, b_j) \text{ öppet intervall (Lindelöf)}\\
f^{-1}G &= \bigcup_{j\in\mathbb{N}} f^{-1}I_j, \quad f^{-1}I_j = \{x\colon a_j < f(x) < b_j\} = E'_{a_j} \cap E_{b_j} \text{ mätbar}\\
&\Rightarrow f^{-1}G \text{ mätbar}\\
&\quad f^{-1}(+\infty) = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} E'_j \text{ mätbar}\\
&\quad f^{-1}(-\infty) = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} E_{-j} \text{ mätbar}\\
&\quad \Rightarrow f \text{ mätbar.}
\end{aligned}$$

□

Anmärkning 3.13. Antagandet "A mätbar"är nödvändigt i Sats 3.12. T.ex. Låt A vara icke-mätbar (S. 2.69) och $x_0 \in A$. Definiera $f\colon A \to \dot{\mathbb{R}}$,

$$f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{om } x \in A \setminus \{x_0\},\\ -\infty & \text{om } x = x_0. \end{cases}$$

Då är $E_a = \{x \in A\colon f(x) < a\} = \{x_0\}$ mätbar $\forall a \in \mathbb{R}$ d.v.s. (2) gäller, men f kan inte vara mätbar (ty A är icke-mätbar) varav (1) inte gäller.

Exempel 3.14. Påstående: $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mätbar $\iff$

$$\begin{cases} (1) & f^2 \text{ är en mätbar funktion,} \\ (2) & E = \{x\colon f(x) > 0\} \text{ är en mätbar mängd.} \end{cases}$$

Bevis. $\boxed{\Leftarrow}$ Beteckna $E_a = \{x\colon f(x) < a\}$. Sats 3.12: visa att E_a är mätbar $\forall a \in \mathbb{R}$.

(i) Låt $a > 0$.

$$\begin{aligned} f(x) < a \quad &\iff \quad f(x)^2 < a^2 \text{ eller } f(x) \le 0, \text{ varav} \\ E_a = \underbrace{\{x\colon f^2(x) < a^2\}}_{\text{mätbar (1)}} &\cup \underbrace{E^c}_{\text{mätbar (2)}} \quad \text{är mätbar} \end{aligned}$$

(ii) Låt $a \le 0$.

$$\begin{aligned} f(x) < a \quad &\iff \quad f(x)^2 > a^2 \text{ och } f(x) \le 0, \text{ varav} \\ E_a = \underbrace{\{x\colon f^2(x) > a^2\}}_{\text{mätbar (1)}} &\cap \underbrace{E^c}_{\text{mätbar (2)}} \quad \text{är mätbar} \end{aligned}$$

Sats 3.12 $\Rightarrow$ f mätbar.

$\boxed{\Rightarrow}$ f mätbar $\overset{\text{S. 3.11}}{\Rightarrow}$ $f^2 = f \cdot f$ är mätbar. Dessutom: f mätbar $\overset{\text{S. 3.12}}{\Rightarrow}$ E mätbar. $\square$

Anmärkning 3.15. f^2 mätbar $\not\Rightarrow$ f mätbar. Orsak: Låt $E \subset \mathbb{R}$ vara icke-mätbar och $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{om } x \in E, \\ -1, & \text{om } x \in E^c. \end{cases}$$

Då är f^2 mätbar som konstanta funktionen $f^2(x) \equiv 1$, men $\{x\colon f(x) > 0\} = E$ är en icke-mätbar mängd. $\overset{\text{S. 3.12}}{\Longrightarrow}$ f icke-mätbar.

3.16 $\limsup$ och $\liminf$ till en talföljd

Definition 3.17. Låt $a_1, a_2, \ldots$ vara en följd i $\dot{\mathbb{R}}$. Beteckna

$$b_k = \sup_{i \ge k} a_i, \qquad c_k = \inf_{i \ge k} a_i. \quad \text{(vi tillåter } b_k, c_k \in \dot{\mathbb{R}})$$

Då är

$$\begin{aligned} &b_1 \ge b_2 \ge \cdots \ge b_k \ge b_{k+1} \ge \cdots \quad \text{och} \\ &c_1 \le c_2 \le \cdots \le c_k \le c_{k+1} \le \cdots \quad (\sup / \inf \text{ till en mindre mängd}) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $\exists$ gränsvärden

$$\lim_{k\to\infty} b_k = \inf_{k\in\mathbb{N}} b_k = \beta \quad \text{och} \quad \lim_{k\to\infty} c_k = \sup_{k\in\mathbb{N}} c_k = \gamma \quad \text{(vi tillåter } \pm\infty).$$

Beteckna

Alltså,

$$\limsup_{i\to\infty} a_i = \lim_{k\to\infty}\big(\sup_{i\geq k} a_i\big) = \inf_{k\in\mathbb{N}}\big(\sup_{i\geq k} a_i\big)\,,$$
$$\liminf_{i\to\infty} a_i = \lim_{k\to\infty}\big(\inf_{i\geq k} a_i\big) = \sup_{k\in\mathbb{N}}\big(\inf_{i\geq k} a_i\big)\,.$$

Anmärkning 3.18. (a_i) en följd i $\dot{\mathbb{R}}$ $\Rightarrow$ $\limsup_{i\to\infty} a_i$ och $\liminf_{i\to\infty} a_i$ existerar <u>alltid</u> $(\in \dot{\mathbb{R}})$ och är dessutom entydiga.

Exempel 3.19. (1) $\infty, -\infty, \infty, -\infty, \ldots;\quad b_k = \infty\ \forall k,\ c_k = -\infty\ \forall k \ \Rightarrow\ \beta = \infty,\ \gamma = -\infty$

(2) $1, 2, 3, 4, \ldots;\quad b_k = \infty\ \forall k,\ c_k = k\ \forall k \ \Rightarrow\ \beta = \infty = \gamma$

(3) $0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots;\quad b_k = 1\ \forall k,\ c_k = 0\ \forall k \ \Rightarrow\ \beta = 1,\ \gamma = 0$

(4) $0, -1, 0, -2, 0, -3, \ldots;\quad b_k = 0\ \forall k,\ c_k = -\infty\ \forall k \ \Rightarrow\ \beta = 0,\ \gamma = -\infty.$

Sats 3.20. *(i)* $\liminf_{i\to\infty} a_i \leq \limsup_{i\to\infty} a_i$,

(ii) $a_i \leq M\ \forall i \geq i_0 \ \Rightarrow\ \limsup_{i\to\infty} a_i \leq M$,

(iii) $a_i \geq m\ \forall i \geq i_0 \ \Rightarrow\ \liminf_{i\to\infty} a_i \geq m$.

Bevis.

(i) $c_k \leq b_k \ \Rightarrow\ \gamma = \lim_{k\to\infty} c_k \leq \lim_{k\to\infty} b_k = \beta$,

(ii) $b_k \leq M\ \forall k \geq i_0 \ \Rightarrow\ \beta = \lim_{k\to\infty} b_k \leq M$,

(iii) $c_k \geq m\ \forall k \geq i_0 \ \Rightarrow\ \gamma = \lim_{k\to\infty} c_k \geq m$.

□

Sats 3.21. *Låt (a_i) vara en följd i $\dot{\mathbb{R}}$. Då*

$$\exists \lim_{i\to\infty} a_i\ (\in \dot{\mathbb{R}}) \iff \liminf_{i\to\infty} a_i = \limsup_{i\to\infty} a_i \quad (\in \dot{\mathbb{R}}).$$

I detta fall är

$$\lim_{i\to\infty} a_i = \liminf_{i\to\infty} a_i = \limsup_{i\to\infty} a_i \quad (\pm\infty \ \ \textit{tillåts}).$$

Bevis. $\boxed{\Rightarrow}$ Antag att $\exists \alpha = \lim_{i\to\infty} a_i$.
(a1) $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{gathered} \varepsilon > 0 \ \Rightarrow\ \exists i_0 \text{ s.a. } \alpha - \varepsilon < a_i < \alpha + \varepsilon\ \forall i \geq i_0 \\ \Rightarrow\ \alpha - \varepsilon \leq c_{i_0} \leq \gamma \leq \beta \leq b_{i_0} \leq \alpha + \varepsilon \\ \varepsilon \ \text{ godt.} \ \ \Rightarrow\ \gamma = \beta \end{gathered}$$

(a2) $\alpha = \infty$

$$\begin{gathered} M \in \mathbb{R} \ \Rightarrow\ \exists i_0 \text{ s.a. } a_i > M\ \forall i \geq i_0 \\ \Rightarrow\ M \leq c_{i_0} \leq \gamma \leq \beta \\ M \ \text{ godt.} \ \ \Rightarrow\ \gamma = \beta = \infty \end{gathered}$$

(a3) $\alpha = -\infty$ på liknande sätt

$\boxed{\Leftarrow}$ Antag att $\beta = \gamma \overset{\text{bet.}}{=} \alpha$.

(b1) $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \varepsilon > 0 \;\Rightarrow\; &\exists k_1 \text{ s.a. } b_k < \alpha + \varepsilon \;\forall k \geq k_1 \\ &\exists k_2 \text{ s.a. } c_k > \alpha - \varepsilon \;\forall k \geq k_2 \\ k \geq \max\{k_1, k_2\} \Rightarrow\;& \alpha - \varepsilon < c_k \leq a_k \leq b_k < \alpha + \varepsilon \\ \varepsilon \text{ godt. } \;\Rightarrow\;& \alpha = \lim_{k\to\infty} a_k \end{aligned}$$

(b2) $\alpha = \infty$

$$\begin{aligned} M \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; &\exists k_0 \text{ s.a. } c_k > M \;\forall k \geq k_0 \\ \Rightarrow\;& a_k \geq c_k > M \;\forall k \geq k_0 \\ \Rightarrow\;& \lim_{k\to\infty} a_k = \infty \end{aligned}$$

(b3) $\alpha = -\infty$ på liknande sätt □

3.22 Gränsfunktioners mätbarhet

Sats 3.23. *Låt $f_j\colon A \to \dot{\mathbb{R}},\ j \in \mathbb{N}$, vara mätbara. Då är funktionerna*

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} f_j, \quad \inf_{j\in\mathbb{N}} f_j, \quad \limsup_{j\to\infty} f_j, \quad \liminf_{j\to\infty} f_j$$

mätbara. Om $\exists f = \lim_{j\to\infty} f_j$, så är f mätbar.

Anmärkning 3.24. Funktionerna ovan är definierade punktvis $\forall x \in A$. T.ex. funktionens $\sup_{j\in\mathbb{N}} f_j$ värde i punkten $x \in A$ är $\sup_{j\in\mathbb{N}} f_j(x) \in \dot{\mathbb{R}}$.

Bevis. Beteckna $g(x) = \sup_{j\in\mathbb{N}} f_j(x),\ x \in A$. För alla $a \in \mathbb{R}$:

$$\{x \in A\colon g(x) \leq a\} \overset{(*)}{=} \bigcap_{j\in\mathbb{N}} \overbrace{\{x \in A\colon f_j(x) \leq a\}}^{\text{mätbar}} \quad \text{är mätbar} \;\Rightarrow\; g = \sup_{j\in\mathbb{N}} f_j \text{ är mätbar.} \tag{3.25}$$

$\big(\, (*):\ g(x) \leq a \iff f_j(x) \leq a \;\forall j \in \mathbb{N}\big)$

$$\inf_{j\in\mathbb{N}} f_j = -\sup_{j\in\mathbb{N}}(-f_j) \quad \text{är mätbar,} \tag{3.26}$$

$$\limsup_{j\to\infty} f_j = \inf_{k\in\mathbb{N}}\big(\sup_{j\geq k} f_j\big) \quad \text{är mätbar [(3.25), (3.26)],}$$

$$\liminf_{j\to\infty} f_j = \sup_{k\in\mathbb{N}}\big(\inf_{j\geq k} f_j\big) \quad \text{är mätbar [(3.25), (3.26)].}$$

$$\text{Om } \exists f = \lim_{j\to\infty} f_j, \text{ så är } \lim_{j\to\infty} f_j \overset{\text{S. 3.21}}{=} \limsup_{j\to\infty} f_j \quad \text{mätbar.}$$

□

Nästan överallt (kortare n.ö.) = förutom mängder med måttet 0. Även nästan varje"(kortare n.v.).

T.ex.

(a) n.v. reellt tal är irrationellt, ty $m(\mathbb{Q}) = 0$.

(b) $e^{-jx^2} \xrightarrow{j\to\infty} 0$ n.ö. $x \in \mathbb{R}$, ty $m(\{0\}) = 0$.

Sats 3.27. *Låt $f, g\colon A \to \dot{\mathbb{R}}$. Antag att f är mätbar och $g = f$ n.ö. Då är g mätbar.*

Bevis. Låt $A_0 \subset A$ vara sådan att $m(A_0) = 0$ och $f(x) = g(x)\ \forall x \in A \setminus A_0$. Låt $a \in \mathbb{R}$. Vi betecknar

$$E_a = \underbrace{\{x \in A\colon f(x) < a\}}_{\text{mätbar}} \quad \text{och} \quad F_a = \{x \in A\colon g(x) < a\},$$

och visar att F_a är mätbar. Nu är

$$\begin{aligned} &F_a = \big(F_a \cap A_0\big) \cup \big(F_a \setminus A_0\big), \\ &m^*\big(F_a \cap A_0\big) \le m^*(A_0) = 0 \ \Rightarrow\ F_a \cap A_0 \quad \text{är mätbar.} \end{aligned}$$

å andra sidan är

$$F_a \setminus A_0 = E_a \setminus A_0,$$

som är mätbar. F_a är alltså en union av två mätbara mängder och därav mätbar. □

Anmärkning 3.28. Nollmängder (måttet 0) inverkar inte på mätbarheten $\Rightarrow$ man kan tala om mätbarheten av funktioner som bara är definierade n.ö.

Sats 3.29. *Låt $f_j\colon A \to \dot{\mathbb{R}}$, $j \in \mathbb{N}$, vara mätbara och $f_j \to f$ n.ö. $\Rightarrow$ f mätbar.*

Bevis. $f = \limsup_{j\to\infty} f_j$ n.ö. och $\limsup_{j\to\infty} f_j$ är mätbar. □

Exempel 3.30. <u>Antag.</u> $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ och $\exists f'(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$.
<u>Påstående:</u> Derivatan f' är mätbar.
<u>Bevis.</u> Beteckna

$$g_n(x) = \frac{f(x + 1/n) - f(x)}{1/n}, \quad \text{varav} \quad f'(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x).$$

$\exists\ f'(x)\ \forall x \in \mathbb{R} \ \Rightarrow\ f$ kontinuerlig och därav mätbar $\Rightarrow\ g_n$ mätbar (S. 3.11) $\overset{\text{S. 3.23}}{\Longrightarrow}$ f' mätbar.

□

Tilläggsinformation I *Littlewoods tre principer* (Se t.ex. Royden):

(I) Varje mätbar mängd $A \subset \mathbb{R}^n$, med $m(A) < \infty$, är en nästan"ändlig union $F = \bigcup_{j=1}^m I_j$, där $I_1, \ldots, I_m$ är n-intervall: $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ F = \bigcup_{j=1}^m I_j \subset A$ s.a. $m(A \triangle F) < \varepsilon$, där $A \triangle F = (A \setminus F) \cup (F \setminus A)$ (symmetrisk differens").

(II) Varje mätbar avbildning är nästan kontinuerlig": <u>Lusins sats</u> (Realanalys I): Om $A \subset \mathbb{R}^n$ är begränsad, $f\colon A \to \mathbb{R}$ är mätbar och $\varepsilon > 0$, så $\exists$ kompakt $C \subset A$ s.a. $m(A \setminus C) < \varepsilon$ och $f|C$ är <u>kontinuerlig</u>.

(III) Varje konvergerande följd av mätbara funktioner $f_j\colon A \to \mathbb{R}$ är nästan likformigt konvergerande": <u>Egorovs sats</u> (Realanalys I): Låt $A \subset \mathbb{R}^n$, $m(A) < \infty$, $f_j\colon A \to \mathbb{R}$ är mätbara och $f_j \to f\colon A \to \mathbb{R}$ n.ö. Då $\exists\ \forall \varepsilon > 0$ en kompakt $C \subset A$ s.a. $m(A \setminus C) < \varepsilon$ och $f_j|C \to f|C$ <u>likformigt</u> (d.v.s. $\sup_{x\in C}|f_j(x) - f(x)| \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0$).

Tilläggsinformation II Låt (Ω, Γ, μ) vara ett sannolikhetsrum. Funktionen $X: \Omega \to \mathbb{R}$ är en *slumpvariabel* om

$$\{\omega \in \Omega \colon X(\omega) \leq x\} = X^{-1}(-\infty, x] \in \Gamma \quad \text{för alla } x \in \mathbb{R}.$$

Kan bevisas: Sats 3.12 gäller även för dessa, och

$$X: \Omega \to \mathbb{R} \quad \text{slumpvariabel} \quad \Longleftrightarrow \quad X \text{ är en } \Gamma\text{-mätbar funktion } \Omega \to \mathbb{R}.$$

4 Lebesgueintegralen

4.1 Enkla funktioner

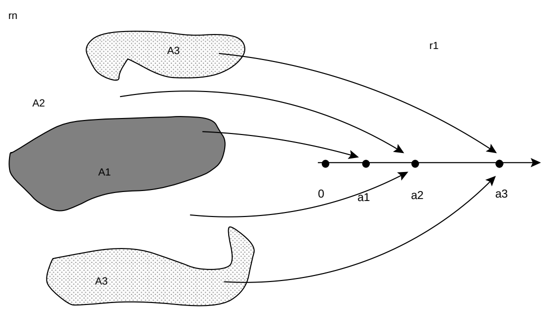
Definition 4.2. Funktionen $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ är *enkel*, om

(1) f är mätbar,

(2) $f \geq 0 \quad (f(x) \geq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}^n)$,

(3) f antar ändligt många värden.

Beteckna $Y = \{f \mid \; f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ enkel}\}$ (eller Y_n).



Anmärkning 4.3. 1. $f \in Y \;\Rightarrow\; f(x) \neq \infty \; \forall x$.

2. $f \in Y,\; E \in \operatorname{Leb} \mathbb{R}^n \;\Rightarrow\; f\chi_E \in Y$.

Låt $f \in Y$ och f anta värden $a_1, \dots, a_k \in [0, +\infty)$. Då är

$$A_i = f^{-1}(a_i) \quad \text{mätbara och disjunkta,} \;\; \mathbb{R}^n = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$$

och

$$\boxed{f = \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot \chi_{A_i}} \quad \text{är } \textit{normalframställningen} \text{ till } f.$$

Definition 4.4. Låt $f \in Y$ och $f = \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot \chi_{A_i}$ vara dess normalframställning. Då är f:s *integral* (över $\mathbb{R}^n$)

$$I(f) = \sum_{i=1}^{k} a_i m(A_i). \qquad \text{(kom ihåg konventionen } 0 \cdot \infty = 0\text{)}$$

Om $E \subset \mathbb{R}^n$ är mätbar, så är f:s integral över E

$$I(f, E) = I(f\chi_E).$$

Speciellt är:

$I(f) = I(f, \mathbb{R}^n)$,

$0 \leq I(f, E) \leq \infty$,

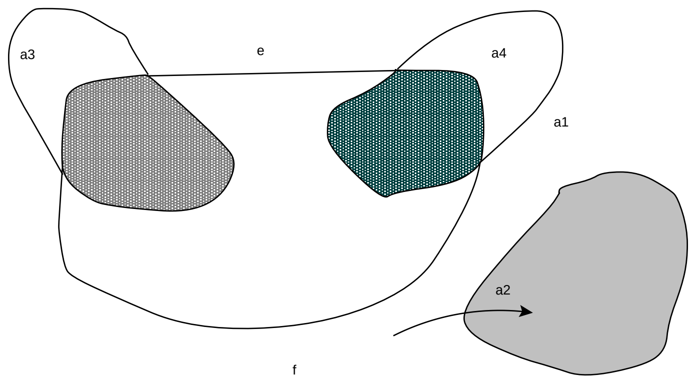
$E \in \operatorname{Leb} \mathbb{R}^n \;\Rightarrow\; I(\chi_E) = m(E)$.

Sats 4.5. *Om $f \in Y$ och normalframställningen till f är $\sum_{i=1}^{k} a_i \cdot \chi_{A_i}$, så är*

$$I(f, E) = \sum_{i=1}^{k} a_i m(A_i \cap E).$$

Bevis.

(4.6) $$f\chi_E = \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot \chi_{A_i}\chi_E = \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot \chi_{A_i \cap E} \quad \text{(inte nödvändigtvis normalframställning).}$$



Normalframställningen till $f\chi_E$ fås ur (4.6)

(1) genom att ta bort termerna för vilka $A_j \cap E = \emptyset$

(2) om $a_j = 0$ för något $j \in \{1, \ldots, k\}$, tillsätter vi $\mathbb{R}^n \setminus E$ i mängden A_j och betecknar den nya mängden med A_j

$\Big\}$ $a_j m(A_j \cap E) = 0$ för dessa

(3) om $a_i \neq 0 \; \forall i \in \{1, \ldots, k\}$, tillsätter vi $a_{k+1}\chi_{A_{k+1}}$ i summan med $a_{k+1} = 0$ och $A_{k+1} = \mathbb{R}^n \setminus E$ $\Big\}$ då är $a_{k+1} m(A_{k+1}) = 0$

$$\Rightarrow \; I(f, E) = I(f\chi_E) = \sum_{i=1}^{k} a_i m(A_i \cap E) + a_{k+1} m(A_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k} a_i m(A_i \cap E).$$

$\square$

Sats 4.7. *Låt E_j, $j \in \mathbb{N}$, vara mätbara och disjunkta, och $E = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} E_j$. Om $f \in Y$, så är*

$$I(f, E) = \sum_{j\in\mathbb{N}} I(f, E_j).$$

Bevis. Låt $f = \sum_{i=1}^k a_i \chi_{A_i}$ vara normalframställningen.

$$\text{S. 4.5} \;\Rightarrow\; I(f, E) = \sum_{i=1}^k a_i m(A_i \cap E).$$

I och med att $A_i \cap E = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} (A_i \cap E_j)$, så är (S. 2.30)

$$\begin{aligned} m(A_i \cap E) &= \sum_{j\in\mathbb{N}} m(A_i \cap E_j) \quad \forall i = 1, \dots, k \\ \Rightarrow I(f; E) &= \sum_{i=1}^k a_i \sum_{j\in\mathbb{N}} m(A_i \cap E_j) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{i=1}^k a_i m(A_i \cap E_j) \\ &\overset{4.5}{=} \sum_{j\in\mathbb{N}} I(f, E_j). \end{aligned}$$

□

Anmärkning 4.8. Det är klart att $I(f, \emptyset) = I(f\chi_\emptyset) = I(0) = 0$, varav avbildningen

$$\operatorname{Leb} \mathbb{R}^n \to [0, +\infty], \quad E \mapsto I(f, E)$$

är ett mått för varje (fixerad) $f \in Y$ enligt Sats 4.7.

Konvergenssatsen 2.60 implicerar:

Korollarium 4.9. *Om $f \in Y$ och $E_1 \subset E_2 \subset \cdots$ är mätbara, så är*

$$I\big(f, \cup_{j=1}^\infty E_j\big) = \lim_{j\to\infty} I(f, E_j).$$

Sats 4.10. *Låt $f, g \in Y$, E vara mätbar och $a \geq 0$ vara en konstant. Då är*

(i) $f + g \in Y$ *och* $I(f + g, E) = I(f, E) + I(g, E)$;

(ii) $af \in Y$ *och* $I(af, E) = aI(f, E)$.

Bevis. (i): $f + g \in Y$ klart.
(a) Låt $E = \mathbb{R}^n$ och

$$f = \sum_{j=1}^k a_j \chi_{A_j}, \quad g = \sum_{i=1}^\ell b_i \chi_{B_i}$$

vara normalframställningar. Då är

$$(f + g)\chi_{A_i \cap B_j} = (a_i + b_j)\chi_{A_i \cap B_j} \quad \forall i, j \quad \overset{4.5}{\Longrightarrow}$$

$$\text{(4.11)} \qquad \left\{ \begin{aligned} I(f + g, A_i \cap B_j) &= (a_i + bj)m(A_i \cap B_j) = a_i m(A_i \cap B_j) + b_j m(A_i \cap B_j) \\ &= I(f, A_i \cap B_j) + I(g, A_i \cap B_j) \end{aligned} \right.$$

$\mathbb{R}^n$ = union av disjunkta mängder $A_i \cap B_j$. Sats 4.7 $\Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
I(f+g) &\overset{4.7}{=} \sum_{i,j} I(f+g, A_i \cap B_j) \overset{(4.11)}{=} \sum_{i,j} I(f, A_i \cap B_j) + \sum_{i,j} I(g, A_i \cap B_j) \\
&\overset{4.7}{=} I(f) + I(g)
\end{aligned}
$$

(b) E godtycklig.

$$
\begin{aligned}
I(f+g, E) &= I\big((f+g)\chi_E\big) = I(f\chi_E + g\chi_E) = I(f\chi_E) + I(g\chi_E) \\
&= I(f, E) + I(g, E).
\end{aligned}
$$

(ii): $af \in Y$ klart.

$$a = 0 \ \Rightarrow \ I(af, E) = 0 = aI(f, E).$$

Låt $a > 0$ och $f = \sum_{i=1}^k a_i \chi_{A_i}$ vara normalframställningen.

$$
\begin{aligned}
af &= \sum_{i=1}^k a a_i \chi_{A_i} \quad \text{normalframställning.} \\
I(af, E) &= \sum_{i=1}^k a a_i m(A_i \cap E) = a \sum_{i=1}^k a_i m(A_i \cap E) = aI(f, E).
\end{aligned}
$$

$\square$

Monotonicitetsegenskaper.

Sats 4.12. *(1) E mätbar och $f, g \in Y$, $f \le g$ (d.v.s. $f(x) \le g(x)\ \forall x$) $\Rightarrow$ $I(f, E) \le I(g, E)$;*

(2) $E \subset F$ mätbara, $f \in Y$ $\Rightarrow$ $I(f, E) \le I(f, F)$;

(3) $f \in Y$, $m(E) = 0$ $\Rightarrow$ $I(f, E) = 0$.

Bevis. (1): $g = f + (g - f)$, där $g - f \ge 0$ och $g - f \in Y$. Sats 4.10 $\Rightarrow$

$$I(g, E) \overset{4.10}{=} I(f, E) + \underbrace{I(g - f, E)}_{\ge 0} \ge I(f, E).$$

(2):

$$
\left.\begin{aligned}
E \subset F \ \Rightarrow \ 0 \le \chi_E \le \chi_F \\
f \in Y
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \ f\chi_E \le f\chi_F \quad (\in Y)
$$

$$\Rightarrow \ I(f, E) = I(f\chi_E) \overset{(1)}{\le} I(f\chi_F) = I(f, F).$$

(3): Om $f = \sum_{i=1}^k a_i \chi_{A_i}$ är normalframställningen, så är

$$I(f, E) = \sum_{i=1}^k a_i \underbrace{m(A_i \cap E)}_{=0} = 0, \quad \text{ty } A_i \cap E \subset E \text{ och } m(E) = 0. \quad \square$$

Tilläggsinformation. Låt (X, Γ, μ) vara ett måttrum. Funktionen $f\colon X \to \mathbb{R}$ är <u>enkel</u> om

$$f = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{A_i},$$

där $a_1, \ldots, a_k \geq 0$, mängderna $A_i \in \Gamma, i = 1, \ldots, k$, är disjunkta och $X = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$. Då är f:s <u>integral</u>

$$I(f) = \sum_{i=1}^{k} a_i \mu(A_i).$$

Egenskaperna i kapitel 4.1 gäller!

4.13 Lebesgueintegralen, $f \geq 0$

Sats 4.14. *Låt $f\colon \mathbb{R}^n \to \dot{\mathbb{R}}$ vara mätbar och $f \geq 0$. Då $\exists$ växande följd av enkla funktioner $f_j \in Y$, $f_1 \leq f_2 \leq \cdots$, s.a. $f(x) = \lim_{j\to\infty} f_j(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$.*

Bevis. Definiera $f_j\colon \mathbb{R}^n \to \dot{\mathbb{R}}$ enligt följande: Dela $[0, j)$ i disjunkta, halvöppna intervall $I_1, \ldots, I_k$, vars längder är $1/2^j$, d.v.s.

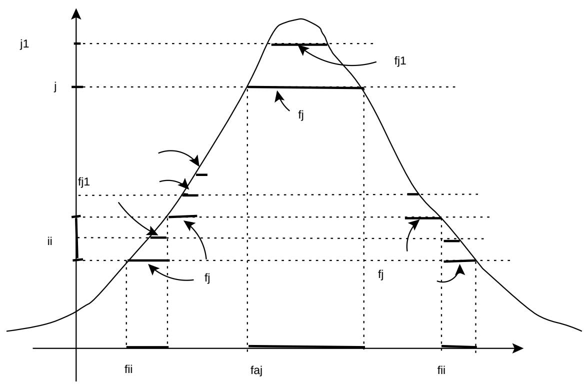
$$I_i = [(i-1)2^{-j}, i2^{-j}), \quad i = 1, \ldots, k = j2^j.$$

Definiera

$$f_j(x) = \begin{cases} (i-1)2^{-j}, & \text{när } x \in f^{-1}I_i, \quad ((i-1)2^{-j} \leq f(x) < i2^{-j}) \\ j, & \text{när } x \in f^{-1}[j, +\infty] \quad (f(x) \geq j). \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{r} f \text{ mätbar } \Rightarrow \ f^{-1}(I_i) \text{ mätbar och} \\ f^{-1}[j, +\infty] \text{ mätbar.} \\ \\ f_j \geq 0, \text{ antar ändligt många värden} \end{array}\right\} \Rightarrow f_j \in Y, \ j = 1, 2, \ldots$$

Konstruktion $\Rightarrow$ $f_j \leq f_{j+1}$ (se bild).



<u>Påstående</u>: $f_j(x) \to f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

(a): $f(x) < +\infty \ \Rightarrow \ \exists j_0 > f(x)$. När $j \geq j_0$, är

$$(i-1)2^{-j} \leq f(x) < i2^{-j} \text{ för något } i \in \{1, \ldots, j2^j\}$$

$$\Rightarrow \ f_j(x) = (i-1)2^{-j} \leq f(x) < i2^{-j} = f_j(x) + 2^{-j} \ \Rightarrow \ f(x) - 2^{-j} < f_j(x) \leq f(x)$$

$$\Rightarrow \ \lim_{j\to\infty} f_j(x) = f(x).$$

(b): $f(x) = +\infty \ \Rightarrow \ f_j(x) = j \ \forall j \ \Rightarrow \ f_j(x) \to +\infty = f(x).$ $\square$

Definition 4.15. Låt $f\colon \mathbb{R}^n \to \dot{\mathbb{R}}$ vara mätbar och $f \geq 0$. Då är f:s *(Lebesgue)integral* över $\mathbb{R}^n$

$$\int f = \sup\{I(\varphi)\colon \varphi \in Y,\ \varphi \leq f\}.$$

Om $E \subset \mathbb{R}^n$ är mätbar, så är f:s integral över E

$$\int_E f = \int f\chi_E. \tag{4.16}$$

Vi betecknar även

$$\int_E f = \int_E f\,dm = \int_E f(x)\,dm(x), \qquad m = n\text{-dimensionella Lebesguemåttet.}$$

Om $n = 1$ och $E = [a, b]$, så betecknar vi $\int_E f = \int_a^b f = \int_a^b f(x)\,dx$.

Beteckningsöverenskommelse. Om $f\colon A \to \dot{\mathbb{R}}$ och $E \subset A$, så definierar vi $f\chi_E\colon \mathbb{R}^n \to \dot{\mathbb{R}}$,

$$f\chi_E(x) = \begin{cases} f(x), & \text{om } x \in E,\\ 0, & \text{om } x \notin E.\end{cases}$$

Då definierar (4.16) $\int_E f$ för alla mätbara $f\colon A \to \dot{\mathbb{R}}$ och mätbara $E \subset A$.

Sats 4.17. *$f \in Y$ och E mätbar $\Rightarrow$ $I(f, E) = \int_E f$.*

Bevis. Vi kan anta $E = \mathbb{R}^n$ (annars ersätter vi f med funktionen $f\chi_E \in Y$).

(a) $f \leq f \ \Rightarrow\ I(f) \leq \int f$.

(b) $\varphi \in Y,\ \varphi \leq f \ \overset{\text{S. 4.12 (1)}}{\Longrightarrow}\ I(\varphi) \leq I(f) \ \Rightarrow\ \int f \leq I(f)$.

□

Integralens grundegenskaper.

Sats 4.18. *Antag att funktionerna i fråga är både icke-negativa och mätbara, och att mängderna i fråga är mätbara delmängder i $\mathbb{R}^n$.*

(1) $f \leq g \ \Rightarrow\ \int_E f \leq \int_E g$

(2) $A \subset B \ \Rightarrow\ \int_A f \leq \int_B f$

(3) $f(x) = 0\ \forall x \in E \ \Rightarrow\ \int_E f = 0$

(4) $m(E) = 0 \ \Rightarrow\ \int_E f = 0$

(5) $0 \leq a < \infty \ \Rightarrow\ \int_E af = a\int_E f$.

Bevis. (1): Låt $E = \mathbb{R}^n$, $\varphi \in Y,\ \varphi \leq f \ \Rightarrow\ \varphi \leq g \ \Rightarrow$

$$I(\varphi) \leq \int g \ \overset{\text{sup}}{\Longrightarrow}\ \int f \leq \int g.$$

$E \in \mathrm{Leb}\,\mathbb{R}^n \;\Rightarrow\; f\chi_E \le g\chi_E \; i \; \mathbb{R}^n \;\overset{(1)}{\Longrightarrow}$

$$\int_E f = \int f\chi_E \le \int g\chi_E = \int_E g.$$

(2): $f\chi_A \le f\chi_B$ och (1) $\Rightarrow$ påst.
(3): $f\chi_E = 0 \;\Rightarrow\; \int_E f = I(0) = 0$.
(4): Låt $\varphi \in Y,\; \varphi \le f\chi_E$. Eftersom $\varphi|\mathbb{R}^n \setminus E = 0$, så är $\varphi = \varphi\chi_E$, varav

$$I(\varphi) = I(\varphi, E) \overset{4.12\,(3)}{=} 0 \overset{\sup}{\Longrightarrow} \int_E f = 0.$$

(5): Om $a = 0$, så är båda sidorna noll. Låt $a > 0,\; \varphi \in Y,\; \varphi \le f\chi_E \;\Rightarrow\; a\varphi \le af\chi_E \;\Rightarrow$

$$\int_E af \ge I(a\varphi) \overset{4.10\,(\mathrm{ii})}{=} aI(\varphi) \;\Rightarrow\; \int_E af \ge a\int_E f.$$

$$f = \frac{1}{a}(af) \;\Rightarrow\; \int_E f = \int_E \frac{1}{a}(af) \overset{\text{ovan}}{\ge} \frac{1}{a}\int_E af \;\Rightarrow\; a\int_E f \ge \int_E af.$$

$\square$

Samband med Riemann-integralen.

Sats 4.19. *Låt $E \subset \mathbb{R}^n$ vara begränsad och $f\colon E \to \mathbb{R}$ mätbar, $f \ge 0$. Om f är Riemann-integrerbar över E, så är*

$$\textit{(Riemann-integralen)} \quad (\mathrm{R})\int_E f = \int_E f \quad \textit{(Lebesgue-integralen)}$$

Detta gäller t.ex. då E är ett slutet n-intervall och f är kontinuerlig.

Bevis. Välj ett slutet n-intervall $I \supset E$. Eftersom

$$(\mathrm{R})\int_E f = (\mathrm{R})\int_I f\chi_E \quad \text{och} \quad \int_E f = \int f\chi_E = \int_I f\chi_E,$$

enligt definitionen, kan vi anta (genom att ersätta f med funktionen $f\chi_E$) att $E = I$. Låt $D = \{I_1, \ldots, I_k\}$ vara en delning till I i ("halvöppna") disjunkta delintervall. Beteckna

$$g_i = \inf_{x \in I_i} f(x),\; \bar{g}_i = \inf_{x \in \bar{I}_i} f(x) \quad \Rightarrow \bar{g}_i \le g_i \quad \text{och}$$
$$G_i = \sup_{x \in I_i} f(x),\; \bar{G}_i = \sup_{x \in \bar{I}_i} f(x) \quad \Rightarrow \bar{G}_i \ge G_i.$$

Riemanns undersumma

$$m_D = \sum_{i=1}^{k} \bar{g}_i \ell(I_i) \le \sum_{i=1}^{k} g_i m(I_i) = I(\varphi),$$

där $\varphi = \sum_{i=1}^{k} g_i \chi_{I_i} \in Y$. Likväl är översumman

$$M_D = \sum_{i=1}^{k} \bar{G}_i \ell(I_i) \ge \sum_{i=1}^{k} G_i m(I_i) = I(\psi),$$

där $\psi = \sum_{i=1}^{k} G_i \chi_{I_i} \in Y$. Det är klart att $\varphi \le f \le \psi$, varav

$$m_D \le I(\varphi) \overset{\sup}{\le} \int_E f \overset{f \le \psi}{\le} \int_E \psi = I(\psi) \le M_D. \tag{4.20}$$

Antagande: f Riemann-integrerbar över $E \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists$ delning D som ovan s.a.

$$m_D \le (\mathrm{R}) \int_E f \le M_D \text{ (gäller alltid)} \quad \text{och} \quad 0 \le M_D - m_D < \varepsilon. \tag{4.21}$$

Låt $\varepsilon \to 0$, varav (4.20) och (4.21) $\Rightarrow$

$$(\mathrm{R}) \int_E f = \int_E f.$$

$\square$

Anmärkning 4.22. Fallet då E är obegränsad (en oegentlig Riemann-integral) är mer komplicerat. Motsvarigheten till Sats 4.19 gäller om $f \ge 0$, men inte i det allmänna fallet.

Lebesgueintegralen är mer allmän än Riemann-integralen:

Exempel 4.23. Låt $f = \chi_{\mathbb{Q}}$, $\mathbb{Q} =$ de rationella talen. f är enkel, ty $f^{-1}(1) = \mathbb{Q}$ och $f^{-1}(0) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mätbara.

$$\int_E f = m(E \cap \mathbb{Q}) = 0 \quad \forall \text{ mätbara } E \subset \mathbb{R}.$$

å andra sidan är f inte Riemann-integrerbar över något intervall $[a, b]$, $a < b$: Låt $D = \{I_1, \ldots, I_k\}$ vara en delning till intervallet $[a, b]$. Varje I_i innehåller både rationella och irrationella tal

$$\Rightarrow \; m_D = \sum_i 0 \cdot \ell(I_i) = 0 \text{ och } M_D = \sum_i 1 \cdot \ell(I_i) = b - a.$$

Sats 4.24. *Låt $f \colon E \to \dot{\mathbb{R}}$ vara mätbar, $f \ge 0$ och $\int_E f < \infty$. Då är $f(x) < \infty$ för n.v. $x \in E$.*

Bevis. Beteckna $A = \{x \in E \colon f(x) = \infty\}$ (mätbar mängd, ty f är mätbar).

$$\begin{aligned} f(x) \ge j \quad \forall x \in A,\; j = 1, 2, \ldots \; &\Rightarrow \; j\chi_A \le f\chi_E \quad \forall j \\ \Rightarrow \int_E f &\ge I(j\chi_A) = jm(A) \quad \forall j \\ 0 \le m(A) \le \frac{1}{j} \underbrace{\int_E f}_{<\infty} &\xrightarrow{j \to \infty} 0 \; \Rightarrow \; m(A) = 0. \end{aligned}$$

$\square$

Monotona konvergenssatsen.

Sats 4.25. (MKS) *Låt $f_j \colon E \to \dot{\mathbb{R}}$ vara mätbara,*

$$0 \le f_1 \le f_2 \le \cdots \le f_j \le f_{j+1} \le \cdots.$$

Då är

$$\lim_{j \to \infty} \int_E f_j = \int_E \lim_{j \to \infty} f_j \quad \text{(vi kan ha } +\infty\text{)}.$$

Bevis. $f_j \leq f_{j+1} \;\Rightarrow\; \int_E f_j \leq \int_E f_{j+1} \;\Rightarrow\; \exists$ gränsvärde $\lim_{j\to\infty} \int_E f_j = a$ $(\in [0,\infty])$. Likaså $\exists\ f = \lim_{j\to\infty} f_j$, som är mätbar (S. 3.23).

$$f_j \leq f \;\Rightarrow\; \int_E f_j \leq \int_E f \;\Rightarrow\; a \leq \int_E f.$$

Vi bör visa: $\int_E f \leq a$.

Vi kan anta: $E = \mathbb{R}^n$ (annars ersätter vi $f_j,\ f$ med funktionerna $f_j\chi_E,\ f\chi_E$ (notera att $f_j\chi_E \nearrow f\chi_E$)).

Låt $0 < b < 1,\ \varphi \in Y,\ \varphi \leq f$. Beteckna

$$E_j = \{x \in \mathbb{R}^n \colon f_j(x) \geq b\varphi(x)\} = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \big(f - b\varphi\big)(x) \geq 0\} \quad \text{(mätbar mängd).}$$

$$f_j(x) \leq f_{j+1}(x)\ \forall x,\ \forall j \;\Rightarrow\; E_j \subset E_{j+1}\ \forall j.$$

Påstående: $\mathbb{R}^n = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$.

Låt $x \in \mathbb{R}^n$ vara godtycklig.

$$\text{Om } \varphi(x) = 0, \text{ så } x \in E_1.$$

$$\text{Om } \varphi(x) > 0 \text{ så är } b\varphi(x) < \varphi(x) \leq f(x) \quad (\text{ty } 0 < b < 1 \text{ och } \varphi(x) < \infty).$$
$$\Rightarrow\ \exists j \text{ s.a. } b\varphi(x) \leq f_j(x) \;\Rightarrow\; x \in E_j.$$
$$\text{Alltså är } \mathbb{R}^n = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j.$$

$$f_j \geq f_j\chi_{E_j} \geq b\varphi\chi_{E_j}$$
$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f_j \geq \int_{\mathbb{R}^n} b\varphi\chi_{E_j} = bI(\varphi, E_j) \xrightarrow{4.9} bI\big(\varphi, \underbrace{\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j}_{=\mathbb{R}^n}\big) = bI(\varphi), \text{ då } j \to \infty$$
$$\Rightarrow\ a = \lim_{j\to\infty} \int_E f_j \geq bI(\varphi) \quad \forall \varphi \in Y,\ \varphi \leq f$$
$$\overset{\text{sup}}{\Longrightarrow}\ a \geq b \int_{\mathbb{R}^n} f \quad \forall\ 0 < b < 1$$
$$\overset{b\to 1-}{\Longrightarrow}\ a \geq \int_{\mathbb{R}^n} f.$$

□

Anmärkning 4.26. Man får inte alltid byta ordningen på operationerna $\int$ och lim: t.ex.

$$f_j = j\chi_{(0,1/j]}, \quad f_j \in Y, \quad I(f_j) = j\frac{1}{j} = 1 \quad \forall\ j$$
$$f_j(x) \xrightarrow{j\to\infty} 0 \quad \forall\ x \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} \lim_{j\to\infty} f_j = 0 \neq 1 = \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_j \quad \text{(följden } (f_j) \text{ är inte växande).}$$

Exempel 4.27. (Gammal provuppgift) Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0+}\int_0^\infty \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt.$$

Lösning. Analys I $\Rightarrow$ räcker att betrakta gränsvärdet

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{e^{-x_n t}}{1+t^2}\,dt$$

för alla följder (x_n), s.a. $x_n \geq x_{n+1} > 0$ och $x_n \searrow 0$. Beteckna

$$f_n(t) = \frac{e^{-x_n t}}{1+t^2}, \quad t \in [0,\infty) \text{ och } n = 1,2,\ldots$$

$$x_n \geq x_{n+1} > 0 \text{ och } t \in [0,\infty) \;\Rightarrow\; e^{-x_n t} \leq e^{-x_{n+1}t}$$
$$\Rightarrow\; 0 \leq f_n(t) = \frac{e^{-x_n t}}{1+t^2} \leq \frac{e^{-x_{n+1}t}}{1+t^2} = f_{n+1}(t)$$

d.v.s. (f_n) är en växande följd. Dessutom gäller att

$$f_n(t) = \frac{e^{-x_n t}}{1+t^2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{e^{0\cdot t}}{1+t^2} = \frac{1}{1+t^2} \quad \forall\, t \in [0,\infty).$$

MKS $\Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n(t)\,dt = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(t)\,dt = \int_0^\infty \frac{1}{1+t^2}\,dt \overset{(*)}{=} \lim_{j\to\infty}\int_0^j \frac{1}{1+t^2}\,dt$$
$$\overset{4.19}{=} \lim_{j\to\infty} \Big/_0^j \arctan t = \lim_{j\to\infty}\big(\arctan j - \arctan 0\big) = \pi/2.$$

$(*)$: MKS tillämpad på den växande följden (g_j),

$$g_j(t) = \frac{\chi_{[0,j]}(t)}{1+t^2}.$$

(Obs. I Sats 4.19 antog vi att E är begränsad.)

Sats 4.28. *Låt $E \subset \mathbb{R}^n$ vara mätbar och $f_1,\ldots,f_k\colon E \to \dot{\mathbb{R}}$ mätbara s.a. $f_j \geq 0$. Då är*

$$\int_E \sum_{j=1}^k f_k = \sum_{j=1}^k \int_E f_k.$$

Bevis. Vi kan anta: $E = \mathbb{R}^n$ och $k = 2$ (yallmänna k med induktion). Approximeringssatsen 4.14 $\Rightarrow$ $\exists$ växande följder (φ_j), (ψ_j) enkla funktioner s.a.

$$\varphi_j \nearrow f_1 \quad \text{och} \quad \psi_j \nearrow f_2\,, \quad \text{då } j\to\infty.$$

$$\left.\begin{array}{r} 4.10 \;\Rightarrow\; I(\varphi_j+\psi_j) = I(\varphi_j) + I(\psi_j) \\[2ex] \text{MKS} \;\Rightarrow\; I(\varphi_j) = \int \varphi_j \to \int f_1 \;\text{ och }\; I(\psi_j) \to \int f_2 \\[2ex] \text{likaså } \varphi_j+\psi_j \nearrow f_1+f_2 \text{ och MKS} \;\Rightarrow \\[2ex] I(\varphi_j+\psi_j) \to \int (f_1+f_2) \end{array}\right\} \Rightarrow \int (f_1+f_2) = \int f_1 + \int f_2\,.$$

$\square$

Beppo Levis sats.

Sats 4.29. *Låt $E \subset \mathbb{R}^n$ vara mätbar och $f_j \colon E \to \dot{\mathbb{R}}$ mätbara s.a. $f_j \geq 0$. Då är*

$$\int_E \Big(\sum_{j\in\mathbb{N}} f_j\Big) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_E f_j.$$

D.v.s. en serie med positiva termer får integreras termvis.

Bevis. Beteckna $u_k = \sum_{j=1}^k f_j$. Då är

$$0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \cdots \quad \text{och} \quad u_k \to \sum_{j=1}^{\infty} f_j \overset{\text{bet.}}{=} u.$$

MKS och S. 4.28 $\Rightarrow$

$$\int_E u = \int_E \lim_{k\to\infty} u_k \overset{\text{MKS}}{=} \lim_{k\to\infty} \int_E u_k \overset{4.28}{=} \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} \int_E f_j = \sum_{j=1}^{\infty} \int_E f_j.$$

□

Följande konvergenssats är också väldigt viktig!

Sats 4.30. (**Fatous lemma**). *Låt $E \subset \mathbb{R}^n$ vara mätbar och $f_j \colon E \to \dot{\mathbb{R}}$ mätbara s.a. $f_j \geq 0 \ \forall\ j \in \mathbb{N}$. Då är*

$$\int_E \liminf_{j\to\infty} f_j \leq \liminf_{j\to\infty} \int_E f_j \qquad (\textit{vi kan ha } +\infty).$$

Bevis. Beteckna

$$g_k(x) = \inf_{j\geq k} f_j(x), \quad x \in E.$$

Då är

$$0 \leq g_k \leq g_{k+1} \quad \forall\ k \in \mathbb{N}$$
$$g_k \ \text{ mätbar (S. 3.23)}$$
$$g_k \leq f_k \ \text{ och } \ \lim_{k\to\infty} g_k = \liminf_{j\to\infty} f_j$$
$$\text{MKS } \Rightarrow \int_E \liminf_{j\to\infty} f_j = \int_E \lim_{k\to\infty} g_k \overset{\text{MKS}}{=} \lim_{k\to\infty} \int_E g_k = \liminf_{k\to\infty} \int_E g_k \underset{g_k \leq f_k}{\leq} \liminf_{k\to\infty} \int_E f_k\,.$$

□

Exempel 4.31. (1)

$$f_j = j\chi_{(0,1/j]}$$
$$\lim_{j\to\infty} f_j(x) = 0 \ \forall\ x \in \mathbb{R} \ \Rightarrow\ \liminf_{j\to\infty} f_j = 0$$
$$\int_{\mathbb{R}} f_j = 1 \ \forall\ j$$

Fatou gäller i formen $0 \leq 1$.

(2)

$$f_j = \chi_{[j,2j]}$$
$$\lim_{j\to\infty} f_j(x) = 0 \ \forall\ x \in \mathbb{R} \ \Rightarrow \ \liminf_{j\to\infty} f_j = 0$$
$$\int_{\mathbb{R}} f_j = m([j,2j]) = j \to \infty \ \text{ kun } j \to \infty$$

Fatou gäller i formen $0 \le \infty$.

Integralen som mängdfunktion är ett mått:

Sats 4.32. *Låt $f\colon \mathbb{R}^n \to \dot{\mathbb{R}}$ vara mätbar, $f \geq 0$. Då är avbildningen*

$$\operatorname{Leb}\mathbb{R}^n \to [0,+\infty], \quad E \mapsto \int_E f$$

ett <u>mått</u>, d.v.s.

(i)

$$\int_\emptyset f = 0\,,$$

(ii) om $E_j \subset \mathbb{R}^n$ är mätbara och disjunkta, så är

$$\int_{\bigcup_{j=1}^\infty E_j} f = \sum_{j=1}^\infty \int_{E_j} f\,.$$

Speciellt:

(iii) $E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset \mathbb{R}^n$ mätbara $\Rightarrow$

$$\int_{\bigcup_{j=1}^\infty E_j} f = \lim_{j\to\infty} \int_{E_j} f\,,$$

(iv) $\mathbb{R}^n \supset E_1 \supset E_2 \supset \cdots$ mätbara och $\int_{E_1} f < \infty \ \Rightarrow$

$$\int_{\bigcap_{j=1}^\infty E_j} f = \lim_{j\to\infty} \int_{E_j} f\,,$$

Bevis. (i): S. 4.18 (4); (ii): Övningsuppgift; (iii) och (iv): Måttets konvergenssatser 2.60 och 2.61. □

Sats 4.33. *(i) Låt $f,g\colon E \to \dot{\mathbb{R}}$ vara mätbara och $f \geq 0,\ g \geq 0$. Om $f = g$ n.ö. i E, så är*

$$\int_E f = \int_E g\,.$$

Speciellt: $f \geq 0$ mätbar och definierad n.ö. i $E \Rightarrow \int_E f$ väl definierad.

(ii) Låt $f\colon E \to \dot{\mathbb{R}}$ vara mätbar, $f \geq 0$. Om $\int_E f = 0$, så är $f = 0$ n.ö. i E.

Bevis. (i): Beteckna $A = \{x \in E\colon f(x) \neq g(x)\}$. Antagande $\Rightarrow$ $m(A) = 0$.

$$\int_E f \overset{4.32}{=} \underbrace{\int_{E \setminus A} f}_{f=g} + \underbrace{\int_A f}_{=0} = \int_{E\setminus A} g + \int_A g = \int_E g.$$

(ii): Motantagande: $m\big(\{x \in E\colon f(x) > 0\}\big) > 0$. Övningsuppgift $\Rightarrow$ $\exists\, r > 0$ s.a.

$$m\big(\underbrace{\{x \in E\colon f(x) > r\}}_{\text{bet. } = A}\big) > 0$$

$$\Rightarrow \int_E f \overset{(*)}{\geq} \int_A f \overset{(**)}{\geq} r \int_A \chi_A = rm(A) > 0. \quad \underline{\text{MS}} \quad \square$$

$$[(*):\ A \subset E, \qquad (**):\ f\chi_A \geq r\chi_A]$$

Tilläggsinformation: Låt (X, Γ, μ) vara ett måttrum, f en Γ-mätbar funktion $X \to [0, \infty]$. Definiera integralen till f

$$\int_X f = \sup\{I(\varphi)\colon \varphi\colon X \to \mathbb{R} \text{ enkel},\ \varphi \leq f\},$$

$$\int_E f = \int_X f\chi_E, \quad \text{då } E \in \Gamma.$$

Resultaten i kapitel 4.13 är i kraft (förutom Sats 4.19 (Riemann-int.)). I bevisen ersätter vi $\mathbb{R}^n$ med X och Leb $\mathbb{R}^n$ med σ-algebran $\Gamma \subset \mathcal{P}(X)$. Ofta antar man att X har har ett s.k. σ-ändligt mått, d.v.s.

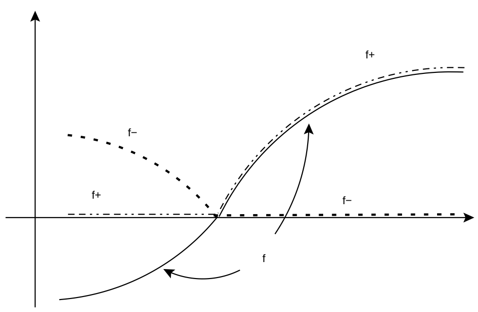
$$X = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_j, \quad \text{där } \Omega_j \in \Gamma,\ \mu(\Omega_j) < \infty \quad \text{för alla } j.$$

4.34 Lebesgueintegralen: funktioner som byter tecken

Låt $f\colon E \to \dot{\mathbb{R}}$ vara mätbar, $E \subset \mathbb{R}^n$. Beteckna

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} \qquad \left(= \tfrac{1}{2}\big(|f| + f\big) \text{ mätbar}\right)$$

$$f^-(x) = -\min\{f(x), 0\} \qquad \left(= \tfrac{1}{2}\big(|f| - f\big) \text{ mätbar}\right).$$



Då är

$$f^+(x) \geq 0, \qquad f^-(x) \geq 0$$

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x), \qquad |f(x)| = f^+(x) + f^-(x).$$

(Obs. ovan uppstår inte fallet $\infty - \infty$, för vi har alltid $f^+(x) = 0$ eller $f^-(x) = 0$.)
Kapitel 4.13 $\Rightarrow$

$$\int_E f^+ \quad \text{och} \quad \int_E f^- \quad \text{definierade} \quad (\in [0, +\infty]).$$

Kan vi <ins>alltid</ins> definiera

$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^- \quad (\text{jfr. } f = f^+ - f^-)?$$

Nej, ty vi kan få $\infty - \infty$, som inte är definierat!

Definition 4.35. Funktionen $f\colon E \to \dot{\mathbb{R}}$ är <ins>integrerbar</ins> i E (el. kortare integrerbar), om f är mätbar och om $\int_E f^+ < \infty$ och $\int_E f^- < \infty$. Då är $\overline{f\text{:s integral}}$ över E

$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^- \quad (\in \mathbb{R}).$$

Sats 4.36. *Funktionen $f\colon E \to \dot{\mathbb{R}}$ är integrerbar i $E \iff f$ är mätbar och*

$$\int_E |f| < \infty.$$

Då gäller att

$$\left|\int_E f\right| \leq \int_E |f|.$$

Bevis. $\boxed{\Rightarrow}$ Mätbarheten innehålls i definitionen. Dessutom är

$$|f| = \underbrace{f^+}_{\geq 0} + \underbrace{f^-}_{\geq 0} \overset{4.28}{\Longrightarrow} \int_E |f| = \underbrace{\int_E f^+}_{<\infty} + \underbrace{\int_E f^-}_{<\infty} < \infty.$$

$\boxed{\Leftarrow}$

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq f^+ \leq |f| \;\Rightarrow\; \int_E f^+ \leq \int_E |f| < \infty \\ 0 \leq f^- \leq |f| \;\Rightarrow\; \int_E f^- \leq \int_E |f| < \infty \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f \text{ integrerbar i } E.$$

Dessutom:

$$\left|\int_E f\right| = \left|\int_E f^+ - \int_E f^-\right| \leq \underbrace{\left|\int_E f^+\right|}_{\geq 0} + \underbrace{\left|\int_E f^-\right|}_{\geq 0} = \int_E f^+ + \int_E f^-$$

$$\overset{4.28}{=} \int_E (f^+ + f^-) = \int_E |f|. \quad \square$$

Anmärkning 4.37. f integrerbar i $E \overset{4.24,\ 4.36}{\Longrightarrow} |f(x)| < \infty$ för n.v. $x \in E$.

Sats 4.38. (**Majorantprincipen**) *Om $f\colon E \to \dot{\mathbb{R}}$ är mätbar, $|f| \leq g$ och g integrerbar i E, så är f integrerbar i E.*

Bevis.

$$\int_E |f| \leq \int_E g < \infty \quad \square$$

Anmärkning 4.39. Det räcker att $|f| \le g$ n.ö. i E, d.v.s.

$$m\big(\underbrace{\{x\in E\colon |f(x)|>g(x)\}}_{=A}\big)=0, \quad \text{varav} \quad \int_E |f| = \underbrace{\int_{E\setminus A}|f|}_{<\infty} + \underbrace{\int_A |f|}_{=0} < \infty.$$

Sats 4.40. *Om $f\colon E\to\mathbb{R}$ är mätbar och Riemann-integrerbar, så är f Lebesgue-integrerbar i E och*

$$\int_E f = (\mathrm{R})\int_E f\,.$$

Bevis.

$$f^+ = \frac{1}{2}\big(|f|+f\big), \quad f^- = \frac{1}{2}\big(|f|-f\big) \quad \text{Riem.-integrerbara}$$

$$\overset{4.19}{\Longrightarrow} f^+ \text{ och } f^+ \text{ Leb.-integrerbara och Riem./Leb.-integralerna lika}$$

$$\Rightarrow \int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^- = (\mathrm{R})\int_E f^+ - (\mathrm{R})\int_E f^- = (\mathrm{R})\int_E f\,. \quad \square$$

Exempel 4.41. Låt $E=[1,\infty)$, $f\colon E\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^{-2}\sin x$. f kontinuerlig $\Rightarrow$ f mätbar.

$$|f(x)| \le x^{-2} \underset{\text{bet.}}{=} g(x),$$

$$g \text{ integrerbar i } E \overset{4.38}{\Longrightarrow} f \text{ integrerbar i } E.$$

<u>Obs.</u> g integrerbar p.g.a. MKS tillämpad på en växande följd (g_j), $g_j(x)=\begin{cases} g(x), & \text{då } 1\le x\le j \\ 0, & \text{då } x>j, \end{cases}$

$$\Rightarrow \int_E g \overset{\text{MKS}}{=} \lim_{j\to\infty}\int_E g_j \overset{4.19}{=} \lim_{j\to\infty}\int_1^j x^{-2}\,dx = -\lim_{j\to\infty} \Big/_1^j x^{-1} = \lim_{j\to\infty}(1-1/j)=1.$$

Exempel 4.42. Låt $E=[1,\infty)$, $f\colon E\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^{-1}\sin x$. f kontinuerlig $\Rightarrow$ f mätbar.
<u>Påstående:</u> f är inte Leb.-integrerbar i E.

$$\int_E |f| = \int_1^\pi |f| + \sum_{k=1}^\infty \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{|x|}\,dx \ge \int_1^\pi |f| + \frac{2}{\pi}\underbrace{\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k+1}}_{\text{harm. serie}} = \infty,$$

ty

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{|x|}\,dx \ge \frac{1}{(k+1)\pi}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin x|\,dx \overset{\text{period.}}{=} \frac{1}{(k+1)\pi}\underbrace{\int_0^\pi |\sin x|\,dx}_{=2}.$$

f är alltså inte integrerbar i E.
<u>Ändå</u> $\exists$ oegentlig (Riemann-)integral

$$\lim_{c\to\infty}\underbrace{\int_1^c \frac{\sin x}{x}\,dx}_{=I(c)}.$$

Bevis.

$$I(n\pi) = \int_1^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx}_{\text{alternerande serie}},$$

där

$$\Big|\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx\Big| \searrow 0\,,\ \text{kun } k \to \infty\,.$$

Leibnitz sats $\Rightarrow$ serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

konvergerar, d.v.s.

$$\exists \lim_{n\to\infty} I(n\pi) \overset{\text{bet.}}{=} a.$$

Om $c \geq \pi$, så $c \in [n\pi, (n+1)\pi)$ för något $n \in \mathbb{N}$, varav

$$|I(c) - I(n\pi)| = \Big|\int_{n\pi}^{c} \frac{\sin x}{x}\,dx\Big| \leq \int_{n\pi}^{c} \frac{1}{n\pi}\,dx \leq \frac{1}{n}$$
$$\Rightarrow\ I(c) \to a, \quad \text{då } c \to \infty\,.$$

Alltså: Oegentliga (Riemann)-integralen till en funktion kan existera (d.v.s. konvergera), fastän funktionen inte är Lebesgue-integrerbar. Lebesgue-integrerbarheten kräver absolut konvergens.

Sats 4.43. *Låt $E \subset \mathbb{R}^n$ vara mätbar, $f, g\colon E \to \dot{\mathbb{R}}$ integrerbara i E och $\lambda \in \mathbb{R}$. Då är*

(i) $f + g$ *integrerbar i E och* $\int_E (f+g) = \int_E f + \int_E g$;

(ii) λf *integrerbar i E och* $\int_E \lambda f = \lambda \int_E f$;

(iii) $f \leq g \ \Rightarrow\ \int_E f \leq \int_E g$;

(iv) $m(E) = 0 \ \Rightarrow\ \int_E f = 0$;

(v) $f = g$ *n.ö. i E* $\ \Rightarrow\ \int_E f = \int_E g$.

Anmärkning 4.44. f, g integrerbara i $E \Rightarrow\ f(x), g(x) \in \mathbb{R}$ för n.v. $x \in E\ \Rightarrow\ f+g$ definierat n.ö. i E.

Bevis. (i): Beteckna $h = f + g$. Då är h mätbar och definierad n.ö.

$$|h| \leq |f| + |h| \ \Rightarrow\ \int_E |h| \leq \int_E |f| + \int_E |g| < \infty \ \Rightarrow\ h \text{ integrerbar}$$

Oftast är $h^+ \neq f^+ + g^+$, men n.ö. i E gäller:

$$h^+ - h^- = h = f + g = f^+ - f^- + g^+ - g^-$$

$$\Rightarrow\ h^+ + f^- + g^- = h^- + f^+ + g^+ \qquad \text{(funktionerna} \geq 0\text{, integr. bägge sidorna (S. 4.28))}$$

$$\Rightarrow\ \int_E h^+ + \int_E f^- + \int_E g^- = \int_E h^- + \int_E f^+ + \int_E g^+ \qquad \text{(integralerna} < \infty)$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\ \int_E h = \int_E h^+ - \int_E h^- &= \int_E f^+ - \int_E f^- + \int_E g^+ - \int_E g^- \\ &= \int_E f + \int_E g.\end{aligned}$$

(ii): (a) $\lambda \geq 0$

$$\begin{aligned}&(\lambda f)^+ = \lambda f^+ \quad \text{ja} \quad (\lambda f)^- = \lambda f^- \\ \Rightarrow\ &\int_E (\lambda f)^+ = \lambda \int_E f^+ \quad \text{ja} \quad \int_E (\lambda f)^- = \lambda \int_E f^- \\ \Rightarrow\ &\text{påståendet}\end{aligned}$$

(b) $\lambda < 0$

$$(\lambda f)^+ = (-\lambda) f^- \quad \text{ja} \quad (\lambda f)^- = (-\lambda) f^+, \quad \text{varav påst. följer som tidigare}$$

(iii): (i) och (ii) $\Rightarrow$ $g - f$ integrerbar och

$$\int_E g = \int_E f + \int_E \underbrace{(g-f)}_{\geq 0} \geq \int_E f$$

(iv): $m(E) = 0 \ \Rightarrow\ \int_E f^+ = 0$ och $\int_E f^- = 0 \quad \Rightarrow\ \int_E f = 0$
(v): $f = g$ n.ö. i E $\Rightarrow$ $f^+ = g^+,\ f^- = g^-$ n.ö. i E

$$\Rightarrow\ \int_E f^+ = \int_E g^+ \ \text{ ja } \ \int_E f^- = \int_E g^- \ \Rightarrow\ \text{påståendet} \quad \square$$

Konvergenssatserna

Sats 4.45. (**Dominerande konvergenssatsen, DKS**) *Låt $E \subset \mathbb{R}^n$ vara mätbar och $f_j \colon E \to \dot{\mathbb{R}}$, $j \in \mathbb{N}$, vara mätbara funktioner s.a.*

$$f(x) = \lim_{j\to\infty} f_j(x) \quad \textit{för n.v. } x \in E\,.$$

Om $\exists\ g \colon E \to \dot{\mathbb{R}}$ s.a. g är integrerbar i E och

$$|f_j(x)| \leq g(x),\ \forall\ j \in \mathbb{N},\ \textit{och för n.v. } x \in E\,,$$

så är f integrerbar i E och

$$\int_E f = \lim_{j\to\infty} \int_E f_j\,. \qquad (\textit{Obs. } \int_E f \in \mathbb{R})$$

Bevis. Genom att definiera f_j, f och g pånytt i en mängd med måttet 0, kan vi anta att

$$\begin{aligned} &f_j(x) \xrightarrow{j\to\infty} f(x) \quad \forall\, x \in E \ \text{ och} \\ &|f_j(x)| \le g(x) \quad \forall\, x \in E \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |f(x)| \le |g(x)| \quad \forall\, x \in E\,.$$

g integrerbar i E, Majorantprincipen (S. 4.38) $\Rightarrow$ f integrerbar i E.

$$g + f_j \ge 0 \quad \text{och} \quad g + f_j \to g + f \overset{\text{Fatou}}{\Longrightarrow}$$

$$\begin{aligned} \int_E g + \int_E f = \int_E (g+f) &\overset{\text{Fatou}}{\le} \liminf_{j\to\infty} \int_E (g+f_j) = \liminf_{j\to\infty} \Big(\int_E g + \int_E f_j\Big) \\ &= \int_E g + \liminf_{j\to\infty} \int_E f_j \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_E f \le \liminf_{j\to\infty} \int_E f_j \quad (\text{obs. } \int_E g < \infty)$$

$$g - f_j \ge 0\,, \quad \text{varav}$$

$$\begin{aligned} \int_E g - \int_E f = \int_E (g-f) &\overset{\text{Fatou}}{\le} \liminf_{j\to\infty} \int_E (g-f_j) = \liminf_{j\to\infty} \Big(\int_E g - \int_E f_j\Big) \\ &= \int_E g - \limsup_{j\to\infty} \int_E f_j \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_E f \ge \limsup_{j\to\infty} \int_E f_j\,.$$

Alltså är

$$\int_E f \le \liminf_{j\to\infty} \int_E f_j \le \limsup_{j\to\infty} \int_E f_j \le \int_E f \quad \Rightarrow \quad \text{påståendet} \quad \square$$

Exempel 4.46. (Gammal provuppgift) Beräkna

$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^1 x^{-3/2} \sin\frac{x}{n}\, dx\,.$$

Låt $f_n(x) = nx^{-3/2} \sin\frac{x}{n} = \underbrace{\big((n/x)\sin(x/n)\big)}_{\to 1,\text{ då } n\to\infty} x^{-1/2} \xrightarrow{n\to\infty} x^{-1/2} \overset{\text{bet.}}{=} f(x)$, varav

$$\int_0^1 f \overset{(*)}{=} \Big/_0^1 2\sqrt{x} = 2.$$

$$\begin{aligned} &|\sin t| \le t \ \forall\, t \ge 0 \ \Rightarrow \ |(n/x)\sin(x/n)| \le 1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in (0,1] \\ &\Rightarrow \ |f_n(x)| \le x^{-1/2} = g(x) \ \big(= f(x)\big),\ g \text{ integrerbar över intervallet } [0,1] \\ &\text{DKS} \ \Rightarrow \ \int_0^1 f_n \to \int_0^1 f = 2. \end{aligned}$$

[(∗): Egentligen fås detta inte direkt som en Riemann-integral, ty f är obegränsad i intervallet $[0,1]$. Vi kan använda MKS som i Ex. på s.57]

Specialfall av DKS:

Sats 4.47. (**Begränsade konvergenssatsen, BKS**) *Låt $m(E) < \infty$, $f_j\colon E \to \mathbb{R}$ en följd integrerbara funktioner, $f_j \to f$ n.ö. Om $\exists\ M < \infty$ s.s. $|f_j(x)| \le M\ \forall\ x \in E,\ j \in \mathbb{N}$, så är*

$$\int_E f = \lim_{j\to\infty} \int_E f_j\,.$$

Bevis. Välj $g(x) = M$.

$$m(E) < \infty \;\Rightarrow\; \int_E g = Mm(E) < \infty \;\Rightarrow\; g \text{ integrerbar}$$
$$\overset{\text{DKL}}{\Longrightarrow} \;\text{påstående} \quad \square$$

Tilläggsinformation: För kontinuerliga och likformigt begränsade funktioner får vi följande tilläggsinformation för Riemann-integralen:

Korollarium 4.48. *Låt $f_j\colon [a,b] \to \mathbb{R},\ j \in \mathbb{N}$, vara en följd kontinuerliga funktioner s.a.*

- $|f_j(x)| \le M \quad \forall\ x \in [a,b],\ j \in \mathbb{N}$,
- $\exists$ *gränsvärde* $f(x) = \lim_{j\to\infty} f_j(x) \quad \forall\ x \in [a,b]$,
- *gränsfunktionen f är kontinuerlig i $[a,b]$.*

Då är (Riemann-integralen)

$$(\mathrm{R})\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{j\to\infty} (\mathrm{R})\int_a^b f_j(x)\,dx\,.$$

Bevis. f, f_j kontinuerliga i $[a,b]$

$$\overset{\text{S. 4.40}}{\Longrightarrow} (\mathrm{R})\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f \quad \text{ja} \quad (\mathrm{R})\int_a^b f_j(x)\,dx = \int_a^b f_j$$
$$\overset{\text{BKS}}{\Longrightarrow} \int_a^b f = \lim_{j\to\infty}\int_a^b f_j. \quad \square$$

Obs. I Diff I har vi bevisat 4.48 med tilläggsantagandet $f_j \xrightarrow{j\to\infty} f$ likformigt i $[a,b]$, d.v.s.

$$\sup_{a\le x\le b} |f_j(x) - f(x)| \xrightarrow{j\to\infty} 0\,.$$

I beviset ovan används måtteori (Lebesguemått, MKS, Fatou, DKS, ...). Att bevisa 4.48 utan måtteori är svårt: se S. Simons: An eigenvector proof of Fatou's lemma for continuous functions. Mathematical Intelligencer 17 (1995), 67–70.

Sammandrag av konvergenssatserna:

$$\lim_{j\to\infty}\int_E f_j = \int_E \lim_{j\to\infty} f_j\,, \quad \text{om}$$

MKS: $0 \le f_1 \le f_2 \le \cdots$;

DKS: $|f_j| \le g$, g integrerbar;

BKS: $|f_j| \le M$, $m(E) < \infty$;

Dessutom **Fatou:** $f_j \ge 0 \;\Rightarrow$

$$\int_E \liminf_{j\to\infty} f_j \le \liminf_{j\to\infty} \int_E f_j \,.$$

Integrerbarhet över en disjunkt union.

Sats 4.49. *Låt E_j, $j \in \mathbb{N}$, vara mätbara och disjunkta och $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$. Om f är integrerbar i E, så är f integrerbar i E_j $\forall\, j$ och*

$$\int_E f = \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{E_j} f \,. \tag{4.50}$$

å andra sidan: om f är integrerbar i E_j $\forall\, j$ och

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{E_j} |f| < \infty \,,$$

så är f integrerbar i E och (4.50) gäller.

Bevis. S. 4.32 (ii) $\Rightarrow$

$$\int_E f^+ = \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{E_j} f^+ \,, \quad \text{likaså } f^- \,.$$

f integrerbar i $E \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \int_E f^+ < \infty \;\Rightarrow\; \int_{E_j} f^+ < \infty \;\forall\, j \\[2ex] \int_E f^- < \infty \;\Rightarrow\; \int_{E_j} f^- < \infty \;\forall\, j \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ integrerbar i } E_j \;\forall\, j \,.$$

Dessutom:

$$\begin{aligned} \int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^- &= \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{E_j} f^+ - \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{E_j} f^- \\ &\overset{(*)}{=} \sum_{j\in\mathbb{N}} \Big(\int_{E_j} f^+ - \int_{E_j} f^- \Big) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{E_j} f \,. \end{aligned}$$

[$(*)$: konvergerande serier]

å andra sidan:

$$\left.\begin{array}{l} f|E_j \text{ mätbar } \forall\, j \;\Rightarrow\; f \text{ mätbar i } E \\[2ex] \int_E |f| \overset{4.32}{=} \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{E_j} |f| \overset{\text{ant.}}{<} \infty \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ integrerbar i } E \text{ och (4.50) gäller.} \quad \square$$

Tilläggsinformation: Låt (X, Γ, μ) vara ett måttrum. Vi säger att Γ-mätbara funktionen $f\colon E \to \dot{\mathbb{R}}$ är <u>integrerbar</u> över mängden $E \in \Gamma$, om

$$\int_E |f| < \infty \quad \Big(\iff \int_E f^+ < \infty \text{ och } \int_E f^- < \infty\Big) \,.$$

Integralens värde är

$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^- \quad (\in \mathbb{R}).$$

Resultaten i kapitel 4.34 (bl.a. MKS, DKS, o.s.v.) är i kraft (förutom sambanden till Riemann-integralen). I bevisen ersätter vi $\mathbb{R}^n$ med mängden X, Lebesguemåttet m med måttet μ, o.s.v.

5 Fubinis satser

Bakgrund: Låt $A = [a,b] \times [c,d]$ vara ett slutet 2-intervall och $f\colon A \to \mathbb{R}$ en kontinuerlig funktion. Då kan f:s Riemann-integral över A beräknas som på varandra följande integraler:

$$(\mathrm{R}) \int\int_A f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dx \right) dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dy \right) dx\,.$$

Det visar sig att Lebesgueintegralen har en liknande egenskap med mycket allmänna villkor. Resultaten i fråga (s.k. Fubinis satser) hör till Lebesgueintegralens nyttigaste egenskaper!

I beviset använder vi följande lemma.

Definition 5.1. n-intervallet $I \subset \mathbb{R}^n$ är halvöppet till höger, om det är av formen $[a_1, b_1) \times \cdots \times [a_n, b_n)$.

Lemma 5.2. *Varje öppen $G \subset \mathbb{R}^n$ är en uppräknelig union av disjunkta, till höger halvöppna n-intervall.*

Bevis. Antag $k \in \mathbb{N}$. Dela in $\mathbb{R}^n$ i $(n-1)$-dim. plan"$x_i = m/2^k,\ m \in \mathbb{Z},\ i \in \{1, \ldots, n\}$ i till höger halvöppna, disjunkta kuber, vars sidor har längden $= 1/2^k$. Låt mängden av dessa $= \tilde{N}_k$. (Obs.: $I \in \tilde{N}_k \ \Rightarrow$ diametern till $I\ = \sqrt{n}/2^k$.) Beteckna

$$\begin{aligned} &\tilde{Q}_1 = \{I \in \tilde{N}_1 \colon I \subset G\}\,; \\ &\tilde{Q}_2 = \{I \in \tilde{N}_2 \colon I \subset G,\ I \cap J = \emptyset\ \forall J \in \tilde{Q}_1\}\,; \\ \text{allmänt}\quad &\tilde{Q}_k = \{I \in \tilde{N}_k \colon I \subset G,\ I \cap J = \emptyset\ \forall J \in \tilde{Q}_1 \cup \ldots \cup \tilde{Q}_{k-1}\}\,. \end{aligned}$$

Då är $\tilde{Q} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \tilde{Q}_k$ en uppräknelig familj av disjunkta, till höger halvöppna kuber (välj ett tal $a \in I \cap \mathbb{Q}^n$ ur varje $I \in \tilde{Q}_k \ \Rightarrow\ \forall\ \tilde{Q}_k$ uppräknelig $\overset{\text{S. 1.16}}{\Longrightarrow}$ $\tilde{Q}$ uppräknelig). Vi visar, att $G = \bigcup_{I\in\tilde{Q}} I$. Det är klart, att

$$\bigcup_{I\in\tilde{Q}} I \subset G\,.$$

å andra sidan: Antag $x \in G$. $\ G$ öppen $\ \Rightarrow\ \exists\ B(x,r) \subset G$

$$\Rightarrow\ \exists\ k \in \mathbb{N} \text{ s.a. } \exists\ I \in \tilde{N}_k,\ x \in I \subset B(x,r) \qquad (\text{välj } k \text{ s.a. } \sqrt{n}/2^k < r).$$

Om $I \in \tilde{Q}_k$, så är

$$x \in I \subset \bigcup_{I\in\tilde{Q}} I\,.$$

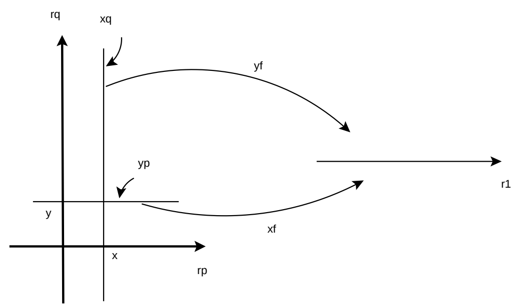
Om $I \notin \tilde{Q}_k$, så $\exists\ J \in \tilde{Q}_1 \cup \ldots \cup \tilde{Q}_{k-1}$ s.a. $I \cap J \neq \emptyset$. Konstruktionen $\Rightarrow I \subset J$ (ty $I \subset J$ eller $I \cap J = \emptyset$), varav

$$x \in I \subset J \subset \bigcup_{I\in\tilde{Q}} I\,.$$

□

Vi identifierar $\mathbb{R}^{p+q} = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q,\ p, q \in \mathbb{N}$.

$$z \in \mathbb{R}^{p+q} \iff z = (\underbrace{x_1, \ldots, x_p}_{=x \in \mathbb{R}^p}, \underbrace{y_1, \ldots, x_q}_{=y \in \mathbb{R}^q}) = (x, y).$$



Sats 5.3. (**Fubinis 1. sats,** $f \geq 0$) *Låt* $f\colon \mathbb{R}^{p+q} \to \dot{\mathbb{R}}$ *vara mätbar och* $f \geq 0$. *Då gäller att*

(1)

$$y \mapsto f(x, y) \text{ mätbar för n.v. } x \in \mathbb{R}^p\,;$$
$$[\text{alltså } m_p\big(\{x \in \mathbb{R}^p \colon y \mapsto f(x, y) \text{ icke-mätbar}\}\big) = 0]$$

(2)

$$x \mapsto f(x, y) \text{ mätbar för n.v. } y \in \mathbb{R}^q\,;$$

(3)

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^q} f(x, y)\, dm_q(y) \quad \text{mätbar;}$$

(4)

$$y \mapsto \int_{\mathbb{R}^p} f(x, y)\, dm_p(x) \quad \text{mätbar;}$$

(5)

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f \overset{(5a)}{=} \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f(x, y)\, dm_q(y) \right) dm_p(x)$$
$$\overset{(5b)}{=} \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f(x, y)\, dm_p(x) \right) dm_q(y)\,. \quad (+\infty \text{ tillåtet})$$

Bevis. Symmetri $\Rightarrow$ räcker att visa (1), (3) och (5a). Beteckna

$$P = \{f\colon \mathbb{R}^{p+q} \to \dot{\mathbb{R}} \mid f \geq 0 \text{ mätbar och uppfyller villkoren (1),(3) och (5a)}\}\,.$$

Vi vill visa: $f\colon \mathbb{R}^{p+q} \to \dot{\mathbb{R}},\ f \geq 0$, mätbar $\Rightarrow\ f \in P$.

$\boxed{\text{Steg 1.}}$ Vi börjar med att visa följande allmänna egenskaper:

(a) $f, g \in P,\ a, b \geq 0 \ \Rightarrow\ af + bg \in P$;

(b) $f, g \in P,\ g(z) < \infty\ \forall z,\ f - g \geq 0,\ \int_{\mathbb{R}^{p+q}} g < \infty \ \Rightarrow\ f - g \in P$;

(c) $f_j \in P,\ f_j \nearrow f \ \Rightarrow\ f \in P$;

(d) $f_j \in P \ \Rightarrow\ \sum_{j\in\mathbb{N}} f_j \in P$;

(e) $f_j \in P,\ f_j \searrow f,\ \int_{\mathbb{R}^{p+q}} f_1 < \infty \ \Rightarrow\ f \in P$.

Bevis för (a)–(e):
(a): Klart, ty $af + bg$ är mätbar och $\int(af + bg) = a\int f + b\int g$. Detaljerat:

$$\left.\begin{array}{l} y \mapsto f(x, y) \text{ mätbar, då } x \notin E_1,\ m_p(E_1) = 0 \\ y \mapsto g(x, y) \text{ mätbar, då } x \notin E_2,\ m_p(E_2) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$y \mapsto af(x, y) + bg(x, y)$ mätbar (åtminstone) då $x \notin E_1 \cup E_2,\ m_p(E_1 \cup E_2) = 0$ (d.v.s. (1) gäller);

$$\begin{aligned} x \mapsto &\int_{\mathbb{R}^q} (af(x, y) + bg(x, y))\, dm_q(y) \\ \overset{4.28}{=} &\underbrace{a\int_{\mathbb{R}^q} f(x, y)\, dm_q(y)}_{x\mapsto\ --\ \text{mätbar } (f\in P)} + \underbrace{b\int_{\mathbb{R}^q} g(x, y)\, dm_q(y)}_{x\mapsto\ --\ \text{mätbar } (g\in P)} \quad \text{mätbar (d.v.s. (3) gäller);} \end{aligned}$$

Dessutom:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{p+q}} (af + bg) &\overset{4.28}{=} a\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f + b\int_{\mathbb{R}^{p+q}} g \\ &\overset{(f,g\in P)}{=} a\int_{\mathbb{R}^p}\left(\int_{\mathbb{R}^q} f(x, y)\, dm_q(y)\right) dm_p(x) + b\int_{\mathbb{R}^p}\left(\int_{\mathbb{R}^q} g(x, y)\, dm_q(y)\right) dm_p(x) \\ &\overset{4.28}{=} \int_{\mathbb{R}^p}\left(\int_{\mathbb{R}^q} (af + bg)\, dm_q(y)\right) dm_p(x) \text{ (d.v.s. (5a) gäller).} \end{aligned}$$

(b): På liknande sätt, ty $f - g$ är mätbar och $\int(f - g) = \int f - \int g$.
(c):

(1) $\exists\ E_j \subset \mathbb{R}^p,\ m_p(E_j) = 0$ s.a. $y \mapsto f_j(x, y)$ mätbar $\forall x \notin E_j \overset{3.23}{\Longrightarrow} y \mapsto f(x, y)$ mätbar $\forall x \notin \cup_j E_j,\ m_p(\cup_j E_j) = 0$.

(3)

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^q} f(x, y)\, dm_q(y) \overset{\text{MKS}}{=} \lim_{j\to\infty} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^q} f_j(x, y)\, dm_q(y)}_{x\mapsto\ --\ \text{mätbar } (f_j\in P)} \quad \text{mätbar (S. 3.23).}$$

(5a)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{p+q}} f \overset{\text{MKS}}{=} \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^{p+q}} f_j &\overset{f_j\in P}{=} \int_{\mathbb{R}^p}\left(\int_{\mathbb{R}^q} f_j(x, y)\, dm_q(y)\right) dm_p(x) \\ &\overset{2\times\text{MKS}}{=} \int_{\mathbb{R}^p}\left(\int_{\mathbb{R}^q} f(x, y)\, dm_q(y)\right) dm_p(x)\,. \end{aligned}$$

(d): (a) $\Rightarrow$ delsummorna $\sum_{j=1}^{k} f_j \in P$. Dessutom $\sum_{j=1}^{k} f_j \nearrow \sum_{j\in\mathbb{N}} f_j$, varav (c) $\Rightarrow$ påstående.
(e): Som (c) med hjälp av avtagande MKS.

Vi har nu bevisat (a)–(e).

$\boxed{\text{Steg 2.}}$ Antag $f\colon \mathbb{R}^{p+q} \to \dot{\mathbb{R}}$, $f \geq 0$, mätbar. Visa: $f \in P$. Beviset i flera skeden ((**A**)–(**H**)) för olika funktioner f.

(A): $f = \chi_{I\times J}$, där $I \subset \mathbb{R}^p$ är ett p-intervall och $J \subset \mathbb{R}^q$ ett q-intervall. (Obs. $I \times J$ är ett $(p+q)$-intervall.) Då är $f(x,y) = \chi_I(x)\chi_J(y)$.

(1): Klart, ty

$$y \mapsto f(x,y) = \begin{cases} \chi_J(y), & \text{om } x \in I; \\ 0, & \text{om } x \notin I. \end{cases}$$

(3): $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^q} \chi_{I\times J}(x,y)\,dm(y) = m(J)\chi_I(x)$ är mätbar (enkel).

(5a):

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f \overset{\text{enkel}}{=} m_p(I)m_q(J), \quad \text{och}$$

$$\int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} \chi_{I\times J}(x,y)\,dm_q(y) \right) dm_p(x) \overset{\text{tidigare}}{=} \int_{\mathbb{R}^p} m_q(J)\chi_I(x)\,dm_p(x) = m_q(J)m_p(I)\,.$$

(B): $f = \chi_G$, där $G \subset \mathbb{R}^{p+q}$ är öppen. Lemma 5.2 $\Rightarrow$

$$G = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$$

uppräknelig union av disjunkta intervall $E_j = I_j \times J_j \subset \mathbb{R}^{p+q}$.

$$\left.\begin{array}{r} \text{disjunkt union} \;\Rightarrow\; f = \sum_{j\in\mathbb{N}} \chi_{E_j} \\[2ex] \textbf{(A)} \;\Rightarrow\; \chi_{E_j} \in P \;\forall\, j \end{array}\right\} \overset{\text{(d)}}{\Longrightarrow} f \in P\,.$$

(C): $f = \chi_B$, där $B \subset \mathbb{R}^{p+q}$ är en begränsad $\mathcal{G}_\delta$-mängd:

$$B = \bigcap_{j=1}^{\infty} G_j, \text{ där } G_j \subset \mathbb{R}^{p+q} \text{ öppen } \forall\, j\,.$$

Vi kan välja en begränsad mängd G_j (annars betraktar vi mängderna $G_j \cap B(0,R)$, där $B(0,R) \supset B$) och

$$G_1 \supset G_2 \supset \cdots$$

genom att vid behov ersätta G_j med mängden $G_1 \cap G_2 \cap \cdots \cap G_j$. Nu gäller att

$$\left.\begin{array}{c} f_j = \chi_{G_j} \searrow \chi_B = f \text{ avtagande följd} \\[2ex] \textbf{(B)} \;\Rightarrow\; f_j \in P \;\forall\, j \\[2ex] \int_{\mathbb{R}^{p+q}} f_1 = m(G_1) < \infty \end{array}\right\} \overset{\text{(e)}}{\Longrightarrow} f \in P\,.$$

(D): $f = \chi_E$, där $E \subset \mathbb{R}^{p+q}$ är en begränsad mängd och $m(E) = 0$. Övningsuppgift $\Rightarrow$ $\exists$ begränsad $\mathcal{G}_\delta$-mängd $B \subset \mathbb{R}^{p+q}$ s.a. $E \subset B$ och $m(B) = 0$. Beteckna $g = \chi_B$.

$$\begin{aligned} \textbf{(C)} &\Rightarrow g \in P\,. \\ E \subset B &\Rightarrow 0 \le f \le g\,. \end{aligned}$$

Nu gäller att

$$\begin{aligned} & 0 = m(B) = \int_{\mathbb{R}^{p+q}} g \overset{g\in P}{=} \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} g(x,y)\,dm_q(y) \right) dm_p(x) \\ & \overset{4.33\ \text{(ii)}}{\Longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^q} g(x,y)\,dm_q(y) = 0 \text{ för n.v. } x \in \mathbb{R}^p \\ & \overset{4.33\ \text{(ii)}}{\Longrightarrow} \text{för n.v. } x \in \mathbb{R}^p \text{ gäller: } g(x,y) = 0 \text{ för n.v. } y \in \mathbb{R}^q \\ & \overset{0\le f\le g}{\Longrightarrow} \text{för n.v. } x \in \mathbb{R}^p \text{ gäller: } f(x,y) = 0 \text{ för n.v. } y \in \mathbb{R}^q \\ & \quad \Rightarrow \text{för n.v. } x \in \mathbb{R}^p \text{ gäller: } y \mapsto f(x,y) \text{ mätbar (d.v.s. (1) gäller) och } \int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dm_q(y) = 0 \\ & \quad \Rightarrow x \mapsto \int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dm_q(y) \text{ mätbar (d.v.s. (3) gäller).} \end{aligned}$$

Dessutom är (5a) i kraft i formen 0=0, varav $f = \chi_E \in P$.

(E): $f = \chi_A$, där $A \subset \mathbb{R}^{p+q}$ är en mätbar och begränsad mängd. Övningsuppgift $\Rightarrow$ $\exists$ begränsad $\mathcal{G}_\delta$-mängd $B \subset \mathbb{R}^{p+q}$ s.a. $A \subset B$ och $m(B) = m(A)$. Då är $E = B \setminus A$ mätbar och

$$\left. \begin{array}{c} B = A \cup E \text{ disjunkt union} \\ m(B) = m(A) < \infty \end{array} \right\} \Rightarrow m(B) = m(A) + m(E) \Rightarrow m(E) = 0\,.$$

$$\left. \begin{array}{l} \textbf{(C)} \Rightarrow \chi_B \in P \\ \textbf{(D)} \Rightarrow \chi_E \in P \end{array} \right\} \overset{(b)}{\Rightarrow} f = \chi_B - \chi_E \in P\,.$$

(F): $f = \chi_A$, där $A \subset \mathbb{R}^{p+q}$ är en godtycklig mätbar mängd. Låt $A_j = A \cap B(0,j)$, där $B(0,j) \subset \mathbb{R}^{p+q}$ är ett (öppet) klot med radien j.

$$\left. \begin{array}{l} A_j \subset \mathbb{R}^{p+q} \text{ mätbar och begränsad } \overset{\textbf{(E)}}{\Rightarrow} \chi_{A_j} \in P \\ A_j \text{ växande följd, } A = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \Rightarrow \chi_{A_j} \nearrow \chi_A \end{array} \right\} \overset{(c)}{\Rightarrow} f = \chi_A \in P\,.$$

(G): $f = \sum_{j=1}^k a_j \chi_{A_j} \in Y$ enkel funktion i $\mathbb{R}^{p+q}$. **(F)** $\Rightarrow$ $\chi_{A_j} \in P \overset{(a)}{\Rightarrow} f \in P$.

(H): $f\colon \mathbb{R}^{p+q} \to [0,+\infty]$ godtycklig och mätbar. Approximeringssatsen 4.14 $\Rightarrow$ $\exists$ växande följd enkla funktioner $f_j \in Y$ s.a. $f_j \nearrow f$. **(G)** $\Rightarrow$ $f_j \in P \overset{(c)}{\Rightarrow} f \in P$. □

Sats 5.4. (**Fubinis 2. sats**, funktioner som byter tecken) *Låt $f\colon \mathbb{R}^{p+q} \to \dot{\mathbb{R}}$ vara mätbar och antag att minst en av integralerna*

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} |f|\,, \quad \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} |f(x,y)|\,dm_q(y) \right) dm_p(x)\,, \quad \textit{eller}$$

$$\int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} |f(x,y)|\,dm_p(x) \right) dm_q(y)$$

är ändlig. Då är

(1) $y \mapsto f(x,y)$ *integrerbar i* $\mathbb{R}^q$ *för n.v.* $x \in \mathbb{R}^p$*;*

(2) $x \mapsto f(x,y)$ *integrerbar i* $\mathbb{R}^p$ *för n.v.* $y \in \mathbb{R}^q$*;*

(3) $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dm_q(y)$ *integrerbar i* $\mathbb{R}^p$*, d.v.s.*

$$\int_{\mathbb{R}^p} \Big| \int_{\mathbb{R}^q} |f(x,y)|\,dm_q(y) \Big|\,dm_p(x) < \infty\,;$$

(4) $y \mapsto \int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\,dm_p(x)$ *integrerbar i* $\mathbb{R}^q$*;*

(5) f *integrerbar i* $\mathbb{R}^{p+q}$ *och*

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dm_q(y) \right) dm_p(x) = \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\,dm_p(x) \right) dm_q(y)\,. \quad (\in \mathbb{R})$$

Bevis. Antagandet (minst en integral $< \infty$) och Fubini 1. $\Rightarrow$ alla ovannämnda integraler $< \infty$, d.v.s.

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} |f| = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} |f(x,y)|\,dm_q(y) \right) dm_p(x) = \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} |f(x,y)|\,dm_p(x) \right) dm_q(y) < \infty\,. \tag{5.5}$$

$$\Rightarrow\ f \text{ integrerbar i } \mathbb{R}^{p+q} \overset{\text{def.}}{\Longrightarrow} f^+, f^- \text{ integrerbara i } \mathbb{R}^{p+q}$$

varav Fubini 1. $\Rightarrow$

$$\int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f^+(x,y)\,dm_q(y) \right) dm_p(x) = \int_{\mathbb{R}^{p+q}} f^+ < \infty\,.$$

Sats 4.33 (ii) $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{r} \int_{\mathbb{R}^q} f^+(x,y)\,dm_q(y) < \infty \text{ för n.v. } x \in \mathbb{R}^p \\ \text{likväl } \int_{\mathbb{R}^q} f^-(x,y)\,dm_q(y) < \infty \text{ för n.v. } x \in \mathbb{R}^p \end{array}\right\} \quad \Rightarrow$$

$$y \mapsto f(x,y) = f^+(x,y) - f^-(x,y) \ \text{ integrerbar för n.v. } x \in \mathbb{R}^p\,. \quad \text{(d.v.s. (1) gäller)}$$

Beteckna

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dm_q(y) = \int_{\mathbb{R}^q} f^+(x,y)\,dm_q(y) - \int_{\mathbb{R}^q} f^-(x,y)\,dm_q(y)\,.$$

Fubini 1. $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} x \mapsto \int_{\mathbb{R}^q} f^+(x,y)\,dm_q(y) \text{ mätbar} \\ x \mapsto \int_{\mathbb{R}^q} f^-(x,y)\,dm_q(y) \text{ mätbar} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad u \quad \text{mätbar (som funktion av } x\text{).}$$

Dessutom är

$$|u(x)| = \Big| \int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dm_q(y) \Big| \le \int_{\mathbb{R}^q} |f(x,y)|\,dm_q(y)\,,$$

varav

$$\int_{\mathbb{R}^p} |u(x)|\,dm_p(x) \le \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} |f(x,y)|\,dm_q(y) \right) dm_p(x) \overset{(5.5)}{<} \infty\,.$$

u är alltså integrerbar i $\mathbb{R}^p$ (Majorantprincipen"), d.v.s. (3) gäller. Dessutom:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f &= \int_{\mathbb{R}^{p+q}} f^+ - \int_{\mathbb{R}^{p+q}} f^- \\ &\overset{\text{Fub. 1.}}{=} \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f^+(x,y)\,dm_q(y) \right) dm_p(x) - \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f^-(x,y)\,dm_q(y) \right) dm_p(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^p} \Big(\int_{\mathbb{R}^q} \underbrace{\big(f^+(x,y) - f^-(x,y)\big)}_{=f(x,y)\ \text{n.ö.}} dm_q(y) \Big) dm_p(x) = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dm_q(y) \right) dm_p(x)\,.\end{aligned}$$

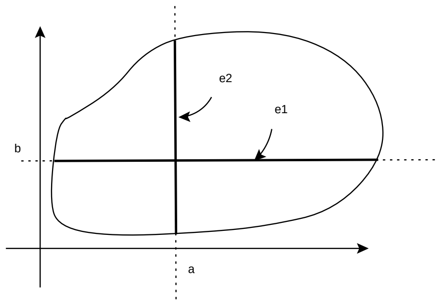
Symmetriskt (2), (4) och andra ekvationen i (5). □

Några tillämpningar (mer på kursen Realanalys I").

Exempel 5.6. Låt $E \subset \mathbb{R}^2$ vara en mätbar mängd med $m_2(E) = 0$. Påstående: Nästan varje vågrät (lodrät motsv.) linje skär E i en mängd vars 1-dimensionella Lebesguemått $= 0$.

Lösn. Beteckna

$$\begin{aligned} E_1(b) &= \{x \in \mathbb{R} \colon (x,b) \in E\},\ b \in \mathbb{R}; \quad &(\text{snittet med } y = b \text{ och } E) \\ E_2(a) &= \{y \in \mathbb{R} \colon (a,y) \in E\},\ a \in \mathbb{R}. \quad &(\text{snittet med } x = a \text{ och } E)\end{aligned}$$



Påståendet betyder att:

$$m_1\big(E_1(y)\big) = 0 \quad \text{för n.v. } y \in \mathbb{R}\,, \quad \text{och motsv.} \quad m_1\big(E_2(x)\big) = 0 \quad \text{för n.v. } x \in \mathbb{R}\,.$$

Fubini 1. tillämpad på funktionen $f = \chi_E \ \Rightarrow$

$$0 = m_2(E) = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_E \overset{\text{Fub. 1.}}{=} \int_R \overbrace{\Big(\int_{\mathbb{R}} \underbrace{f(x,y)}_{\chi_{E_2(x)}(y)}\ dy \Big)}^{m_1(E_2(x))} dx$$

$$\overset{4.33\ (\text{ii})}{\Longrightarrow} m_1\big(E_2(x)\big) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy = 0 \quad \text{för n.v. } x \in \mathbb{R}\,.$$

På liknande sätt är $m_1\big(E_1(y)\big) = 0$ för n.v. $y \in \mathbb{R}$.

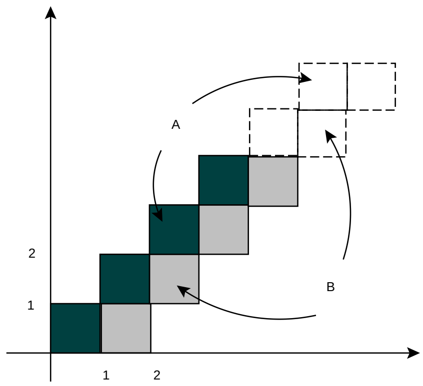
å andra sidan: Om $E \subset \mathbb{R}^2$ är en sådan mätbar delmängd att $m_1\big(E_2(x)\big) = 0$ för n.v. $x \in \mathbb{R}$ (eller $m_1\big(E_1(y)\big) = 0$ för n.v. $y \in \mathbb{R}$), så är $m_2(E) = 0$. Orsak: Fubini 1. och (den mätbara funktionen) $f = \chi_E$ (som tidigare).

Tilläggsinformation: I föregående exempel är antagandet $E \subset \mathbb{R}^2$ mätbar väsentligt: det $\exists\ E \subset \mathbb{R}^2$ s.a.

- E inte är Lebesguemätbar (varav $m^*(A) > 0$)
- varje vågrät linje skär E i högst en punkt
- varje lodrät linje skär E i högst en punkt.

(Sierpinski: Fundamenta Mathematica 1 (1920), s. 114.)

Exempel 5.7. Antag $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f = \chi_A - \chi_B$, där $A =$ unionen av de övre kvadraterna och $B =$ unionen av de nedre kvadraterna (se bild).



Nu är

$$\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx = 0\ \forall\ y \in \mathbb{R}\ \Rightarrow\ \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx \right) dy = 0\,.$$

å andra sidan

$$\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy = \chi_{[0,1]}(x) \quad (f(x,y) \equiv 1 \text{ i den undre "}A\text{-kvadraten"}[0,1]\times[0,1])$$

$$\Rightarrow\ \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx \right) dy \neq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy \right) dx\,.$$

Fubinis satser är inte i kraft, ty f byter tecken (Fubini 1.) och

$$\int_{\mathbb{R}^2} |f| = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_{A\cup B} = m_2(A \cup B) = \infty$$

d.v.s. f är inte integrerbar i $\mathbb{R}^2$ (Fubini 2.).

Exempel 5.8. Beräkna

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,.$$

<u>Lösn.</u> Oegentlig Riemann-integral i planet

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{R})\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy &= \lim_{n\to\infty}(\mathrm{R})\int_{B(0,n)} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy \overset{(*)}{=} \lim_{n\to\infty}(\mathrm{R})\int_0^n\int_0^{2\pi} e^{-r^2} r\,drd\varphi \\
&= 2\pi\lim_{n\to\infty}(\mathrm{R})\int_0^n re^{-r^2} = \pi\lim_{n\to\infty} \Big/_0^n - e^{-r^2} = -\pi\lim_{n\to\infty}\big(e^{-n^2}-1\big) = \pi\,.
\end{aligned}
$$

å andra sidan MKS $\overset{(**)}{\Longrightarrow}$

$$
\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} = (\mathrm{R})\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy\,.
$$

Dessutom Fubini 1. $\Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
\pi &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}e^{-y^2}\,dy\right)dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}\,dy\right)dx \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx\right)^2 \\
\Rightarrow &\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}\,.
\end{aligned}
$$

$(*)$: polära koordinater

$$
\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}, \quad x^2+y^2 = r^2\,, \quad \text{jakobianen } J(r,\varphi) = r\,.
$$

$(**)$: MKS tillämpad på funktionerna $f_n(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}\chi_{B(0,n)}(x,y)$.

$\boxed{\text{SLUT}}$

Under finns en lista på (några) böcker som kan användas som tilläggsmaterial.

Referenser

[EG] Evans, Lawrence och Gariepy, Ronald. *Measure theory and fine properties of functions,* CRC Press, 1992.

[Fr] Friedman, Avner. *Foundations of modern analysis,* Dover Publications Inc., 1982.

[GZ] Gariepy, Ronald och Ziemer, William. *Modern real analysis,* PWS Publishing Company, 1994.

[HS] Hewitt, Edwin och Stromberg, Karl. *Real and abstract analysis,* Springer-Verlag, 1975.

[Jo] Jones, Frank. *Lebesgue integration on Euclidean space,* Jones and Bartlett Publishers, 1993.

[Mat] Mattila, Pertti. *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces,* Cambridge University Press, 1995.

[MW] McDonald, John N. och Weiss, Neil A. *A course in real analysis,* Academic Press Inc., 1999.

[Ro] Royden, H. L. *Real analysis,* Macmillan Publishing Company, 1988.

[Ru] Rudin, Walter. *Real and complex analysis,* McGraw-Hill Book Co., 1987.