Institutionen för matematik och statistik
Mått- och integrationsteori
Övning 7
26.11.2012

1. Bestäm gränsvärdet
$$\lim_{n\to\infty}\int_1^\infty \left(\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\right)^n dx.$$
2. Låt $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ (dvs. f mätbar och $\int_{\mathbb{R}^n} |f| dm_n < \infty$). Visa att det mot varje $\varepsilon > 0$ svarar en Lebesguemätbar mängd $A \subset \mathbb{R}^n$ med $m_n(A) < \infty$ och
$$\int_{\mathbb{R}^n\setminus A} |f| < \varepsilon.$$
3. Låt $(X, \mathcal{M}, \mu)$ vara ett måttrum med $\mu(X) = 1$. Definiera för alla mätbara funktioner $f, g : X \to \mathbb{C}$
$$d(f,g) = \int_X \frac{|f-g|}{1+|f-g|} d\mu.$$
   (a) Visa att d är en metrik.
   (b) Visa att $d(f_n, f) \to 0$ om och endast om f_n konvergerar mot f med avseende på måttet μ (konvergens med avseede på ett mått definierades i övning 5).
4. Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara integrerbar med avseende på Lebesguemåttet och definiera funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genom
$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(xt)dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$
Visa att g är kontinuerlig.
5. Bestäm gränsvärdet
$$\lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n} e^{-nx^2} dx.$$
6. Bestäm gränsvärdet
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{\sin(x^n)}{x^{n-1}} dx.$$
7. Låt $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ vara mätbar och definiera funktionerna $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ genom
$$g_n(x) = \frac{\cos(f(x))}{1+n(f(x))^2}, \quad x \in [0,1].$$
Visa att funktionerna g_n är integrerbara över intervallet $[0,1]$ och att gränsvärdet
$$a_f = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 g_n(x)dx$$
existerar. Vilka värden antar a_f då f genomlöper alla mätbara funktioner $f : [0,1] \to \mathbb{R}$.