Institutionen för matematik och statistik
Mått- och integrationsteori
Övning 6
19.11.2012

1. Definiera för $x \in \mathbb{R}$ och $t > 0$

$$f(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} \quad \text{och} \quad g(t,x) = \frac{\partial}{\partial t} f(t,x).$$

   (a) Visa att

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t,x)dx = 1$$

   för alla $t > 0$.

   (b) Låt $s > 0$. Evaluera de dubbla integralerna

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{s}^{\infty} g(t,x)\, dt\, dx \quad \text{och} \quad \int_{s}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(t,x)\, dx\, dt.$$

   (c) Gäller Fubinis sats i detta fall?

   (d) Om inte, varför?

2. Låt $(X, \mathcal{S}, \mu)$ och $(Y, \mathcal{T}, \lambda)$ vara σ-finita måttrum. Bevisa *Cavalieris princip*: Om E och F är $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$-mätbara delmängder av $X \times Y$ och $\lambda(E_x) = \lambda(F_x)$ för nästan alla $x \in X$ så är $(\mu \times \lambda)(E) = (\mu \times \lambda)(F)$. Använd detta resultat till att bevisa att de båda mynthögarna i Figur 1 har samma volym.

Figur 1: Två mynthögar med samma volym

3. Låt m_n beteckna det Lebeguemåttet i $\mathbb{R}^n$ och låt $f : [0,1] \to (0,\infty)$ vara m_1-mätbar.

   (a) Visa att mängden $A(f) = \{(x,y) \in [0,1] \times (0,\infty) : 0 < y < f(x)\}$ är m_2-mätbar.

(b) Visa att

$$m_2(A(f)) = \int_0^1 f(x) dm_1(x).$$

4. Bestäm volymen av snittet av de två kropparna $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ och $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_3^2 \leq 1\}$ i $\mathbb{R}^3$.

5. Bestäm Lebeguemåttet av klotet $\{x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\}$ i $\mathbb{R}^n$.