

Institutionen för matematik och statistik

Mått- och integrationsteori

Övning 5

12.11.2012

Definition Låt (X, \mathcal{M}, μ) vara ett måttrum och låt f_n vara en följd av mätbara reellvärda funktioner på X . Följden f_n säges *konvergera med avseende på måttet μ* mot den mätbara funktionen f om för varje $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{x \in X : |f(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\}) = 0.$$

- (a) Ge ett exempel på en följd f_n av funktioner definierade på $[0, 1]$ som konvergerar mot 0 med avseende på Lebesguemåttet, trots att $f_n(x)$ inte konvergerar i någon punkt $x \in [0, 1]$.
 - (b) Visa att om f_n konvergerar mot f med avseende på måttet μ , så har f_n en delföljd f_{n_k} , som konvergerar mot f nästan överallt.
2. Låt $X = [0, 1]$ vara försett med Lebesguemåttet och betrakta funktionsföljderna f_n och g_n definierade genom

$$f_n(x) = nx(1-x)^n, \quad g_n(x) = nf_n(x), \quad x \in X.$$

Kan man tillämpa

- satsen om monoton konvergens,
- Fatous lemma,
- satsen om dominerad konvergens

på följderna f_n och g_n ? I de fall du svarar jakande, ange den slutsats den ifrågavarande satsen ger.

3. Samma fråga som i uppgift 2, men för $X = (0, \infty)$ och

$$f_n(x) = nxe^{-nx^2}, \quad g_n(x) = 2n^2e^{-n^2x^2} \quad x \in X.$$

4. Låt (X, \mathcal{M}, μ) vara ett måttrum. Låt $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ vara mätbara funktioner och antag att $f_1 \geq f_2 \geq \dots \geq 0$ och att $\int_X f_1 d\mu < \infty$. Visa att

$$\int_X \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu.$$

5. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x + e^{n(x-1)}}}$$

6. Låt (X, \mathcal{M}, μ) vara ett måtttrum. Visa att

(a) om $f : X \rightarrow [0, \infty]$ är mätbar, $E \in \mathcal{M}$ och $\int_E f d\mu = 0$, så är $f(x) = 0$ för nästan alla $x \in E$.

(b) om $f \in L^1(\mu)$ och $\int_E f d\mu = 0$ för alla $E \in \mathcal{M}$, så är $f(x) = 0$ för nästan alla $x \in X$.

(c) om $f \in L^1(\mu)$ och

$$\left| \int_X f d\mu \right| = \int_X |f| d\mu,$$

så finns det en sådan konstant $\alpha \in \mathbb{C}$ att $\alpha f(x) = |f(x)|$ för nästan alla $x \in X$.