Institutionen för matematik och statistik
Mått- och integrationsteori
Övning 4
15.10.2012

1. Låt $(X, \mathcal{M})$ vara ett mätbart rum och låt f vara en reellvärd funktion på X. Visa, att om mängden $\{x \in X : f(x) \geq r\}$ är mätbar för alla $r \in \mathbb{Q}$ så är funktionen f mätbar.

2. Låt a_n och b_n vara talföljder in $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$. Bevisa följande påståenden:

   (a) $\limsup_{n\to\infty}(-a_n) = -\liminf_{n\to\infty} a_n$.

   (b) $\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$ förutsatt att högra sidan inte är av formen $\infty - \infty$.

   (c) Om $a_n \leq b_n$ för all n så gäller $\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \liminf_{n\to\infty} b_n$.

   Ge ett exempel på följder a_n och b_n för vilka sträng olikhet gäller i (b).

3. För en följd A_n av delmängder till en mängd X definieras limes inferior och limes superior på följande sätt:

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \right),$$

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \right).$$

   Bevisa följande påståenden:

   (a) $\limsup_{n\to\infty} A_n = \{x \in X : x \in A_n \text{ för oändligt många index } n\}$.

   (b) $\liminf_{n\to\infty} A_n = \{x \in X : \text{endast för ändligt många index } n \text{ gäller } x \notin A_n\}$.

   Låt $(X, \mathcal{M}, \mu)$ vara ett måttrum och antag att $A_n \in \mathcal{M}$ för all $n \in \mathbb{N}$. Bevisa följande påståenden:

   (c) $\liminf_{n\to\infty} A_n \in \mathcal{M}$, $\limsup_{n\to\infty} A_n \in \mathcal{M}$ och

$$\mu\left(\liminf_{n\to\infty} A_n\right) \leq \lim_{k\to\infty}\left(\inf_{n\geq k} \mu(A_n)\right).$$

   (d) Om $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) < \infty$, så gäller

$$\mu\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) \geq \lim_{k\to\infty}\left(\sup_{n\geq k} \mu(A_n)\right).$$

   (e) Om $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$ så gäller $\mu\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 0$ (Borell-Cantelli).

4. Låt $f = 2\chi_{[0,3]} + 5\chi_{[1,6]} + 3\chi_{\mathbb{Q}}$. Visa, att f är en mätbar enkel funktion på $\mathbb{R}$ och bestäm dess normalframställning. Beräkna integralen $\int_{\mathbb{R}} f\,dm$.

5. Låt $f(x) = x$ för $x \in [0, 1]$. Använd definitionen på Lebsegueintegralen till att evaluera integralen $\int_{[0,1]} f\,dm$.