Institutionen för matematik och statistik
Mått- och integrationsteori
Övning 1
24.9.2012

1. (a) Antag att $\emptyset \neq B \subset A \subset \mathbb{R}$. Visa att
$$\inf A \leq \inf B \leq \sup B \leq \sup A.$$
   (b) Låt $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ och $-A = \{-x : x \in A\}$. Visa att
$$\inf A = -\sup(-A).$$
   (c) Bestäm $\inf([0, \infty) \setminus \mathbb{Q})$.

2. Låt X och Y vara två godtyckliga mängder och låt $f : X \to Y$ vara en avbildning, $\{V_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\} \subset \mathcal{P}(X)$ och $A \subset X$.
   (a) Visa att
$$f\left(\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha\right) \subset \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} f(V_\alpha)$$
   och ge ett exempel där inklusionen är äkta.
   (b) Antag ytterligare att f är en injektion. Visa att man då har
$$f\left(\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} f(V_\alpha)$$
   och
$$f(X \setminus A) \subset Y \setminus f(A).$$

3. Låt I vara en (index)mängd och antag att $a_i > 0$ för alla $i \in I$. Visa att I är uppräknelig om $\sum_{i \in I} a_i < \infty$.

4. Låt $V \subset \mathbb{R}^n$ vara en öppen mängd. Visa att det finns en sådan uppräknelig familj $\{B_i\}$ av öppna klot att $V = \bigcup_{i=1}^\infty B_i$.

5. Låt $A \subset \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$ och $k > 0$. Definiera
$$A + y = \{x + y : x \in A\} \text{ och } kA = \{kx : x \in A\}.$$
   Visa att
$$m_n^*(A + y) = m_n^*(A) \text{ och } m_n^*(kA) = k^n m_n^*(A).$$

6. Låt $A \subset [1, 3]$. Visa att
$$m^*\left(\left\{x^2 : x \in A\right\}\right) \leq 6m^*(A).$$
   Kan man ersätta konstanten 6 med ett mindre tal?