18 Lineaarikuvaus

Määritelmä 18.1. Olkoot V ja U vektoriavaruuksia. Kuvaus $L\colon V \to U$ on *lineaarikuvaus*, jos seuraavat ehdot pätevät:

a) $L(\bar{v}+\bar{w}) = L(\bar{v}) + L(\bar{w})$ kaikilla $\bar{v}, \bar{w} \in V$

b) $L(c\bar{v}) = cL(\bar{v})$ kaikilla $c \in \mathbb{R}$ ja $\bar{v} \in V$.

Jos kuvaus L on lineaarikuvaus, voidaan myös sanoa, että L on *lineaarinen*. Merkintä $L\colon V \to U$ tarkoittaa, että vektoriavaruus V on kuvauksen L lähtöavaruus. Vektoriavaruus U on puolestaan kuvauksen L maaliavaruus.

Esimerkki 18.2. Tarkastellaan kuvausta $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x$. Osoitetaan, että f on lineaarikuvaus.

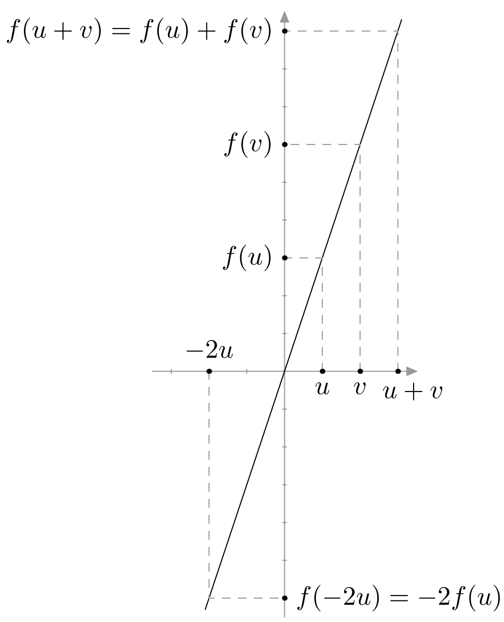
Oletetaan, että $v, u \in \mathbb{R}$ ja $c \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$f(v+u) = 3(v+u) = 3v + 3u = f(v) + f(u)$$

ja

$$f(cv) = 3(cv) = c(3v) = cf(v).$$

Kuvaus f täyttää siis lineaarikuvauksen määritelmän ehdot.



Kuva 18.2: Kuvaus f täyttää lineaarikuvauksen määritelmän ehdot.

Esimerkki 18.3. Tarkastellaan kuvausta $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^3 - 2x + 1$. Osoitetaan, että g ei ole lineaarikuvaus. Tämän osoittamiseen riittää yksi tapaus, jossa lineaarikuvauksen ehto ei toteudu.

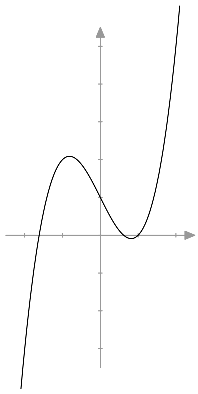
Valitaan esimerkiksi $v = -1$ ja $w = 2$. Tällöin

$$g(v + w) = g(1) = 0,$$

mutta

$$g(v) + g(w) = g(-1) + g(2) = 2 + 5 = 7.$$

Siis $g(-1 + 2) \neq g(-1) + g(2)$, joten g ei ole lineaarikuvaus.



Kuva 18.3: Kuvaus g ei ole lineaarikuvaus.

Tällä kurssilla on tärkeää tehdä ero kuvauksen ja kuvauksen arvon välillä. Edellisessä esimerkissä määriteltiin kuvaus g kirjoittamalla $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^3 - 2x + 1$. Merkintä $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on tässä oleellinen. Jos kirjoitetaan pelkästään $g(x) = x^3 - 2x + 1$, tarkoitetaan kuvauksen g arvoa jossakin yksittäisessä pisteessä x. Samalla tavalla on tehtävä ero merkintöjen g ja $g(x)$ välillä. Ensimmäinen tarkoittaa kuvausta ja toinen kuvauksen arvoa pisteessä x.

Esimerkki 18.4. Osoitetaan, että kuvaus

$$L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad L(x_1, x_2, x_3) = (7x_2,\ x_1 - 3x_3)$$

on lineaarikuvaus. (Tässä vektorin (x_1, x_2, x_3) kuva pitäisi tarkalleen ottaen kirjoittaa muodossa $L((x_1, x_2, x_3))$ mutta on yleisesti sovittu, että toiset sulut saa tässä jättää pois.)

Oletetaan, että $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$, $\bar{w} = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$ ja $c \in \mathbb{R}$.

a) Huomataan, että

$$\begin{aligned} L(\bar{v} + \bar{w}) &= L(v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3) = (7(v_2 + w_2),\ (v_1 + w_1) - 3(v_3 + w_3)) \\ &= (7v_2 + 7w_2,\ v_1 + w_1 - 3v_3 - 3w_3). \end{aligned}$$

Toisaalta

$$
\begin{aligned}
L(\bar{v}) + L(\bar{w}) &= (7v_2,\ v_1 - 3v_3) + (7w_2,\ w_1 - 3w_3) \\
&= (7v_2 + 7w_2,\ v_1 + w_1 - 3v_3 - 3w_3),
\end{aligned}
$$

joten $L(\bar{v} + \bar{w}) = L(\bar{v}) + L(\bar{w})$.

b) Nähdään, että

$$
\begin{aligned}
L(c\bar{v}) &= L(cv_1, cv_2, cv_3) = (7cv_2,\ cv_1 - 3cv_3) \\
&= c(7v_2,\ v_1 - 3v_2) = cL(\bar{v}).
\end{aligned}
$$

Siten L on lineaarikuvaus.

Esimerkki 18.5. Kuvaus $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L(x_1, x_2) = (x_1x_2,\ x_1)$ ei ole lineaarikuvaus. Huomataan nimittäin, että

$$L((1,1) + (1,0)) = L(2,1) = (0,2)$$

ja

$$L(1,1) + L(1,0) = (1,1) + (0,1) = (1,2) \neq (0,2).$$

Siis $L((1,1) + (1,0)) \neq L(1,1) + L(1,0)$, eikä kuvaus siten ole lineaarikuvaus.

Vaihtoehtoisesti voidaan myös tarkastella lineaarikuvauksen jälkimmäistä ehtoa ja osoittaa, että se ei päde. Huomataan, että $L(2(1,1)) = L(2,2) = (4,2)$ ja $2L(1,1) = 2(1,1) = (2,2)$. Siten $L(2(1,1)) \neq 2L(1,1)$, eikä kuvaus ole lineaarikuvaus.

Esimerkki 18.6. Osoitetaan, että kuvaus $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}_1$, $L(a,b) = ax + b$ on lineaarikuvaus. Oletetaan, että $(a,b), (c,d) \in \mathbb{R}^2$ ja $r \in \mathbb{R}$. Nyt

$$
\begin{aligned}
L((a,b) + (c,d)) &= L(a + c, b + d) = (a + c)x + (b + d) \\
&= ax + b + cx + d = L(a,b) + L(c,d)
\end{aligned}
$$

ja

$$L(r(a,b)) = L(ra, rb) = rax + rb = r(ax + b) = rL(a,b).$$

Siten L on lineaarikuvaus.

Esimerkki 18.7. Jos tiedetään virittäjävektorien arvot lineaarikuvauksessa, voidaan tämän avulla päätellä kaikkien muidenkin vektoreiden arvot.

Oletetaan, että $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ on lineaarikuvaus, jolle pätee $L(1,0) = (1,4,5)$ ja $L(0,1) = (0,-1,-1)$. Määritetään tämän tiedon avulla vaikkapa vektorin $(-3,4)$ kuva:

$$
\begin{aligned}
L(-3,4) &= L(-3(1,0) + 4(0,1)) \\
&= L(-3(1,0)) + L(4(0,1)) \\
&= -3L(1,0) + 4L(0,1) \\
&= -3(1,4,5) + 4(0,-1,-1) \\
&= (-3,-16,-19).
\end{aligned}
$$

Mistä tahansa matriisista saadaan lineaarikuvaus.

Lause 18.8. *Oletetaan, että A on $m \times n$-matriisi. Matriisin A määräämä kuvaus $L_A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $L_A(\bar{v}) = A\bar{v}$ on lineaarikuvaus.*

Tässä avaruuden $\mathbb{R}^n$ alkiot tulkitaan $n \times 1$-matriiseiksi.

Todistus. Oletetaan, että $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^n$ ja $c \in \mathbb{R}$. Nyt matriisien kertolaskun ominaisuuksien perusteella pätee

$$L_A(\bar{v} + \bar{w}) = A(\bar{v} + \bar{w}) = A\bar{v} + A\bar{w} = L_A(\bar{v}) + L_A(\bar{w})$$

ja

$$L_A(c\bar{v}) = A(c\bar{v}) = c(A\bar{v}) = cL_A(\bar{v}).$$

Siten L_A on lineaarinen. □

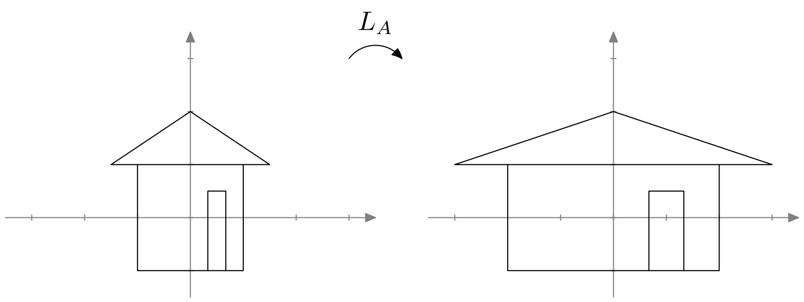
Esimerkki 18.9. Tutkitaan, millaisen lineaarikuvauksen antavat matriisit

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matriisista A saadaan kuvaus $L_A \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L_A(\bar{v}) = A\bar{v}$. Avaruuden $\mathbb{R}^2$ vektori (x_1, x_2) kuvautuu siis vektoriksi

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Toisin sanoen $L_A(x_1, x_2) = (2x_1, x_2)$. Tästä nähdään, että kuvaus L_A *venyttää* vektoreita x_1-akselin suunnassa (ks. kuva 18.4).

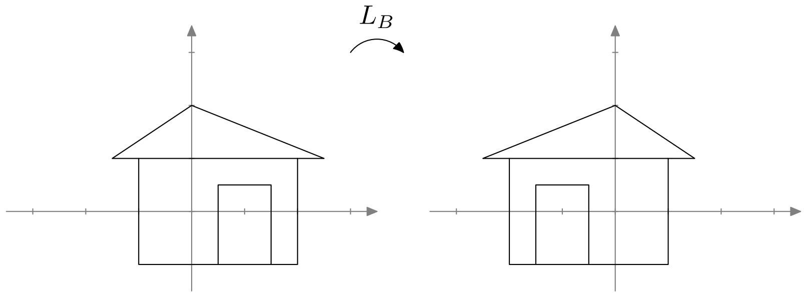


Kuva 18.4: Lineaarikuvaus L_A venyttää vektoreita x_1-akselin suunnassa.

Matriisista B saadaan puolestaan kuvaus $L_B \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, jolle pätee

$$L_B\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Kuvaus L_B *peilaa* vektorit x_2-akselin suhteen (ks. kuva 18.5).



Kuva 18.5: Lineaarikuvaus L_B peilaa vektorit x_2-akselin suhteen.

Matriisi C määrää kuvauksen $L_C\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, jolle pätee

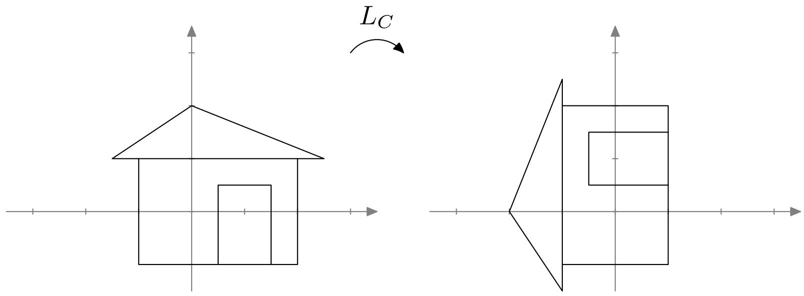
$$L_C\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}.$$

Kuvaus L_C *kiertää* vektoreita $90°$ vastapäivään eli positiiviseen kiertosuuntaan (ks. kuva 18.6).

Voidaan osoittaa, että matriisin

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

määräämä lineaarikuvaus kiertää vektoreita origon ympäri kulman φ verran (vastapäivään, jos $\varphi > 0$, ja myötäpäivään, jos $\varphi < 0$).



Kuva 18.6: Lineaarikuvaus L_C kiertää vektoreita $90°$ positiiviseen kiertosuuntaan.

Tulemme myöhemmin osoittamaan, että jokainen lineaarikuvaus $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ on jonkin matriisin määräämä kuvaus. Seuraavat esimerkit antavat tästä esimakua.

Esimerkki 18.10. Tutkitaan kuvausta $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$. Se peilaa vektorit x_1-akselin suhteen (ks. kuva 18.7). Kuvaus L on itse asiassa matriisin määräämä lineaarikuvaus eli kuvauksen L arvot saadaan kertomalla vektoreita jollakin matriisilla. Selvitetään tämä matriisi.

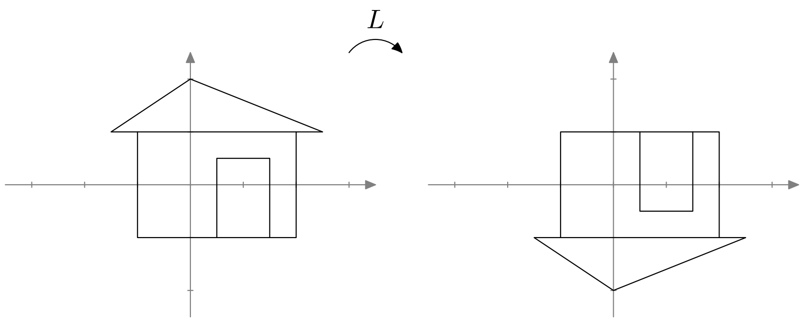
Kun tulkitaan avaruuden $\mathbb{R}^2$ vektori (x_1, x_2) matriisiksi, nähdään, että

$$L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1x_1 + 0x_2 \\ 0x_1 - x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Siten kuvaus L on matriisin

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

määräämä kuvaus, jolle pätee $L(\bar{x}) = D\bar{x}$ kaikilla $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$. Koska L on matriisin määräämä kuvaus, se on lauseen 18.8 nojalla lineaarinen.



Kuva 18.7: Lineaarikuvaus L peilaa vektorit vaaka-akselin suhteen.

Esimerkki 18.11. Tarkastellaan kuvausta $P\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $P(\bar{v}) = \mathrm{proj}_{\bar{e}_1}(\bar{v})$, joka projisoi tason $\mathbb{R}^2$ vektorit vektorin $\bar{e}_1 = (1, 0)$ virittämälle aliavaruudelle (ks. kuva 18.8). Jos $\bar{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, niin

$$P(\bar{v}) = \frac{\bar{v} \cdot \bar{e}_1}{\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1}\bar{e}_1 = \frac{(v_1, v_2) \cdot (1, 0)}{(1, 0) \cdot (1, 0)}(1, 0) = v_1(1, 0) = (v_1, 0).$$

Toisin sanoen $P(v_1, v_2) = (v_1, 0)$.

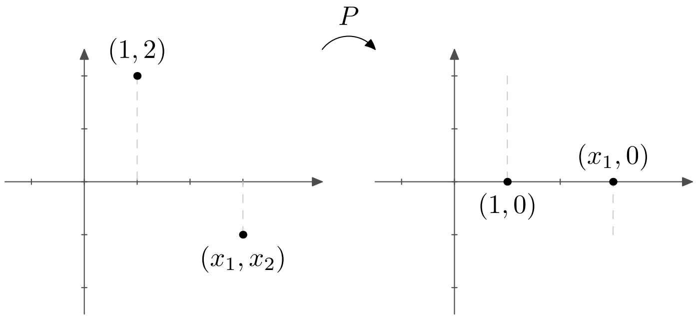
Osoitetaan, että kuvaus P on lineaarinen etsimällä matriisi, jonka määräämä lineaarikuvaus P on. Oletetaan, että $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Nyt

$$P\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1x_1 + 0x_2 \\ 0x_1 + 0x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

joten P on matriisin

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

määräämä lineaarikuvaus. Siten P on lineaarinen.



Kuva 18.8: Kuvaus P projisoi vektorit vaaka-akselille.

Lineaarikuvaus kuvaa nollavektorin aina nollavektoriksi.

Lause 18.12. *Jos $L\colon V \to U$ on lineaarikuvaus, niin $L(\bar{0}_V) = \bar{0}_U$.*

Todistus. Oletetaan, että $L\colon V \to U$ on lineaarikuvaus. Nyt

$$L(\bar{0}_V) = L(\bar{0}_V + \bar{0}_V) = L(\bar{0}_V) + L(\bar{0}_V).$$

Lisätään tämän yhtälön molemmille puolille avaruuden U vektori $-L(\bar{0}_V)$, jolloin saadaan

$$L(\bar{0}_V) - L(\bar{0}_V) = L(\bar{0}_V) + L(\bar{0}_V) - L(\bar{0}_V).$$

Nyt nähdään, että $\bar{0}_U = L(\bar{0}_V)$. Siten väite on todistettu. □

Oletetaan, että $L\colon V \to U$ on lineaarikuvaus. Jos $L(\bar{v}) = \bar{w}$ joillakin $\bar{v}, \bar{w} \in V$, voidaan merkitä $\bar{v} \mapsto \bar{w}$. Voidaan esimerkiksi kirjoittaa $0_V \mapsto 0_U$.

18.1 Lineaarikuvausten yhdistetyt kuvaukset

Oletetaan, että $L\colon V \to U$ ja $T\colon U \to W$ ovat lineaarikuvauksia. *Yhdistetty kuvaus*[1] $T \circ L$ tarkoittaa kuvausta $V \to W$, jolle pätee

$$(T \circ L)(\bar{v}) = T(L(\bar{v})) \quad \text{eli} \quad \bar{v} \mapsto T(L(\bar{v}))$$

kaikilla $\bar{v} \in V$.

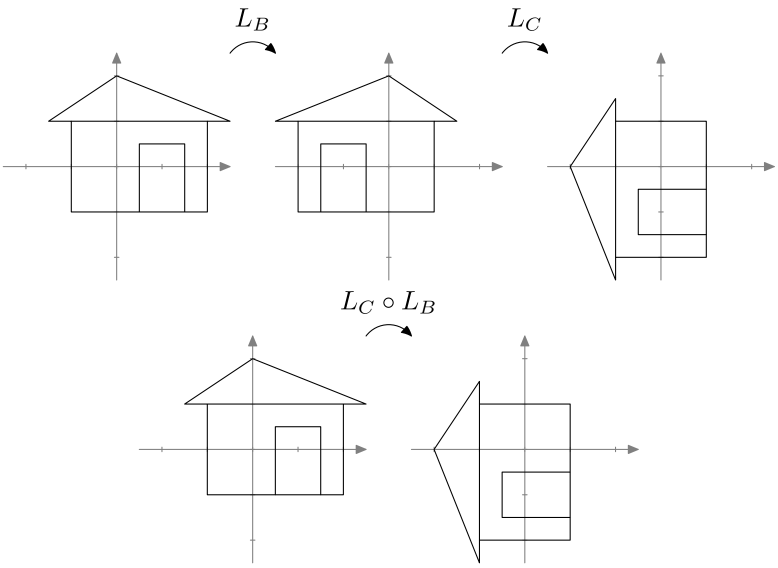
Esimerkki 18.13. Esimerkissä 18.9 esiteltiin peilaus $L_B\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L_B(x_1, x_2) = (-x_1, x_2)$ ja kierto $L_C\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L_C(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$. Koska kuvauksen L_B maalijoukko on sama kuin kuvauksen L_C lähtöjoukko, voidaan määritellä yhdistetty kuvaus $L_C \circ L_B$. Tämä kuvaus ensin peilaa vektorit x_2-akselin suhteen ja

[1] Yhdistetyistä kuvauksista voidaan puhua muidenkin kuvausten kuin lineaarikuvausten yhteydessä. Tällä kurssilla keskitytään kuitenkin lineaarikuvauksiin.

sen jälkeen kiertää niitä 90° vastapäivään (ks. kuva 18.9). Vektorin $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ kuvavektori on

$$(L_C \circ L_B)(x_1, x_2) = L_C(L_B(x_1, x_2)) = L_C(-x_1, x_2) = (-x_2, -x_1).$$

Saadaan siis kuvaus $L_C \circ L_B \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x_1, x_2) \mapsto (-x_2, -x_1)$.



Kuva 18.9: Kuvaukset L_B ja L_C voidaan yhdistää.

Lause 18.14. *Oletetaan, että $L \colon V \to U$ ja $T \colon U \to W$ ovat lineaarikuvauksia. Tällöin yhdistetty kuvaus $T \circ L \colon V \to W$ on lineaarinen.*

Todistus. Oletetaan, että $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2 \in V$ ja $a \in \mathbb{R}$. Tarkistetaan lineaarikuvauksen määritelmän ehdot:

a) Yhdistetyn kuvauksen määritelmän ja kuvausten L ja T lineaarisuuden avulla saadaan

$$\begin{aligned}(T \circ L)(\bar{v}_1 + \bar{v}_2) &= T(L(\bar{v}_1 + \bar{v}_2)) \\ &= T(L(\bar{v}_1) + L(\bar{v}_2)) \\ &= T(L(\bar{v}_1)) + T(L(\bar{v}_2)) \\ &= (T \circ L)(\bar{v}_1) + (T \circ L)(\bar{v}_2)\end{aligned}$$

b) Nähdään, että

$$(T \circ L)(a\bar{v}_1) = T(L(a\bar{v}_1)) = T(aL(\bar{v}_1)) = aT(L(\bar{v}_1))) = a(T \circ L)(\bar{v}_1). \quad \square$$

Jos kuvaukset ovat matriisien määräämiä lineaarikuvauksia, niiden yhdistäminen vastaa matriisien kertomista keskenään.

Lause 18.15. *Oletetaan, että A on $m \times n$-matriisi ja B on $p \times m$-matriisi. Tällöin*

$$L_B \circ L_A = L_{BA},$$

eli tulomatriisin BA määräämä kuvaus $L_{BA} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ on sama kuvaus kuin yhdistetty kuvaus $L_B \circ L_A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$.

Todistus. Oletetaan, että $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$. Tällöin matriisien laskusääntöjen mukaan

$$\begin{aligned} L_{BA}(\bar{v}) &= (BA)\bar{v} = B(A\bar{v}) = L_B(A\bar{v}) = L_B(L_A(\bar{v})) \\ &= (L_B \circ L_A)(\bar{v}). \end{aligned}$$

Siis $L_{BA} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ ja $L_B \circ L_A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ ovat sama kuvaus. □

Esimerkki 18.16. Esimerkissä 18.9 kuvaus L_B saatiin matriisista

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ja kuvaus L_C matriisista

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Näiden matriisien tulo on

$$CB = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tämä tulomatriisi määrittää kuvauksen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, jolle pätee $(x_1, x_2) \mapsto (-x_2, -x_1)$. Toisaalta esimerkissä 18.13 nähtiin, että yhdistetylle kuvaukselle $L_C \circ L_B$ pätee $(x_1, x_2) \mapsto (-x_2, -x_1)$. Kyseessä on siis sama kuvaus aivan kuten lauseen 18.15 perusteella pitääkin olla.

18.2 Aliavaruuden kuva lineaarikuvauksessa

Oletetaan, että $L \colon V \to U$ on lineaarikuvaus. Avaruuden V aliavaruuden W *kuva*[2] kuvauksessa L on joukko

$$LW = \{L(\bar{w}) \mid \bar{w} \in W\}.$$

Aliavaruuden kuva koostuu siis kaikista niistä maaliavaruuden vektoreista, joille kuvautuu jokin aliavaruuden W vektori.

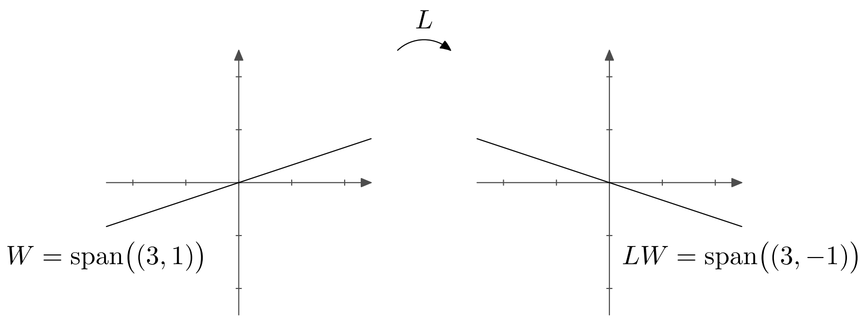
[2] Yleisesti kuvauksien yhteydessä voidaan puhua osajoukon kuvasta. Tällä kurssilla keskitytään kuitenkin lineaarikuvauksiin ja aliavaruuksien kuviin lineaarikuvauksissa.

Esimerkki 18.17. Tarkastellaan esimerkin 18.10 lineaarikuvausta $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$, joka peilaa jokaisen pisteen x_1-akselin suhteen.

Olkoon $W = \operatorname{span}\big((3,1)\big)$. Tällöin W on vektorin $(3,1)$ virittämä aliavaruus (eli vektorin $\bar{w}$ suuntainen origon kautta kulkeva suora). Aliavaruuden W kuva on

$$\begin{aligned}
LW &= \{L(\bar{w}) \mid \bar{w} \in W\} \\
&= \{L(\bar{w}) \mid \bar{w} \in \operatorname{span}\big((3,1)\big)\} \\
&= \{L(\bar{w}) \mid \bar{w} = t(3,1) \text{ jollakin } t \in \mathbb{R}\} \\
&= \{L(t(3,1)) \mid t \in \mathbb{R}\} \\
&= \{tL(3,1) \mid t \in \mathbb{R}\} \\
&= \{t(3,-1) \mid t \in \mathbb{R}\} \\
&= \operatorname{span}\big((3,-1)\big).
\end{aligned}$$

Nähdään, että aliavaruuden W kuva on myöskin aliavaruus.



Kuva 18.10: Aliavaruus W ja sen kuva LW.

Lineaarikuvauksessa aliavaruudet kuvautuvat aliavaruuksiksi.

Lause 18.18. *Oletetaan, että $L\colon V \to U$ on lineaarikuvaus. Jos W on avaruuden V aliavaruus, niin kuva*

$$LW = \{L(\bar{w}) \mid \bar{w} \in W\}$$

on avaruuden U aliavaruus.

Todistus. Lauseen todistus jätetään harjoitustehtäväksi. □

19 Ydin ja kuva

19.1 Lineaarikuvauksen ydin

Lineaarikuvauksen ydin koostuu kaikista niistä vektoreista, jotka kuvautuvat nollavektorille.

Määritelmä 19.1. Oletetaan, että $L\colon V \to U$ on lineaarikuvaus. Sen *ydin* on joukko

$$\operatorname{Ker} L = \{\bar{v} \in V \mid L(\bar{v}) = \bar{0}\}.$$

Huomaa, että ydin on aina joukko eikä jokin yksittäinen vektori. Monesti on olemassa useita vektoreita, jotka kuvautuvat nollavektorille. Ytimessä saattaa olla siis yksi alkio tai useampia alkioita. Lineaarikuvauksen ydin ei ole koskaan tyhjä joukko, sillä lauseen 18.12 mukaan nollavektori on aina kuvauksen ytimessä.

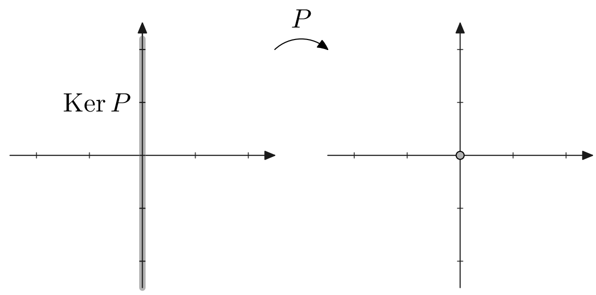
Merkitä Ker tulee englannin kielen sanasta "kernel", joka tarkoittaa ydintä.

Esimerkki 19.2. Tarkastellaan esimerkin 18.11 projektiokuvausta $P\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $P(x_1, x_2) = (x_1, 0)$. Esimerkiksi vektori $(0, \sqrt{5})$ on kuvauksen P ytimessä, sillä $P(0, \sqrt{5}) = (0, 0)$. Toisin sanoen $(0, \sqrt{5}) \in \operatorname{Ker} P$.

Määritetään sitten kaikki ytimen alkiot. Huomataan, että

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ker} P &= \{\bar{v} \in \mathbb{R}^2 \mid P(\bar{v}) = \bar{0}\} \\
&= \{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (v_1, 0) = (0, 0)\} \\
&= \{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \mid v_1 = 0\} \\
&= \{(0, v_2) \mid v_2 \in \mathbb{R}\} \\
&= \{v_2(0, 1) \mid v_2 \in \mathbb{R}\} \\
&= \operatorname{span}\big((0, 1)\big).
\end{aligned}$$

Lineaarikuvauksen P ydin on siis vektorin $\bar{e}_2 = (0, 1)$ virittämä aliavaruus eli origon kautta kulkeva, vektorin $\bar{e}_2$ suuntainen suora (ks. kuva 19.11).



Kuva 19.11: Lineaarikuvauksen P ytimen vektorit kuvautuvat nollavektoriksi.

Esimerkki 19.3. Määritetään esimerkin 18.4 lineaarikuvauksen $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $L(x_1, x_2, x_3) = (7x_2,\ x_1 - 3x_3)$ ydin. Vektori $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2$ on ytimessä, jos ja vain jos $(7x_2,\ x_1 - 3x_3) = (0, 0)$. Tästä saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 7x_2 = 0 \\ x_1 - 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Yhtälöryhmän ratkaisuksi saadaan Gaussin-Jordanin menetelmällä

$$\begin{cases} x_1 &= 3s \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= s, \qquad \text{missä } s \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Siten $\operatorname{Ker} L = \{(3s, 0, s) \mid s \in \mathbb{R}\}$.

Huomataan, että $\{(3s, 0, s) \mid s \in \mathbb{R}\} = \{s(3, 0, 1) \mid s \in \mathbb{R}\}$ eli ydin $\operatorname{Ker} L$ on vektorin $(3, 0, 1)$ virittämä aliavaruus $\operatorname{span}\big((3, 0, 1)\big)$.

Esimerkki 19.4. Määritetään esimerkin 18.6 lineaarikuvauksen

$$L \colon \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}_1, \quad L(a, b) = ax + b$$

ydin. Vektori $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ on ytimessä, jos ja vain jos $ax + b$ on nollapolynomi 0. Tämä pätee, jos ja vain jos $a = 0$ ja $b = 0$. Siten $\operatorname{Ker} L = \{(0, 0)\}$.

Tässäkin tapauksessa ydin on siis aliavaruus.

Lause 19.5. *Oletetaan, että $L \colon V \to U$ on lineaarikuvaus. Tällöin ydin* $\operatorname{Ker} L$ *on avaruuden V aliavaruus.*

Todistus. Ensinnäkin $\operatorname{Ker} L$ on määritelmänsä mukaan vektoriavaruuden V osajoukko.

Oletetaan, että $\bar{w}, \bar{u} \in \operatorname{Ker} L$ ja $c \in \mathbb{R}$. Nyt siis $L(\bar{w}) = \bar{0}$ ja $L(\bar{u}) = \bar{0}$. Nähdään, että

$$L(\bar{w} + \bar{u}) = L(\bar{w}) + L(\bar{u}) = \bar{0} + \bar{0} = \bar{0}.$$

Koska $L(\bar{w} + \bar{u}) = \bar{0}$ ja ytimeen kuuluvat kaikki nollavektorille kuvautuvat vektorit, pätee $\bar{w} + \bar{u} \in \operatorname{Ker} L$. Lisäksi

$$L(c\bar{w}) = cL(\bar{w}) = c\bar{0} = \bar{0},$$

ja näin ollen $c\bar{w} \in \operatorname{Ker} L$. Lopuksi vielä todetaan, että lauseen 18.12 perusteella $L(\bar{0}) = \bar{0}$, joten $\bar{0} \in \operatorname{Ker} L$.

Siten $\operatorname{Ker} L$ on avaruuden V aliavaruus. □

Lineaarikuvaus $L \colon V \to U$ on *injektiivinen*[3] tai *injektio*, jos eri vektoreilla on aina eri kuvat. Toisin sanoen kaikilla $\bar{v}, \bar{w} \in V$ ehdosta $L(\bar{v}) = L(\bar{w})$ seuraa $\bar{v} = \bar{w}$. Kullekin maalijoukon alkiolle kuvautuu siis korkeintaan yksi lähtöjoukon alkio.

Vaikkapa esimerkin 18.11 projektiokuvaus $P \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $P(x_1, x_2) = (x_1, 0)$ ei ole injektio, sillä $P(1, 1) = (1, 0)$ ja $P(1, 2) = (1, 0)$.

Lause 19.6. *Lineaarikuvaus $L \colon V \to U$ on injektio, jos ja vain jos* $\operatorname{Ker} L = \{\bar{0}\}$.

[3] Injektiivisyydestä voidaan puhua muidenkin kuvausten kuin lineaarikuvausten yhteydessä.

Todistus. "$\Rightarrow$": Oletetaan ensin, että L on injektio. Osoitetaan, että $\operatorname{Ker} L = \{\bar{0}\}$. Tiedetään, että $L(\bar{0}) = \bar{0}$, joten $\bar{0} \in \operatorname{Ker} L$. Injektiivisyyden nojalla mikään muu vektori ei voi kuvautua nollavektorille, joten ytimessä on vain yksi vektori, $\bar{0}$.

"$\Leftarrow$": Oletetaan sitten, että $\operatorname{Ker} L = \{\bar{0}\}$. Osoitetaan, että L on injektio. Oletetaan, että vektoreille $\bar{v}, \bar{w} \in V$ pätee $L(\bar{v}) = L(\bar{w})$. Lisäämällä yhtälön molemmille puolille vektori $-L(\bar{w})$, saadaan $L(\bar{v}) - L(\bar{w}) = \bar{0}$. Koska L on lineaarikuvaus, seuraa tästä, että $L(\bar{v} - \bar{w}) = \bar{0}$. Siis $\bar{v} - \bar{w}$ on ytimen alkio. Koska $\operatorname{Ker}(L) = \{\bar{0}\}$, täytyy päteä $\bar{v} - \bar{w} = \bar{0}$. Kun tämän yhtälön molemmille puolille lisätään vektori $\bar{w}$, saadaan $\bar{v} = \bar{w}$. On siis osoitettu, että L on injektio. □

Esimerkki 19.7. Esimerkissä 19.3 nähtiin, että lineaarikuvauksen $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $L(x_1, x_2, x_3) = (7x_2,\ x_1 - 3x_3)$ ydin on $\{(3s, 0, s) \mid s \in \mathbb{R}\}$. Koska ytimessä on muitakin vektoreita kuin nollavektori, ei kuvaus ole injektio.

Esimerkissä 19.4 puolestaan pääteltiin, että lineaarikuvauksen $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}_1$, $L(a, b) = ax + b$ ydin on $\{(0, 0)\}$. Koska ytimen ainoa vektori on nollavektori, on kuvaus injektio.

19.2 Lineaarikuvauksen kuva

Määritelmä 19.8. Oletetaan, että $L\colon V \to U$ on lineaarikuvaus. Sen *kuva* on joukko

$$\operatorname{Im} L = LV = \{L(\bar{v}) \mid \bar{v} \in V\}.$$

Lineaarikuvauksen kuva on erikoistapaus aiemmin määritellystä aliavaruuden kuvasta. Nyt aliavaruutena on koko vektoriavaruus V.

Merkintä Im tulee englannin kielen sanasta "image", joka tarkoittaa kuvaa. Huomaa, että kuva $\operatorname{Im} L$ on sama asia kuin kuvauksen arvojoukko. Lineaarikuvausten yhteydessä vain on tapana käyttää termiä kuva.

Esimerkki 19.9. Tarkastellaan jälleen esimerkin 18.11 kuvausta $P\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $P(x_1, x_2) \mapsto (x_1, 0)$, joka projisoi vektorit x_1-akselille. Lineaarikuvauksen P kuva on

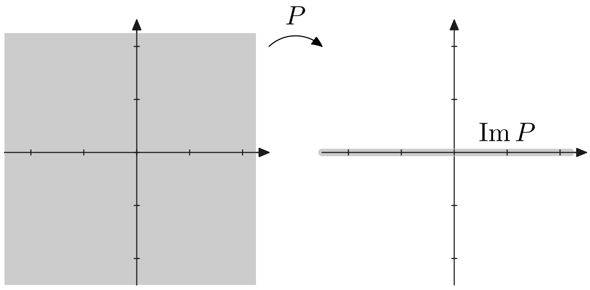
$$\begin{aligned}
\operatorname{Im} P &= \{L(\bar{v}) \mid \bar{v} \in \mathbb{R}^2\} \\
&= \{(v_1, 0) \mid (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2\} \\
&= \{(v_1, 0) \mid v_1 \in \mathbb{R}\} \\
&= \{v_1(1, 0) \mid v_1 \in \mathbb{R}\} \\
&= \operatorname{span}\big((1, 0)\big).
\end{aligned}$$

Lineaarikuvauksen P kuva on siis vektorin $\bar{e}_1 = (1, 0)$ virittämä aliavaruus eli origon kautta kulkeva, vektorin $\bar{e}_1$ suuntainen suora.

Esimerkki 19.10. Määritetään esimerkin 18.6 lineaarikuvauksen $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}_1$, $(a, b) \mapsto ax + b$ kuva. Nähdään, että

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im} L &= \{L(\bar{v}) \mid \bar{v} \in \mathbb{R}^2\} = \{v_1 x + v_2 \mid (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2\} \\
&= \{v_1 x + v_2 \mid v_1, v_2 \in \mathbb{R}\} = \mathcal{P}_1.
\end{aligned}$$

Siten kuva on koko avaruus $\mathcal{P}_1$.



Kuva 19.12: Lineaarikuvauksen P kuva on vektorin $\bar{e}_1$ virittämä aliavaruus.

Lause 19.11. *Oletetaan, että $L\colon V \to U$ on lineaarikuvaus. Tällöin kuva $\operatorname{Im} L$ on avaruuden U aliavaruus.*

Todistus. Vektoriavaruus V on itsensä aliavaruus. Nyt lauseen 18.18 nojalla kuva $LV = \operatorname{Im} L$ on avaruuden U aliavaruus. □

Lineaarikuvaus $f\colon V \to U$ on *surjektiivinen*[4] eli *surjektio*, jos jokaiselle avaruuden U alkiolle kuvautuu jokin V:n alkio. Nähdään, että lineaarikuvaus $L\colon V \to U$ on surjektio, jos ja vain jos $\operatorname{Im}(L) = U$.

Lineaarikuvausta $L\colon V \to U$ voidaan nyt luonnehtia sen ytimen ja kuvan avulla.

- Kuvaus L on injektio, jos ja vain jos $\operatorname{Ker} L = \{\bar{0}\}$.
- Kuvaus L on surjektio, jos ja vain jos $\operatorname{Im} L = U$.

[4]Surjektiivisuudesta voidaa puhua muidenkin kuvausten kuin lineaarikuvausten yhteydessä.