16 Vapaus

Kurssin ensimmäisessä osassa käsiteltiin avaruuden $\mathbb{R}^n$ vapaita vektorijonoja. Tämä käsite voidaan yleistää mihin tahansa vektoriavaruuteen.

Määritelmä 16.1. Vektoriavaruuden V vektoreista muodostuva jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ on *vapaa*, jos seuraava ehto pätee:

jos $c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 + \cdots + c_k\bar{v}_k = \bar{0}$ joillakin $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$,
niin $c_1 = 0, c_2 = 0, \ldots, c_k = 0$.

Jos jono ei ole vapaa, sanotaan, että se on *sidottu*. Vapaata jonoa voidaan kutsua myös *lineaarisesti riippumattomaksi* ja sidottua *lineaarisesti riippuvaksi.*

Tyhjä jono on jono, jossa on ei ole yhtään vektoria. Sovimme, että tyhjä jono on vapaa.

Esimerkki 16.2. Esimerkissä 15.12 määriteltiin avaruuden $\mathbb{R}^2$ matriisit E_{11}, E_{12}, E_{21} ja E_{22}. Osoitetaan, että jono $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ on vapaa. Oletetaan, että luvut $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$ ovat sellaisia, että

$$c_1E_{11} + c_2E_{12} + c_3E_{21} + c_4E_{22} = O.$$

(Tässä tapauksessa nollavektori on nollamatriisi O.) Yhtälön vasen puoli saadaan muotoon

$$\begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & c_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c_3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix}.$$

Nyt siis

$$\begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

mistä seuraa, että $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $c_3 = 0$ ja $c_4 = 0$. Siten jono $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ on vapaa.

Esimerkki 16.3. Osoitetaan, että vektoriavaruuden $\mathcal{P}_n$ jono $(1, x, x^2, \ldots, x^n)$ on vapaa. Oletetaan, että $c_0, c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ ovat sellaisia, että

$$c_0 1 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n = 0.$$

(Yhtälön oikealla puolella on avaruuden $\mathcal{P}_n$ nollavektori eli nollapolynomi.) Kaksi polynomia ovat samat, jos ja vain jos niiden kertoimet ovat samat. Täytyy siis päteä $c_0 = 0, c_1 = 0, \ldots, c_n = 0$. Siten jono $(1, x, x^2, \ldots, x^n)$ on vapaa.

Vapauden määritelmän mukaan jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ on sidottu, jos ja vain jos on olemassa sellaiset kertoimet $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$, että $c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 + \cdots + c_k\bar{v}_k = \bar{0}$ ja jokin kertoimista $c_1, \ldots, c_k$ ei ole nolla.

Toisinaan jono on helppo osoittaa sidotuksi keksimällä sopivat kertoimet. Esimerkiksi vektoriavaruuden V jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_1, \bar{v}_2)$ on sidottu, sillä

$$1\bar{v}_1 + (-1)\bar{v}_1 + 0\bar{v}_2 = \bar{0}.$$

Seuraavaksi osoitamme vapauteen liittyviä lauseita. Monet tuloksista olivat esillä jo luvussa 7 avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektoreille. Yleisessä tapauksessa todistukset ovat hyvin samanlaisia, joten niitä ei esitetä tässä.

Seuraava lause osoittaa, että vektorien vapaus takaa yksikäsitteisen esityksen.

Lause 16.4. *Oletetaan, että V on vektoriavaruus ja $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k \in V$. Jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ on vapaa, jos ja vain jos jokainen aliavaruuden* $\operatorname{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ *alkio voidaan kirjoittaa täsmälleen yhdellä tavalla vektorien $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k$ lineaarikombinaationa.*

Todistus. Todistus on samanlainen kuin lauseen 7.6 todistus. □

Vektorijono on sidottu, jos ja vain jos jokin sen vektoreista voidaan ilmaista toisten lineaarikombinaationa.

Lause 16.5. *Oletetaan, että V on vektoriavaruus, $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k \in V$ ja $n \geq 2$. Jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ on sidottu, jos ja vain jos vain jos*

$$\bar{v}_j \in \operatorname{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_{j-1}, \bar{v}_{k+1}, \ldots, \bar{v}_k)$$

jollakin $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

Todistus. Todistus on samanlainen kuin lauseen 7.7 todistus. □

Vapaasta jonosta voidaan tietyin ehdoin muodostaa vielä pidempi vapaa jono.

Lause 16.6. *Oletetaan, että vektoriavaruuden V jono $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$ on vapaa. Oletetaan lisäksi, että $\bar{w} \in V$. Tällöin jono $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k, \bar{w})$ on vapaa, jos ja vain jos*

$$\bar{w} \notin \operatorname{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k).$$

Todistus. "$\Rightarrow$" Oletetaan, että jono $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k, \bar{w})$ on vapaa. On osoitettava, että $\bar{w} \notin \operatorname{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$. Oletetaan vastoin väitettä, että $\bar{w} \in \operatorname{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$. Tällöin

$$\bar{w} = a_1\bar{v}_1 + \cdots + a_k\bar{v}_k$$

joillakin $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$. Nyt $a_1\bar{v}_1 + \cdots + a_k\bar{v}_k + (-1)\bar{w} = \bar{0}$, joten jono $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k, \bar{w})$ ei ole vapaa. Tämä on ristiriita. Siten $\bar{w} \notin \operatorname{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$.

"$\Leftarrow$" Oletetaan, että $\bar{w} \notin \operatorname{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$, ja osoitetaan, että jono $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k, \bar{w})$ on vapaa. Oletetaan, että

$$c_1\bar{v}_1 + \cdots + c_k\bar{v}_k + c_{k+1}\bar{w} = \bar{0}$$

joillakin $c_1, \ldots, c_{k+1} \in \mathbb{R}$. Jos $c_{k+1} \neq 0$, niin

$$\bar{w} = \frac{c_1}{c_{k+1}}\bar{v}_1 + \cdots + \frac{c_k}{c_{k+1}}\bar{v}_k.$$

Nyt siis $\bar{w} \in \operatorname{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$. Tämä on kuitenkin vastoin oletusta, joten täytyy päteä $c_{k+1} = 0$. Tällöin

$$c_1\bar{v}_1 + \cdots + c_k\bar{v}_k = \bar{0}.$$

Koska jono $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$ on vapaa, tiedetään, että $c_1 = 0, \ldots, c_k = 0$. Koska myös kerroin c_{k+1} on nolla, on jono $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k, \bar{w})$ vapaa. □

Vapaan jonon jokainen osajono on vapaa.

Lause 16.7. *Oletetaan, että vektoriavaruuden V jono jono $\mathcal{S} = (\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k)$ on vapaa. Tällöin jokainen jonon $\mathcal{S}$ osajono on myöskin vapaa.*

Todistus. Osajono tarkoittaa jonoa, joka saadaan poistamalla alkuperäisestä jonosta vektoreita. Myös jono itse on yksi osajonoista.

Oletetaan, että vektorijono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k)$ on vapaa. Osoitetaan, että mikä tahansa sen osajono on vapaa. Jos osajono on tyhjä jono, se on sopimuksemme mukaan vapaa. Tutkitaan sitten epätyhjiä jonoja. Koska vapautta tutkittaessa vektoreiden järjestyksellä ei ole väliä, riittää osoittaa, että jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_m)$ on vapaa kaikilla $m \in \{1, \dots, k\}$.

Oletetaan siis, että $m \in \{1, \dots, k\}$. Olkoot luvut $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$ sellaisia, että

$$c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 + \cdots + c_m\bar{v}_m = \bar{0}.$$

Tästä seuraa, että

$$c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 + \cdots + c_m\bar{v}_m + 0\bar{v}_{m+1} + \cdots + 0\bar{v}_k = \bar{0}.$$

Koska jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k)$ on vapaa, täytyy yllä olevassa lineaarikombinaatiossa kaikkien kertoimien olla nollia. Siis $c_1 = 0, \dots, c_m = 0$. Siten jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_m)$ on vapaa. □

Vapauden määritelmässä käsitellään vain äärellisiä vektorijonoja. Määritelmää voidaan kuitenkin laajentaa koskemaan myös äärettömän monen vektorin muodostamia jonoja samalla tavalla kuin virittämisen tapauksessa. Vektoriavaruuden V jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots)$ on vapaa, jos sen kaikki äärelliset osajonot ovat vapaita. Esimerkiksi polynomiavaruuden $\mathcal{P}$ jono $(1, x, x^2, \dots)$ on vapaa.

17 Kanta

Määritelmä 17.1. Oletetaan, että $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_k \in V$. Jono $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_k)$ on vektoriavaruuden V kanta, jos

a) $V = \operatorname{span}(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_k)$

b) $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_k)$ on vapaa.

Esimerkki 17.2. Esimerkeissä 15.12 ja 16.2 osoitettiin, että matriisiavaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ jono $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ virittää avaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ ja on lisäksi vapaa. Siten jono $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ on avaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ kanta.

Esimerkki 17.3. Polynomiavaruuden $\mathcal{P}_n$ jono $(1, x, x^2, \dots, x^n)$ virittää avaruuden $\mathcal{P}_n$ ja on lisäksi vapaa esimerkkien 15.13 ja 16.3 perusteella. Jono $(1, x, x^2, \dots, x^n)$ on siis avaruuden $\mathcal{P}_n$ kanta.

Vektoriavaruuden vektorit voidaan kirjoittaa täsmälleen yhdellä tavalla kannan vektoreiden lineaarikombinaatioina.

Lause 17.4. *Jono $\mathcal{B} = (\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k)$ on vektoriavaruuden V kanta, jos ja vain jos jokainen vektorivaruuden V alkio voidaan kirjoittaa täsmälleen yhdellä tavalla vektorien $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k$ lineaarikombinaationa.*

Todistus. Väite seuraa lähes suoraan lauseesta 16.4 samalla tavalla kuin vastaava avaruutta $\mathbb{R}^n$ koskeva lause 8.3. □

Määritelmä 17.5. Olkoon $\mathcal{B} = (\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n)$ on vektoriavaruuden V kanta. Oletetaan, että $\bar{u} \in V$. Vektorin $\bar{u}$ *koordinaateiksi kannan $\mathcal{B}$ suhteen* kutsutaan reaalilukuja $a_1, \dots, a_n$, joilla

$$\bar{u} = a_1\bar{v}_1 + \cdots + a_n\bar{v}_n.$$

Esimerkki 17.6. Määritetään avaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

koordinaatit kannan $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ suhteen. Huomataan, että

$$A = 1E_{11} + 2E_{12} + (-1)E_{21} + 0E_{22},$$

joten kooridinaatit ovat 1, 2, -1 ja 0.

Polynomiavaruuden $\mathcal{P}_3$ alkion $x^3 - 4x + 2$ koordinaatit kannan $(1, x, x^2, x^3)$ suhteen taas ovat 2, -4, 0 ja 1.

Lause 17.7. *Oletetaan, että V on vektoriavaruus, jolla on kanta $(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n)$. Jos vektoriavaruuden V vektorijonon pituus on suurempi kuin n, kyseinen jono ei voi olla vapaa.*

Todistus. Väite on aikaisemmin todistettu avaruudelle $\mathbb{R}^n$. (Ks. korollaari 7.11.) Yleisessä tapauksessa todistus on samanlainen. □

Aiemmin mainittiin, että voidaan puhua myös äärettömän monen vektorin virittämistä aliavaruuksista sekä äärettömän monen vektorin muodostamista vapaista jonoista. Siksi myös kannan määritelmä voidaan yleistää koskemaan äärettömiä jonoja. Esimerkiksi jono $(1, x, x^2, \dots)$ on polynomiavaruuden $\mathcal{P}$ kanta.

17.1 Dimensio

Vektoriavaruudella voi olla useita eri kantoja. Saman avaruuden eri kannoissa on kuitenkin aina yhtä monta vektoria.

Lause 17.8. *Vektoriavaruuden jokaisessa kannassa on yhtä monta vektoria.*

Todistus. Oletetaan vastoin väitettä, että vektoriavaruudella V on kaksi eripituista kantaa $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$ ja $(\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_m)$, missä $k > m$. Koska jono $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$ on kanta, se on vapaa. Nyt päädytään ristiriitaan, sillä lauseen 17.7 nojalla vektoriavaruudessa ei voi olla vapaata jonoa, joka on pitempi kuin jokin vektoriavaruuden kanta. Siten väite on todistettu. □

Edellisen lauseen perusteella voidaan määritellä vektoriavaruuden dimensio.

Määritelmä 17.9. Vektoriavaruus V on *äärellisulotteinen*, jos sillä on äärellisen monesta vektorista koostuva kanta. Tällöin avaruuden *dimensio* $\dim(V)$ on kannan vektoreiden lukumäärä. Jos vektoriavaruudella ei ole äärellistä kantaa, avaruus on *äärettömulotteinen* ja sen dimensio on ääretön.

Jos vektoriavaruuden dimensio on n, on tapana sanoa, että vektoriavaruus on *n-ulotteinen.*

Esimerkki 17.10. Matriisiavaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ dimensio on neljä, sillä avaruudella on kanta $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$. Polynomiavaruuden $\mathcal{P}_n$ dimensio on $n+1$, sillä avaruudella on kanta $(1, x, x^2, \ldots, x^n)$.

Esimerkki 17.11. Vektoriavaruuden $\{\bar{0}\}$ dimensio on nolla, sillä sen kanta on tyhjä jono, jossa on nolla vektoria. Olemme nimittäin sopineet, että tyhjän jonon virittämä avaruus on $\{\bar{0}\}$ ja että tyhjä jono on vapaa.

Vapaa jono voidaan jatkaa vektoriavaruuden kannaksi.

Lause 17.12. *Oletetaan, että V äärellisulotteinen vektoriavaruus. Oletetaan lisäksi, että $\mathcal{S} = (\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k)$ on avaruuden V vapaa jono. Tällöin jonoon $\mathcal{S}$ voidaan lisätä vektoreita niin, että tuloksena on avaruuden V kanta.*

Todistus. Tarkastellaan kaikkia sellaisia avaruuden V jonoja $(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_m)$, joilla jono $(\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k, \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_m)$ on vapaa. Valitaan näistä jonoista jokin sellainen, jonka pituus on mahdollisimman suuri. (Tällainen on olemassa, sillä lauseen 17.7 nojalla minkään vapaan jonon pituus ei voi olla suurempi kuin avaruuden V ulottuvuus.) Olkoon tuo mahdollisimman pitkä jono $\mathcal{B} = (\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k, \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_r)$.

Osoitetaan, että jono $\mathcal{B}$ on avaruuden V kanta. Koska $\mathcal{B}$ on vapaa, riittää osoittaa, että $\mathcal{B}$ virittää avaruuden V. Oletetaan sitä varten, että $\bar{v} \in V$. Jos $\bar{v} \notin \operatorname{span}(\mathcal{B})$, niin lauseen 16.6 nojalla jono $(\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k, \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_r, \bar{v})$ on vapaa. Tämä on ristiriita, sillä näin saatu jono on pidempi kuin $\mathcal{B}$, jonka pituus oli suurin mahdollinen. Siten $\bar{v} \in \operatorname{span}(\mathcal{B})$, mistä seuraa, että $V = \operatorname{span}(\mathcal{B})$. Näin on osoitettu, että $\mathcal{B} = (\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k, \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_r)$ on avaruuden V kanta. □

Virittäjäjono voidaan lyhentää vektoriavaruuden kannaksi.

Lause 17.13. *Oletetaan, että jono $\mathcal{S} = (\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k)$ virittää avaruuden V. Tällöin jonosta $\mathcal{S}$ voidaan poistaa vektoreita niin, että tuloksena on avaruuden V kanta.*

Todistus. Todistus on hyvin samankaltainen kuin edellisen lauseen todistus. Tarkastellaan kaikkia sellaisia jonon $(\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_k)$ osajonoja, jotka ovat vapaita. (Tällaisia jonoja on olemassa, sillä esimerkiksi tyhjä jono on vapaa.) Valitaan näistä jonoista jokin sellainen, jonka pituus on mahdollisimman suuri. Olkoon tuo mahdollisimman pitkä vapaa osajono $\mathcal{B} = (\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_r)$.

Osoitetaan, että $\mathcal{B}$ on avaruuden V kanta. Koska $\mathcal{B}$ on vapaa, riittää osoittaa, että $\mathcal{B}$ virittää avaruuden V. Tämä puolestaan on todistettu, jos voidaan osoittaa, että $\bar{w} \in \text{span}(\mathcal{B})$ kaikilla $\bar{w} \in \mathcal{S}$. Oletetaan vastoin väitettä, että $\bar{w} \notin \text{span}(\mathcal{B})$ jollakin $\bar{w} \in \mathcal{S}$. Nyt lauseen 16.6 nojalla jono $(\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_r, \bar{w})$ on vapaa. Tämä on ristiriita, sillä näin saatu osajono on pidempi kuin $\mathcal{B}$, jonka pituus oli suurin mahdollinen. Siten $\bar{w} \in \text{span}(\mathcal{B})$, mistä seuraa, että $V = \text{span}(\mathcal{B})$. Näin on osoitettu, että $\mathcal{B} = (\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_r)$ on avaruuden V kanta. □

Lause 17.14. *Oletetaan, että V on vektoriavaruus, jonka dimensio on n.*

a) Jokainen vektoriavaruuden V vapaa jono, jonka pituus on n, on V:n kanta.

b) Jokainen vektoriavaruuden V virittäjäjono, jonka pituus on n, on V:n kanta.

Todistus. a) Oletetaan, että avaruuden V jono $(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n)$ on vapaa. Nyt lauseen 17.12 nojalla jonoon voidaan lisätä vektoreita niin, että saadaan aikaan kanta. Kuitenkin vektoriavaruuden V dimensio on n, joten kannassa on oltava n vektoria. Jonon $(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n)$ täytyy siis jo olla kanta.

b) Oletetaan, että jono $(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n)$ virittää avaruuden V. Nyt lauseen 17.13 nojalla jonosta voidaan ottaa pois vektoreita niin, että saadaan aikaan kanta. Kuitenkin vektoriavaruuden kannassa on oltava n vektoria. Jonon $(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n)$ täytyy siis jo olla kanta. □

Edellä osoitetuista lauseista on hyötyä, kun tutkitaan, onko annettu jono vektoriavaruuden kanta. Kootaan vielä kaikki tiedot yhteen. Oletetaan, että V on vektoriavaruus, jonka dimensio on n.

- Jos vektoriavaruuden V vektorijonon pituus on suurempi kuin n, kyseinen jono ei voi olla vapaa.
- Jos vektoriavaruuden V vektorijonon pituus on pienempi kuin n, kyseinen jono ei voi virittää avaruutta V.
- Jos vektoriavaruuden V vektorijono virittää avaruuden ja sen pituus on n, kyseinen jono on kanta.
- Jos vektoriavaruuden V vektorijono on vapaa ja sen pituus on n, kyseinen jono on kanta.

Aliavaruuden dimensio ei voi olla suurempi kuin itse vektoriavaruuden dimensio.

Lause 17.15. *Oletetaan, että V on äärellisulotteinen vektoriavaruus, jolla on aliavaruus W. Tällöin myös W on äärellisulotteinen ja* $\dim(W) \leq \dim(V)$. *Lisäksi* $\dim(W) = \dim(V)$, *jos ja vain jos $W = V$.*

Todistus. Osoitetaan ensin, että aliavaruudella W on kanta. Tarkastellaan kaikkia aliavaruuden W vapaita jonoja. Koska ne ovat myös vektoriavaruuden V vapaita jonoja, niiden pituus on lauseen 17.7 nojalla pienempi kuin $\dim(V)$. Valitaan jono, jonka pituus on suurin mahdollinen. Samaan tapaan kuin lauseen 17.12 todistuksessa voidaan osoittaa, että näin valittu jono on aliavaruuden W kanta. Kanta on siis olemassa. Tästä nähdään myös, että aliavaruudella W on äärellinen kanta ja tuon kannan pituus on väistämättä lyhyempi kuin $\dim(V)$. Siten W on äärellisulotteinen, ja $\dim(W) \leq \dim(V)$.

Osoitetaan vielä väitteen toinen osa. Jos $V = W$, niin $\dim(W) = \dim(V)$. Oletetaan sitten, että $\dim(W) = \dim(V)$, ja osoitetaan, että $W = V$. Olkoon $\mathcal{B}$ aliavaruuden W kanta. Nyt $\mathcal{B}$ on avaruuden V vapaa jono, jonka pituus on sama kuin avaruuden V dimensio. Lauseen 17.14 perusteella $\mathcal{B}$ on avaruuden V kanta. Tästä seuraa, että $V = \operatorname{span}(\mathcal{B}) = W$.

□