Luku 2

Vektoriavaruudet

14 Vektoriavaruus

Kurssin ensimmäisessä osassa käsiteltiin avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektoreita. Nyt määrittelemme abstraktimmat avaruuden ja vektorin käsitteet, jotka ovat avaruuden $\mathbb{R}^n$ ja sen vektoreiden yleistyksiä. Lähtökohtana ovat lauseessa 2.5 esitetyt vektorien laskusäännöt. Tulemme yleistämään myös muita avaruuteen $\mathbb{R}^n$ liittyvia käsitteitä.

Määritelmä 14.1. Oletetaan, että joukossa V on määritelty yhteenlasku ja skalaarikertolasku jollakin tavalla. Jos alla listatut ehdot pätevät kaikilla $\bar{v}, \bar{w}, \bar{u} \in V$ ja $a, b \in \mathbb{R}$, niin joukkoa V kutsutaan *vektoriavaruudeksi* ja sen alkioita *vektoreiksi*.

1) $\bar{v} + \bar{w} = \bar{w} + \bar{v}$ kaikilla $\bar{v}, \bar{w} \in V$.
2) $(\bar{v} + \bar{w}) + \bar{u} = \bar{v} + (\bar{w} + \bar{u})$ kaikilla $\bar{v}, \bar{w}, \bar{u} \in V$.
3) On olemassa niin kutsuttu *nollavektori* $\bar{0}$, jolle pätee $\bar{v} + \bar{0} = \bar{v}$ kaikilla $\bar{v} \in V$.
4) Jokaisella vektorilla $\bar{v} \in V$ on niin kutsuttu *vastavektori* $-\bar{v}$, jolle pätee $\bar{v} + (-\bar{v}) = \bar{0}$.
5) $a(\bar{v} + \bar{w}) = a\bar{v} + a\bar{w}$ kaikilla $\bar{v}, \bar{w} \in V$ ja $a \in \mathbb{R}$.
6) $(a + b)\bar{v} = a\bar{v} + b\bar{v}$ kaikilla $\bar{v} \in V$ ja $a, b \in \mathbb{R}$.
7) $(ab)\bar{v} = a(b\bar{v})$ kaikilla $\bar{v} \in V$ ja $a, b \in \mathbb{R}$.
8) $1\bar{v} = \bar{v}$ kaikilla $\bar{v} \in V$.

Vektoriavaruuden määritelmässä vaaditaan, että yhteenlasku ja skalaarikertolasku on määritelty joukossa V: jos $\bar{v}$, $\bar{w} \in V$ ja $a \in \mathbb{R}$, niin täytyy pätea $\bar{v} + \bar{w} \in V$ ja $a\bar{v} \in V$.

Skalaari tarkoittaa tällä kurssilla reaalilukua, sillä käsittelemme reaalikertoimisia vektoriavaruuksia. Kompleksikertoimisilla vektoriavaruuksilla skalaarit ovat kompleksilukuja. Periaatteessa skalaarit voivat olla minkä tahansa *kunnan* alkioita. (Kunnista kerrotaan lisää kurssilla Algebra I.)

Tarpeen tullen vektoriavaruuden V nollavektoria voidaan merkitä $\bar{0}_V$. Tällöin ei tule sekaannusta siitä, minkä vektoriavaruuden nollavektorista on kyse.

Esimerkki 14.2. Kaikki vektoriavaruuden määritelmän ehdot pätevät lauseen 2.5 perusteella avaruuden $\mathbb{R}^n$ yhteenlaskulle ja skalaarikertolaskulle. Siten $\mathbb{R}^n$ on vektoriavaruus. Vektoriavaruuden käsite siis tosiaan yleistää avaruutta R^n.

Myös reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$ on vektoriavaruus, kun yhteenlaskuna on reaalilukujen yhteenlasku ja skalaarikertolaskuna reaalilukujen kertolasku.

Esimerkki 14.3. Kokonaislukujen joukko $\mathbb{Z}$ varustettuna tavallisella yhteenlaskulla ja skalaarikertolaskulla (reaaliluvulla kertominen) ei ole vektoriavaruus. Tämä johtuu siitä, että esimerkiksi $0{,}5 \in \mathbb{R}$ ja $3 \in \mathbb{Z}$, mutta $0{,}5 \cdot 3 = 1{,}5 \notin \mathbb{Z}$. Skalaarikertolaskun tulos ei siis välttämättä ole joukossa $\mathbb{Z}$.

Vektoriavaruuden määritelmä ei kerro, mitä otuksia vektoriavaruuden alkiot ovat. Se ei myöskään sano, miltä yhteenlasku ja skalaarikertolasku näyttävät. Ne saattavat olla tuttuja laskutoimituksia mutta myös jotain aivan muuta.

Esimerkki 14.4. Vektoriavaruuden alkiot voivat olla vaikkapa matriiseja. Matriiseja voidaan nimittäin laskea yhteen ja niitä voidaan kertoa reaaliluvuilla. Lisäksi seuraavat säännöt pätevät $m \times n$-matriiseille A, B ja C sekä reaaliluvuille a ja b:

1) $A + B = B + A$
2) $A + (B + C) = (A + B) + C$
3) $A + O = A$
4) $A + (-A) = O$
5) $a(A + B) = aA + aB$
6) $(a + b)A = aA + bA$
7) $(ab)A = a(bA)$
8) $1A = A$.

(Osa näistä ehdoista on todettu lauseessa 9.3 ja loppujen todistaminen on suoraviivaista.) Kaikkien $m \times n$-matriisien joukko $\mathbb{R}^{m\times n}$ on siis vektoriavaruus. Nollavektori on nollamatriisi O, ja matriisin vastavektori saadaan muuttamalla kaikkien matriisin alkioiden merkki.

Esimerkki 14.5. Vektoriavaruuden alkiot voivat olla myös kuvauksia. Olkoon $\mathcal{F}$ kaikkien kuvausten $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ joukko. Jos $f \in \mathcal{F}$, $g \in \mathcal{F}$ ja $a \in \mathbb{R}$, niin kuvaukset $f + g$ ja af määritellään seuraavasti:

$$\begin{aligned} f + g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, &\quad x \mapsto f(x) + g(x) \quad \text{ja} \\ af\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, &\quad x \mapsto af(x). \end{aligned}$$

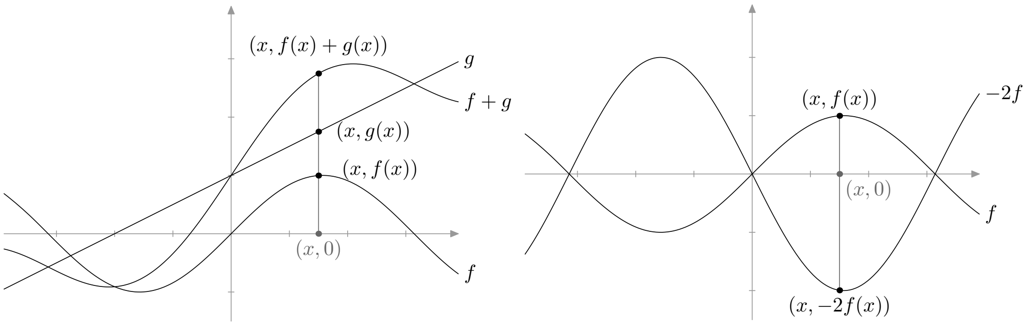
Sanotaan, että funktioiden laskutoimitukset on tällöin määritelty *pisteittäin*.

Tarkastellaan esimerkiksi funktioita

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin x \quad \text{ja} \quad g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = 0{,}5x + 1.$$

Nyt funktiot $f + g$ ja $(-2)f$ näyttävät seuraavilta:

$$f + g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin x + 0{,}5x + 1 \quad \text{ja} \quad (-2)f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto -2\sin x.$$



Kuva 14.1: Funktiot f ja g sekä niiden summa $f+g$ ja skalaarimonikerta $(-2)f$.

Joukko $\mathcal{F}$, jossa yhteenlasku ja skalaarikertolasku määritellään pisteittäin, on vektoriavaruus. Tämä osoitetaan käymällä läpi vektoriavaruuden määritelmän ehdot. Seuraavassa osoitetaan osa ehdoista. Loppujen ehtojen tarkistaminen jätetään harjoitustehtäväksi.

1) Oletetaan, että $f, g \in \mathcal{F}$, ja osoitetaan, että $f+g = g+f$. Olkoon $x \in \mathbb{R}$. Kuvausten yhteenlaskun määritelmän mukaan

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x)+g(x) \quad \text{ja} \\ (g+f)(x) &= g(x)+f(x).\end{aligned}$$

Kuvausten f ja g arvot $f(x)$ ja $g(x)$ ovat reaalilukuja, joten $f(x)+g(x) = g(x)+f(x)$. Näin ollen

$$(f+g)(x) = (g+f)(x).$$

Kuvauksilla $f+g$ ja $g+f$ on siis samat arvot, joten ne ovat sama kuvaus. Toisin sanoen

$$f+g = g+f.$$

3) Osoitetaan, että nollavektoriksi kelpaa kuvaus $f_0 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joka määritellään kaavalla $f_0(x) = 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Oletetaan, että $g \in \mathcal{F}$, ja osoitetaan, että $g + f_0 = g$. Olkoon $x \in \mathbb{R}$. Kuvausten yhteenlaskun määritelmän mukaan

$$(g+f_0)(x) = g(x) + f_0(x) = g(x) + 0 = g(x)\,.$$

Kuvauksilla $g + f_0$ ja g on siis samat arvot, joten

$$g + f_0 = g.$$

4) Osoitetaan, että kuvauksen $g \in \mathcal{F}$ vastavektoriksi kelpaa kuvaus $g' \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joka määritellään kaavalla $x \mapsto -g(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Osoitetaan siis, että $g + g' = f_0$. Olkoon $x \in \mathbb{R}$. Kuvausten yhteenlaskun määritelmän mukaan

$$\begin{aligned}(g + g')(x) &= g(x) + g'(x) \\ &= g(x) + (-g(x)) = 0 = f_0(x).\end{aligned}$$

Kuvauksilla $g + g'$ ja f_0 on siis samat arvot, joten

$$g + g' = f_0.$$

6) Oletetaan, että $f \in \mathcal{F}$ ja $a,\ b \in \mathbb{R}$, ja osoitetaan, että $(a + b)f = af + bf$. Olkoon $x \in \mathbb{R}$. Kuvausten skalaarikertolaskun ja yhteenlaskun määritelmien mukaan

$$\begin{aligned}\big((a + b)f\big)(x) &= (a + b)f(x) \quad \text{ja} \\ (af + bf)(x) &= (af)(x) + (bf)(x) = af(x) + bf(x).\end{aligned}$$

Kuvauksen f arvo $f(x)$ on reaaliluku, joten $(a + b)f(x) = af(x) + bf(x)$. Näin ollen

$$\big((a + b)f\big)(x) = (af + bf)(x).$$

Kuvauksilla $(a + b)f$ ja $af + bf$ on siis samat arvot, joten

$$(a + b)f = af + bf.$$

Esimerkki 14.6. Myös polynomit muodostavat vektoriavaruuksia. Reaalikertoiminen *polynomi* on muotoa

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

oleva summa, missä $n \in \mathbb{N}$ ja $a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$. Lukuja $a_n, \ldots, a_0$ kutsutaan polynomin *kertoimiksi* ja symbolia x polynomin *tuntemattomaksi*. Summattavat $a_i x^i$ ovat polynomin *termejä*.

Polynomeille voidaan määritellä yhteenlasku, jossa toisiaan vastaavien termien kertoimet lasketaan yhteen. Esimerkiksi polynomien

$$p = 3x^2 - 4x + 10 \qquad \text{ja} \qquad q = -2x^5 - x^3 + 5x^2 + 4x$$

summa on polynomi $p + q = -2x^5 - x^3 + 8x^2 + 10$. Skalaarikertolaskussa puolestaan kukin polynomin kerroin kerrotaan reaaliluvulla. Esimerkiksi polynomi $(-3)p$ saadaan kertomalla kaikki polynomin p kertoimet luvulla -3:

$$(-3)p = -9x^2 + 12x - 30.$$

Voidaan osoittaa, että reaalikertoimisten polynomien joukko muodostaa vektoriavaruuden. Tätä vektoriavaruutta merkitään symbolilla $\mathcal{P}$.

Esimerkki 14.7. Määritellään joukossa $\mathbb{R}^2$ skalaarikertolasku $*$ seuraavasti: jos $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ ja $a \in \mathbb{R}$, niin

$$a * (v_1, v_2) = (av_1, 0)\,.$$

Osoitetaan, että joukko $\mathbb{R}^2$ varustettuna tavallisella yhteenlaskulla $+$ ja skalaarikertolaskulla $*$ ei ole vektoriavaruus.

Havaitaan, että esimerkiksi

$$1 * (5, 9) = (5, 0).$$

Näin ollen

$$1 * (5, 9) \neq (5, 9),$$

joten vektoriavaruuden määritelmän ehto (8) ei täyty.

Esimerkki 14.8. Määritellään positiivisten reaalilukujen joukossa

$$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$

yhteenlasku $\oplus$ ja skalaarikertolasku $\odot$ seuraavasti: jos x, $y \in \mathbb{R}_+$ ja $c \in \mathbb{R}$, niin

$$x \oplus y = x \cdot y \quad \text{ja} \quad c \odot x = x^c.$$

Voidaan osoittaa, että tällöin $\mathbb{R}_+$ on vektoriavaruus. Tätä vektoriavaruutta tutkitaan lisää harjoitustehtävissä.

Lause 14.9. *Oletetaan, että V on vektoriavaruus. Tällöin*

a) nollavektoreita on täsmälleen yksi

b) jokaisella vektorilla $\bar{v} \in V$ on täsmälleen yksi vastavektori.

Todistus. a) Oletetaan, että vektoriavaruudessa V on kaksi nollavektoria, $\bar{0}$ ja $\bar{0}'$. Nyt siis pätee $\bar{v} + \bar{0} = \bar{v}$ ja $\bar{v} + \bar{0}' = \bar{v}$ kaikilla $\bar{v} \in V$. Tarkastellaan nyt vektoria $\bar{a} = \bar{0} + \bar{0}'$. Ensinnäkin pätee $\bar{a} = \bar{0}' + \bar{0} = \bar{0}'$, sillä $\bar{0}$ on nollavektori. Toisaalta pätee myös $\bar{a} = \bar{0} + \bar{0}' = \bar{0}$, sillä $\bar{0}'$ on nollavektori. Näin on osoitettu, että $\bar{0} = \bar{0}'$.

b) Oletetaan, että $\bar{v} \in V$. Oletetaan lisäksi, että $\bar{u}$ ja $\bar{w}$ ovat kumpikin vektorin $\bar{v}$ vastavektoreita eli $\bar{v} + \bar{u} = \bar{0}$ ja $\bar{v} + \bar{w} = \bar{0}$. Tällöin

$$\bar{u} = \bar{u} + \bar{0} = \bar{u} + (\bar{v} + \bar{w}) = (\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w} = (\bar{v} + \bar{u}) + \bar{w} = \bar{0} + \bar{w} = \bar{w}. \qquad \square$$

Lause 14.10. *Oletetaan, että V on vektoriavaruus ja $\bar{v} \in V$, $a \in \mathbb{R}$. Tällöin*

a) $0\bar{v} = \bar{0}$

b) $a\bar{0} = \bar{0}$

c) $(-1)\bar{v} = -\bar{v}$

d) jos $a\bar{v} = \bar{0}$, niin $a = 0$ tai $\bar{v} = \bar{0}$ (tulon nollasääntö).

Todistus. Osoitetaan kohdat b) ja d) ja jätetään loput kohdat harjoitustehtäviksi.

b) Nähdään, että
$$a\bar{0} = a(\bar{0} + \bar{0}) = a\bar{0} + a\bar{0}.$$
Lisäämällä tämän yhtälön molemmille puolille vektori $-(a\bar{0})$ saadaan
$$\bar{0} = a\bar{0}.$$

d) Oletetaan, että $a\bar{v} = \bar{0}$. On osoitettava, että tästä seuraa $a = 0$ tai $\bar{v} = \bar{0}$. Tutkitaan kahta tapausta. Oletetaan ensin, että $a \neq 0$. Tällöin on olemassa käänteisluku $1/a$, ja voimme kertoa yhtälön $a\bar{v} = \bar{0}$ molemmat puolet tällä käänteisluvulla. Näin saadaan yhtälö $(1/a)(a\bar{v}) = (1/a)\bar{0}$. Tämän yhtälön vasen puoli on
$$\frac{1}{a}(a\bar{v}) = \left(\frac{1}{a}a\right)\bar{v} = 1\bar{v} = \bar{v}.$$
Oikea puoli on puolestaan kohdan a) perusteella $(1/a)\bar{0} = \bar{0}$. Näin ollen $\bar{v} = \bar{0}$, joten väite pätee silloin, kun $a \neq 0$. Jos taas $a = 0$, on selvää, että väite pätee. □

Edellinen lause osoittaa, että avaruudesta $\mathbb{R}^n$ tutut laskusäännöt pätevät myös yleisemmissä vektoriavaruuksissa. Myös erotuksen ja lineaarikombinaation käsitteet voidaan määritellä tutulla tavalla.

Määritelmä 14.11. Oletetaan, että V on vektoriavaruus ja $\bar{v}, \bar{w} \in V$. Vektoreiden $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ *erotus* $\bar{v} - \bar{w}$ tarkoittaa summaa $\bar{v} + (-\bar{w})$.

Määritelmä 14.12. Oletetaan, että V on vektoriavaruus ja $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k \in V$. Vektoreiden $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k$ *lineaarikombinaatio* on vektori
$$a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \cdots + a_k\bar{v}_k,$$
missä $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$.

15 Aliavaruus

Kurssin ensimmäisessä osassa määrittelimme avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektorien virittämän aliavaruuden. Nyt esittelemme yleisemmän aliavaruuden käsitteen.

Määritelmä 15.1. Olkoon V vektoriavaruus. Sen osajoukko W on vektoriavaruuden V *aliavaruus*, jos seuraavat ehdot pätevät:

a) $\bar{w} + \bar{u} \in W$ kaikilla $\bar{w}, \bar{u} \in W$

b) $r\bar{w} \in W$ kaikilla $r \in \mathbb{R}$ ja $\bar{w} \in W$

c) $\bar{0} \in W$.

Lauseen 4.4 nojalla avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektoreiden $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k$ virittämä aliavaruus $\text{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$ on vektoriavaruuden $\mathbb{R}^n$ aliavaruus.

Esimerkki 15.2. Osoitetaan, että joukko

$$W = \{(a, b, a) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

on vektoriavaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruus. Joukko W muodostuu siis sellaisista vektoreista, joiden ensimmäinen ja viimeinen komponentti ovat samat.

Joukko W on määritelmänsä mukaan vektoriavaruuden $\mathbb{R}^3$ osajoukko.

a) Oletetaan, että $\bar{w}, \bar{u} \in W$. Nyt $\bar{w} = (a, b, a)$ ja $\bar{u} = (c, d, c)$ joillakin reaaliluvuilla $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Huomataan, että

$$\bar{w} + \bar{u} = (a + c, b + d, a + c).$$

Koska summavektorin ensimmäinen ja viimeinen komponentti ovat samat, on se joukon W alkio. Siten $\bar{w} + \bar{u} \in W$.

b) Oletetaan, että $\bar{w} \in W$ ja $r \in \mathbb{R}$. Nyt $\bar{w} = (a, b, a)$ joillakin $a, b \in \mathbb{R}$. Nähdään, että $r\bar{w} = (ra, rb, ra)$. Vektorin $r\bar{w}$ ensimmäinen ja viimeinen komponentti ovat samat, joten pätee $r\bar{w} \in W$.

c) Nollavektori $(0, 0, 0)$ on joukon W alkio, sillä sen ensimmäinen ja viimeinen komponentti ovat samat.

Siten W on vektoriavaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruus.

Esimerkki 15.3. Tutkitaan sitten erästä polynomiavaruuden $\mathcal{P}$ aliavaruutta. Sitä varten on määriteltävä polynomin aste. Olkoon $p = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ polynomi, jolle pätee $a_n \neq 0$. Lukua n kutsutaan polynomin *asteeksi* ja merkitään $\deg(p)$.

Osoitetaan, että polynomiavaruudella $\mathcal{P}$ on aliavaruus

$$\mathcal{P}_2 = \{p \in \mathcal{P} \mid p = 0 \text{ tai } \deg(p) \leq 2\}.$$

Oletetaan, että $p, q \in \mathcal{P}_2$ ja $r \in \mathbb{R}$. Nyt $p = a_2x^2 + a_1x + a_0$ ja $q = b_2x^2 + b_1x + b_0$ joillakin $a_2, a_1, a_0, b_2, b_1, b_0 \in \mathbb{R}$. Huomataan, että

$$p + q = (a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x + a_0 + b_0,$$

joten polynomin $p + q$ aste on korkeintaan kaksi. Siis $p + q \in \mathcal{P}_2$. Lisäksi

$$rp = (ra_2)x^2 + (ra_1)x + ra_0,$$

joten myös polynomin rp aste on korkeintaan kaksi. Näin ollen $rp \in \mathcal{P}_2$. Vektoriavaruuden $\mathcal{P}$ nollavektori on nollapolynomi 0, joka kuuluu määritelmän mukaan joukkoon $\mathcal{P}_2$. Siten $\mathcal{P}_2$ on vektoriavaruuden $\mathcal{P}$ aliavaruus.

Samalla tavoin voidaan osoittaa, että joukko

$$\mathcal{P}_n = \{p \in \mathcal{P} \mid p = 0 \text{ tai } \deg(p) \leq n\}$$

on vektoriavaruuden $\mathcal{P}$ aliavaruus kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Esimerkki 15.4. Tarkastellaan $n \times n$-matriisien muodostamaa vektoriavaruutta $\mathbb{R}^{n \times n}$. Olkoon W symmetristen $n \times n$-matriisien joukko. Toisin sanoen

$$W = \{C \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid C^T = C\}.$$

Osoitetaan, että W on vektoriavaruuden $\mathbb{R}^{n \times n}$ aliavaruus.

Ensinnäkin W on määritelmänsä mukaan joukon $\mathbb{R}^{n \times n}$ osajoukko. Oletetaan, että A, $B \in W$ ja $c \in \mathbb{R}$. Tällöin $A^T = A$ ja $B^T = B$.

Transpoosin laskusääntöjen nojalla

$$(A + B)^T = A^T + B^T = A + B,$$

joten $A + B \in W$. Lisäksi

$$(cA)^T = cA^T = cA,$$

joten $cA \in W$. Nollavektori on $n \times n$-nollamatriisi O. Sille pätee

$$O^T = O,$$

joten $O \in W$.

Näin ollen W on vektoriavaruuden $\mathbb{R}^{n \times n}$ aliavaruus.

Esimerkki 15.5. Tutkitaan, onko joukko

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & a+1 \\ 0 & b \end{bmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

vektoriavaruuden $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ aliavaruus.

Havaitaan, että nollavektori eli nollamatriisi

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ei ole joukossa W, joten aliavaruuden määritelmän ehto c) ei täyty. Siis W ei ole vektoriavaruuden $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ aliavaruus.

Esimerkki 15.6. Tutkitaan, onko joukko $W = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid \det(A) = 0\}$ vektoriavaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ aliavaruus.

Valitaan esimerkiksi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Tällöin $\det(A) = 0$ ja $\det(B) = 0$, joten $A, B \in W$.

Kuitenkin

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

ja siten $\det(A+B) = 2 \neq 0$. Näin ollen $A+B \notin W$, joten W ei ole vektoriavaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ aliavaruus.

Seuraava lause osoittaa, että jokainen aliavaruus on itsekin pieni vektoriavaruus.

Lause 15.7. *Oletetaan, että V on vektoriavaruus, jolla on aliavaruus W. Tällöin myös aliavaruus W on vektoriavaruus.*

Todistus. Vektoriavaruuden yhteenlaskua ja skalaarikertolaskua koskevat ehdot 1)–2) ja 5)–8) pysyvät voimassa, vaikka rajoitutaan tarkastelemaan alkuperäisen vektoriavaruuden V osajoukkoa W.

Nollavektoria käsittelevä ehto 3) seuraa aliavaruuden määritelmästä, sillä nollavektori kuuluu aina aliavaruuteen. Vastavektoriin liittyvä ehto 4) puolestaan seuraa aliavaruuden määritelmän ehdosta b) sekä lauseen 14.10 kohdasta c). Jos nimittäin $\bar{v} \in W$, niin $-\bar{v} = (-1)\bar{v} \in W$. Siten jokaisella W:n vektorilla on vastavektori joukossa W.

Aliavaruuden määritelmän ehdot a) ja b) takaavat, että yhteenlasku ja skalaarikertolasku ovat joukon W laskutoimituksia. □

15.1 Vektoreiden virittämä aliavaruus

Määritelmä 15.8. Olkoon V jokin vektoriavaruus. *Vektoreiden $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k \in V$ virittämä aliavaruus* on joukko

$$\operatorname{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k) = \{a_1\bar{v}_1 + \cdots + a_k\bar{v}_k \mid a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}\}.$$

Esimerkki 15.9. Esimerkissä 15.2 osoitettiin, että $W = \{(r, s, r) \mid r, s \in \mathbb{R}\}$ on vektoriavaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruus. Etsitään sille virittäjävektorit.

Havaitaan, että

$$\begin{aligned} W &= \{(a, b, a) \mid a, b \in \mathbb{R}\} \\ &= \{a(1, 0, 1) + b(0, 1, 0) \mid a, b \in \mathbb{R}\} \\ &= \operatorname{span}\big((1, 0, 1), (0, 1, 0)\big). \end{aligned}$$

Siis W on vektoreiden $(1, 0, 1)$ ja $(0, 1, 0)$ virittämä vektoriavaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruus.

Esimerkki 15.10. Merkitään

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \,\middle|\, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Osoitetaan, että W on 2×2-matriisien muodostaman vektoriavaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ aliavaruus. Tehdään tämä etsimällä W:lle virittäjävektorit.

Havaitaan, että

$$\begin{aligned} W &= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \,\middle|\, a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \,\middle|\, a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right). \end{aligned}$$

Siis W on vektoreiden (eli tässä tapauksessa matriisien)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

virittämä vektoriavaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ aliavaruus.

Vektorien virittämä aliavaruus on aliavaruus myös määritelmän 15.1 mielessä. Tämä osoitetaan täsmällisesti seuraavassa lauseessa.

Lause 15.11. *Jos* $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k \in V$, *niin* $\operatorname{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$ *on vektoriavaruuden* V *aliavaruus. Lisäksi* $\operatorname{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$ *on pienin aliavaruus, joka sisältää vektorit* $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k$.

Todistus. Ensinnäkin $\operatorname{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$ on vektoriavaruuden V osajoukko, sillä se koostuu V:n vektorien lineaarikombinaatioista.

Oletetaan, että $\bar{u}$, $\bar{w} \in \operatorname{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$ ja $c \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$\bar{u} = a_1\bar{v}_1 + \cdots + a_k\bar{v}_k \quad \text{ja} \quad \bar{w} = b_1\bar{v}_1 + \cdots + b_k\bar{v}_k$$

joillakin $a_1, \ldots, a_k$, $b_1, \ldots, b_k \in \mathbb{R}$. Nähdään, että

$$\begin{aligned} \bar{u} + \bar{w} &= a_1\bar{v}_1 + \cdots + a_k\bar{v}_k + b_1\bar{v}_1 + \cdots + b_k\bar{v}_k \\ &= a_1\bar{v}_1 + b_1\bar{v}_1 + \cdots + a_k\bar{v}_k + b_k\bar{v}_k \\ &= (a_1 + b_1)\bar{v}_1 + \cdots + (a_k + b_k)\bar{v}_k. \end{aligned}$$

joten $\bar{u} + \bar{w} \in \operatorname{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$. Lisäksi

$$c\bar{u} = c(a_1\bar{v}_1 + \cdots + a_k\bar{v}_k) = (ca_1)\bar{v}_1 + \cdots + (ca_k)\bar{v}_k,$$

joten $c\bar{u} \in \operatorname{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k)$. Nollavektori voidaan lauseen 14.10 a)-kohdan nojalla kirjoittaa muodossa

$$\bar{0} = 0\bar{v}_1 + \cdots + 0\bar{v}_k,$$

joten $\bar{0} \in \operatorname{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k)$. Siten $\operatorname{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k)$ on vektoriavaruuden V aliavaruus.

Vektorit $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k$ kuuluvat aliavaruuteen V, sillä

$$\begin{aligned}
\bar{v}_1 &= 1\bar{v}_1 + 0\bar{v}_2 + \cdots + 0\bar{v}_k \\
\bar{v}_2 &= 0\bar{v}_1 + 1\bar{v}_2 + \cdots + 0\bar{v}_k \\
&\vdots \\
\bar{v}_k &= 0\bar{v}_1 + 0\bar{v}_2 + \cdots + 1\bar{v}_k.
\end{aligned}$$

Tarvitsee enää osoittaa, että $\operatorname{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k)$ on pienin aliavaruus, joka sisältää vektorit $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k$. Oletetaan, että W on vektoriavaruuden V jokin sellainen aliavaruus, että $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k \in W$. Koska W on aliavaruus, se sisältää kaikkien vektoriensa summat ja skalaarimonikerrat. Siis $a_1\bar{v}_1 + \cdots + a_k\bar{v}_k \in W$ kaikilla $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$. Näin ollen $\operatorname{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k) \subset W$. □

Esimerkki 15.12. Osoitetaan, että 2×2-matriiseista muodostuva vektoriavaruus $\mathbb{R}^{2\times 2}$ on seuraavien vektoreiden virittämä:

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Oletetaan, että

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Tällöin

$$A = a_{11}E_{11} + a_{12}E_{12} + a_{21}E_{21} + a_{22}E_{22},$$

joten A on vektoreiden E_{11}, E_{12}, E_{21} ja E_{22} lineaarikombinaatio. Siten on osoitettu, että $\mathbb{R}^{2\times 2} = \operatorname{span}(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$.

Esimerkki 15.13. Polynomit 1 ja x virittävät polynomiavaruuden

$$\mathcal{P}_1 = \{p \in \mathcal{P} \mid p = 0 \text{ tai } \deg(p) \leq 1\}.$$

Jos nimittäin $p \in \mathcal{P}_1$, niin $p = ax + b = ax + b \cdot 1$ joillakin $a, b \in \mathbb{R}$. Siten p on polynomien x ja 1 lineaarikombinaatio.

Samalla tavoin voidaan osoittaa, että $\mathcal{P}_n = \operatorname{span}(1, x, x^2, \dots, x^n)$.

Esimerkki 15.14. Merkitään

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \; \text{ ja } \; I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Määritetään span(A, B, I).

Jokainen vektoreiden (matriisien) A, B ja I lineaarikombinaatio on muotoa

$$xA + yB + zI = \begin{bmatrix} x+z & x+y \\ x+y & z \end{bmatrix},$$

missä x, y, $z \in \mathbb{R}$. Havaitaan, että tällainen lineaarikombinaatio on symmetrinen matriisi. Siten

$$\operatorname{span}(A, B, I) \subset \{ C \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid C^T = C \}.$$

Osoitetaan sitten, että jokainen symmetrinen matriisi voidaan kirjoittaa vektoreiden A, B ja I lineaarikombinaationa. Oletetaan, että C on symmetrinen matriisi. Tällöin

$$C = \begin{bmatrix} d & e \\ e & f \end{bmatrix},$$

missä d, e, $f \in \mathbb{R}$. Pienen pohdiskelun jälkeen havaitaan, että

$$\begin{aligned} C = \begin{bmatrix} d & e \\ e & f \end{bmatrix} &= (d-f)\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + (e-d+f)\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + f\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= (d-f)A + (e-d+f)B + fI. \end{aligned}$$

Siis jokainen symmetrinen matriisi on vektoreiden A, B ja I lineaarikombinaatio. Tämä tarkoittaa sitä, että $\{C \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid C^T = C\} \subset \operatorname{span}(A, B, I)$.

Näin ollen $\operatorname{span}(A, B, I) = \{C \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid C^T = C\}$.

Laajennetaan lopuksi virittämisen määritelmää hieman. Määritelmässä 15.8 puhutaan yhden tai useamman vektorin virittämistä aliavaruuksista. Toisinaan halutaan ottaa huomioon myös tapaus, jossa virittäjävektoreita ei ole yhtään. Sovimme, että nollan vektorin virittämä aliavaruus on $\{\bar{0}\}$.

Lisäksi virittämisen määritelmää voidaan laajentaa koskemaan myös äärettömiä vektorijoukkoja. Aliavaruus span(S), missä S on äärettömän monen vektorin muodostama joukko, koostuu kaikista (äärellisistä) lineaarikombinaatioista, jotka voidaan muodostaa joukon S vektoreista. Esimerkiksi kaikkien polynomien muodostama vektoriavaruus $\mathcal{P}$ on vektoreiden $1, x, x^2, \ldots$ virittämä.