12 Pistetulo

Avaruuksissa $\mathbb{R}^2$ ja $\mathbb{R}^3$ voidaan puhua vektorien pituuksista ja vektoreiden välisistä kulmista. Nämä käsitteet yleistetään avaruuteen $\mathbb{R}^n$ pistetulon avulla.

Määritelmä 12.1. Vektoreiden $\bar{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ ja $\bar{w} = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$ *pistetulo* on

$$\bar{v} \cdot \bar{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \cdots + v_n w_n.$$

Esimerkiksi vektorien $\bar{v} = (3, -2, 0)$ ja $\bar{w} = (1, -2, \sqrt{3})$ pistetulo on

$$\bar{v} \cdot \bar{w} = 3 \cdot 1 + (-2)(-2) + 0 \cdot \sqrt{3} = 7.$$

Huomaa, että pistetulosta tulee aina tulokseksi reaaliluku.

Pistetulolle voidaan todistaa laskusääntöjä.

Lause 12.2. *Oletetaan, että $\bar{v}, \bar{w}, \bar{u} \in \mathbb{R}^n$ ja $c \in \mathbb{R}$. Tällöin*

a) $\bar{v} \cdot \bar{w} = \bar{w} \cdot \bar{v}$

b) $\bar{v} \cdot (\bar{w} + \bar{u}) = \bar{v} \cdot \bar{w} + \bar{v} \cdot \bar{u}$

c) $(c\bar{v}) \cdot \bar{w} = c(\bar{v} \cdot \bar{w})$

Todistus. Todistetaan kohta b) ja jätetään loput kohdat harjoitustehtäviksi. Merkitään $\bar{v} = (v_1, \dots, v_n)$, $\bar{w} = (w_1, \dots, w_n)$ ja $\bar{u} = (u_1, \dots, u_n)$. Nyt nähdään, että

$$\begin{aligned}
\bar{v} \cdot (\bar{w} + \bar{u}) &= (v_1, \dots, v_n) \cdot (w_1 + u_1, w_2 + u_2, \dots, w_n + u_n) \\
&= v_1(w_1 + u_1) + v_2(w_2 + u_2) + \cdots + v_n(w_n + u_n) \\
&= v_1 w_1 + v_1 u_1 + v_2 w_2 + v_2 u_2 + \cdots + v_n w_n + v_n u_n \\
&= (v_1 w_1 + v_2 w_2 + \cdots + v_n w_n) + (v_1 u_1 + v_2 u_2 + \cdots + v_n u_n) \\
&= \bar{v} \cdot \bar{w} + \bar{v} \cdot \bar{u}.
\end{aligned}$$

Tässä käytettiin reaalilukujen yhteenlaskun ja kertolaskun osittelulakia. □

Seuraava lause osoittaa, että vektorin pistetulo itsensä kanssa on aina epänegatiivinen. Ainoastaan nollavektorin pistetulo itsensä kanssa on nolla.

Lause 12.3. *Oletetaan, että $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$. Tällöin*

a) $\bar{v} \cdot \bar{v} \geq 0$

b) $\bar{v} \cdot \bar{v} = 0$, *jos ja vain jos* $\bar{v} = \bar{0}$.

Todistus. a) Nähdään, että

$$\bar{v} \cdot \bar{v} = v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2 \geq 0 + 0 + \cdots + 0 = 0\,,$$

sillä reaaliluvun neliö on aina epänegatiivinen. Tämä todistaa väitteen.

b) ”$\Rightarrow$”: Oletetaan, että $\bar{v} \cdot \bar{v} = 0$. Tällöin $v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2 = 0$. Koska jokainen yhteenlaskettava on epänegatiivinen, täytyy yhteenlaskettavien olla nollia. Toisin sanoen $v_i^2 = 0$ kaikilla $i \in \{1, \ldots, n\}$. Tästä seuraa, että $v_i = 0$ kaikilla $i \in \{1, \ldots, n\}$. Siten $\bar{v} = (0, 0, \ldots, 0) = \bar{0}$.

”$\Leftarrow$”: Oletetaan, että $\bar{v} = \bar{0}$. Nyt $\bar{v} \cdot \bar{v} = 0^2 + 0^2 + \cdots + 0^2 = 0$. Siten väite on todistettu.

□

12.1 Vektorin normi

Pistetulon avulla voidaan määritellä avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektorin normi eli pituus. Lauseen 12.3 nojalla $\bar{v} \cdot \bar{v} \geq 0$, joten seuraavassa määritelmässä juurrettava on epänegatiivinen, kuten kuuluu olla.

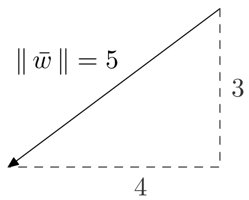
Määritelmä 12.4. Vektorin $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ *normi* eli pituus on

$$\|\bar{v}\| = \sqrt{\bar{v} \cdot \bar{v}}.$$

Määritelmästä seuraa, että $\|\bar{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$. Esimerkiksi vektorin $\bar{v} = (1/2, 3, -2, 0)$ normi on

$$\|\bar{v}\| = \sqrt{(1/2)^2 + 3^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{53}{4}} = \frac{\sqrt{53}}{2}.$$

Tason vektoreiden normia voidaan havainnollistaa Pythagoraan lauseen avulla. Kuvassa 12.24 on esitetty vektori $\bar{w} = (-4, -3)$. Sen pituus on Pythagoraan lauseen nojalla $\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$. Pituuden geometrinen tulkinta antaa siis saman tuloksen kuin määritelmä 12.4.



Kuva 12.24: Vektorin $\bar{w}$ normi eli pituus.

Vektorin normi on aina epänegatiivinen ja nollavektori on ainoa vektori, jonka normi on nolla.

Lause 12.5. *Oletetaan, että $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$. Tällöin*

a) $\|\bar{v}\| \geq 0$

b) $\|\bar{v}\| = 0$*, jos ja vain jos* $\bar{v} = 0$*.*

Todistus. Tulokset seuraavat suoraan neliöjuuren ominaisuuksista ja lauseesta 12.3.

a) Määritelmän mukaan $\|\bar{v}\| = \sqrt{\bar{v} \cdot \bar{v}}$. Neliöjuuren arvo on aina epänegatiivinen, joten $\|\bar{v}\| \geq 0$.

b) Huomataan, että $\|\bar{v}\| = 0$, jos ja vain jos juurrettava $\bar{v} \cdot \bar{v}$ on nolla. Lauseen 12.3 nojalla taas $\bar{v} \cdot \bar{v} = 0$, jos ja vain jos $\bar{v} = \bar{0}$. Tämä todistaa väitteen.

□

Lause 12.6. *Oletetaan, että* $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ *ja* $c \in \mathbb{R}$*. Tällöin* $\|c\bar{v}\| = |c|\|\bar{v}\|$*.*

Todistus. Pistetulon ominaisuuksien perusteella

$$\|c\bar{v}\| = \sqrt{c\bar{v} \cdot c\bar{v}} = \sqrt{c(\bar{v} \cdot c\bar{v})} = \sqrt{c^2(\bar{v} \cdot \bar{v})} = |c|\sqrt{(\bar{v} \cdot \bar{v})} = |c|\|\bar{v}\|.$$

□

Määritelmä 12.7. Vektori $\bar{u} \in \mathbb{R}^n$ on *yksikkövektori*, jos sen normi on yksi eli

$$\|\bar{u}\| = 1.$$

Esimerkiksi vektorit $(1, 0)$ ja $(0, 1)$ sekä vektorit $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ ja $(0, 0, 1)$ ovat yksikkövektoreita.

Esimerkki 12.8. Etsitään yksikkövektori, joka on yhdensuuntainen vektorin $\bar{v} = (2, -1, 0)$ kanssa. Vektorin $\bar{v}$ normi on $\|\bar{v}\| = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$. Jos vektori $\bar{v}$ kerrotaan skalaarilla $1/\sqrt{5}$, saadaan vektori $(1/\sqrt{5})\bar{v}$, jonka pituus on lauseen 12.6 nojalla

$$(1/\sqrt{5}) \cdot \|\bar{v}\| = 1/\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 1.$$

Lisäksi vektorit $\bar{v}$ ja $(1/\sqrt{5})\bar{v}$ ovat yhdensuuntaiset.

Lause 12.9. *Oletetaan, että* $\bar{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$*. Tällöin vektori* $\dfrac{1}{\|\bar{v}\|}\bar{v}$ *on yksikkövektori, joka on yhdensuuntainen* $\bar{v}$*:n kanssa.*

Todistus. Väite seuraa lauseesta 12.6 samalla tavalla kuin esimerkissä 12.8. □

Normin avulla voidaan määritellä vektorien välinen etäisyys.

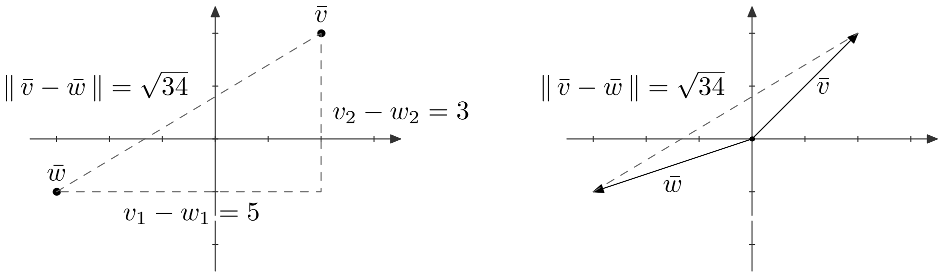
Määritelmä 12.10. Oletetaan, että $\bar{v}$, $\bar{w} \in \mathbb{R}^n$. Vektorien $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ välinen etäisyys on

$$d(\bar{v}, \bar{w}) = \|\bar{v} - \bar{w}\|.$$

Esimerkki 12.11. Vektoreiden $\bar{v} = (2, 2)$ ja $\bar{w} = (-3, -1)$ välinen etäisyys on

$$d(\bar{v}, \bar{w}) = \|\bar{v} - \bar{w}\| = \|(2 - (-3), 2 - (-1))\| = \|(5, 3)\| = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}\,.$$

Sitä on havainnollistettu kahdella eri tavalla kuvassa 12.25.



Kuva 12.25: Vektoreiden $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ välinen etäisyys.

Lause 12.12 (Schwarzin epäyhtälö)**.** *Oletetaan, että $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ ja $\bar{w} \in \mathbb{R}^n$. Tällöin*

$$|\bar{v} \cdot \bar{w}| \leq \|\bar{v}\|\|\bar{w}\|.$$

Todistus. Schwarzin epäyhtälöä tarvitaan tässä vaiheessa lähinnä lemman 12.13 todistamiseen. Lauseen todistus on kuitenkin melko tekninen, joten sitä lykätään kurssin toiseen osaan. □

12.2 Vektorien välinen kulma ja kohtisuoruus

Avaruudessa $\mathbb{R}^n$ kahden vektorin välinen kulma määritetään pistetulon avulla. Vektorien välisen kulman määrittelyyn tarvitaan seuraavaa lemmaa.

Lemma 12.13. *Oletetaan, että $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$. Tällöin*

$$-1 \leq \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\|\bar{v}\| \; \|\bar{w}\|} \leq 1.$$

Todistus. Schwarzin epäyhtälön 12.12 mukaan $|\bar{v} \cdot \bar{w}| \leq \|\bar{v}\|\|\bar{w}\|$. Tästä seuraa, että

$$-\|\bar{v}\|\|\bar{w}\| \leq \bar{v} \cdot \bar{w} \leq \|\bar{v}\|\|\bar{w}\|.$$

Jakamalla näin saadut epäyhtälöt positiivisella luvulla $\|\bar{v}\|\|\bar{w}\|$ saadaan

$$-1 \leq \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\|\bar{v}\| \; \|\bar{w}\|} \leq 1.$$

□

Kosinifunktio on määritelty niin, että jokaista lukua $a \in [-1, 1]$ vastaa täsmälleen yksi sellainen kulma α, että $0° \leq \alpha \leq 180°$ ja $\cos \alpha = a$. Edellisen lemman nojalla voidaan siis asettaa seuraava määritelmä.

Määritelmä 12.14. Vektorien $\bar{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$ ja $\bar{w} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$ välinen kulma on se kulma α, jolle pätee $0° \leq \alpha \leq 180°$ ja

$$\cos \alpha = \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\|\bar{v}\| \; \|\bar{w}\|}.$$

Esimerkiksi vektorien $\bar{v} = (3, -2, 0)$ ja $\bar{w} = (1, -2, \sqrt{3})$ välinen kulma α saadaan yhtälöstä

$$\cos\alpha = \frac{7}{\sqrt{13}\sqrt{8}}.$$

Lisäksi täytyy pätee $0° \leq \alpha \leq 180°$. Näin vektorien väliseksi kulmaksi saadaan $\alpha \approx 46{,}65°$.

Tason vektorien tapauksessa vektorien välisen kulman määritelmä vastaa geometrista käsitystämme vektorien välisestä kulmasta. Kosinilauseen mukaan kuvan 12.26 kolmiossa

$$\|\bar{w} - \bar{v}\|^2 = \|\bar{v}\|^2 + \|\bar{w}\|^2 - 2\|\bar{v}\|\|\bar{w}\|\cos\alpha.$$

Toisaalta normin määritelmän nojalla

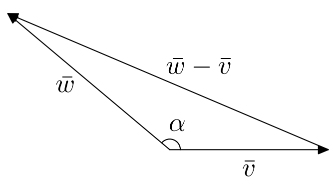
$$\begin{aligned}\|\bar{w} - \bar{v}\|^2 &= (\bar{w} - \bar{v}) \cdot (\bar{w} - \bar{v}) = \bar{w} \cdot \bar{w} - \bar{w} \cdot \bar{v} - \bar{v} \cdot \bar{w} + \bar{v} \cdot \bar{v} \\ &= \|\bar{v}\|^2 - 2(\bar{v} \cdot \bar{w}) + \|\bar{w}\|^2.\end{aligned}$$

Siten

$$\|\bar{v}\|^2 + \|\bar{w}\|^2 - 2\|\bar{v}\|\|\bar{w}\|\cos\alpha = \|\bar{v}\|^2 - 2(\bar{v} \cdot \bar{w}) + \|\bar{w}\|^2$$

ja edelleen

$$\cos\alpha = \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\|\bar{v}\|\|\bar{w}\|}.$$



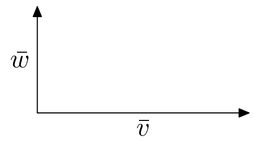
Kuva 12.26: Vektoreiden $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ välinen kulma kosinilauseen näkökulmasta.

Määritelmä 12.15. Vektorit $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ ja $\bar{w} \in \mathbb{R}^n$ ovat *ortogonaaliset* eli *kohtisuorassa toisiaan vastaan*, jos $\bar{v} \cdot \bar{w} = 0$. Tällöin merkitään $\bar{v} \perp \bar{w}$.

Yleensä kahden olion ajatellaan olevan kohtisuorassa toisiaan vastaan, jos niiden välinen kulma on $90°$. Tämä pitää paikkansa myös vektoreiden tapauksessa. Oletetaan, että $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$. Määritelmän mukaan vektoreiden $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ välinen kulma on $90°$, jos ja vain jos

$$\frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\|\bar{v}\|\,\|\bar{w}\|} = \cos 90° = 0.$$

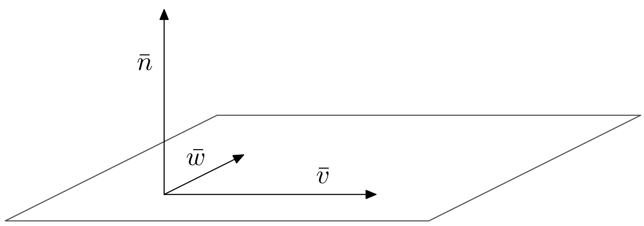
Tämä puolestaan pätee, jos ja vain jos $\bar{v} \cdot \bar{w} = 0$. Siten vektoreiden $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ välinen kulma on $90°$, jos ja vain jos $\bar{v} \cdot \bar{w} = 0$.



Kuva 12.27: Vektorit $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ ovat ortogonaaliset eli kohtisuorassa toisiaan vastaan.

Pistetulon sovellus: Tason normaalimuotoinen yhtälö

Vektorin sanotaan olevan kohtisuorassa tasoa vastaan, jos se on kohtisuorassa tason suuntavektoreita vastaan. Tällaista vektoria kutsutaan tason *normaaliksi* (ks. kuva 12.28).



Kuva 12.28: Tason normaali $\bar{n}$.

Oletetaan, että T on avaruuden $\mathbb{R}^3$ taso, joka kulkee pisteen P kautta ja jolla on normaali $\bar{n}$. Voidaan osoittaa, että piste $Q = (x, y, z)$ on tasossa T, jos ja vain jos

$$\bar{n} \cdot (\bar{q} - \bar{p}) = 0,$$

missä $\bar{q} = \overline{OQ}$ ja $\bar{p} = \overline{OP}$. Tilannetta on havainnollistettu kuvassa 12.29.

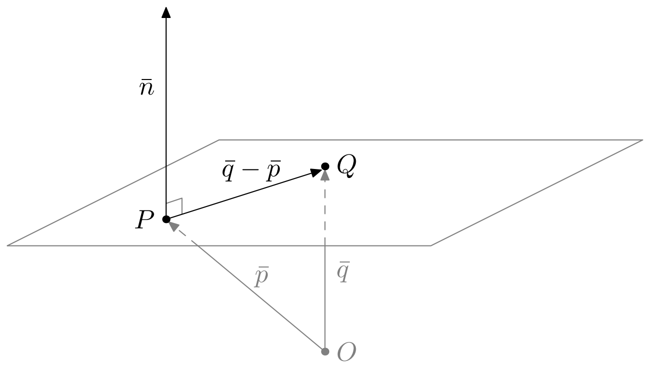
Edellä esitettyä yhtälöä kutsutaan tason T *normaalimuotoiseksi yhtälöksi.* Piste Q on tasossa T, jos ja vain jos pisteen paikkavektori $\bar{q}$ toteuttaa yhtälön.

Esimerkki 12.16. Oletetaan, että taso T kulkee pisteen $P = (6, 0, 1)$ kautta ja sillä on normaali $\bar{n} = (1, 2, 3)$. Tason T normaalimuotoinen yhtälö on tällöin

$$(1, 2, 3) \cdot (\bar{q} - (6, 0, 1)) = 0.$$

Tasossa T ovat siis ne pisteet Q, joiden paikkavektori $\bar{q}$ toteuttaa edellä esitetyn yhtälön. Toisin sanoen

$$T = \{\bar{q} \in \mathbb{R}^3 \mid (1, 2, 3) \cdot (\bar{q} - (6, 0, 1)) = 0\}.$$



Kuva 12.29: Tason T normaalimuotoisen yhtälön havainnollistus.

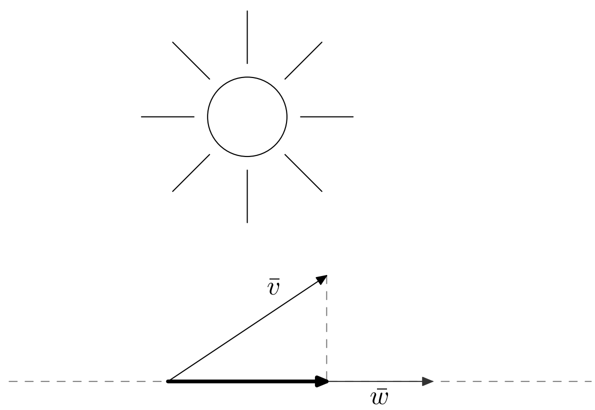
Kirjoitetaan taso vielä hiukan toisenlaisessa muodossa. Merkitään $\bar{q} = (x, y, z)$, missä $x, y, z \in \mathbb{R}$. Nyt

$$\begin{aligned}(1,2,3)\cdot(\bar{q}-(6,0,1)) &= (1,2,3)\cdot(x-6, y-0, z-1)\\ &= x-6+2y+3z-3\\ &= x+2y+3z-9,\end{aligned}$$

joten voidaan kirjoittaa $T = \{\bar{q} \in \mathbb{R}^3 \mid x+2y+3z-9=0\}$.

12.3 Projektio

Ryhdymme määrittelemään vektorin $\bar{v}$ projektiota vektorin $\bar{w}$ virittämälle aliavaruudelle $\mathrm{span}(\bar{w})$ (eli vektorin $\bar{w}$ suuntaiselle suoralle). Voidaan ajatella, että projektio on vektorin $\bar{v}$ heittämä varjo, kun aurinko paistaa kohtisuoraan vektoria $\bar{w}$ vastaan kuten kuvassa 12.30.



Kuva 12.30: Projektion havainnollistus.

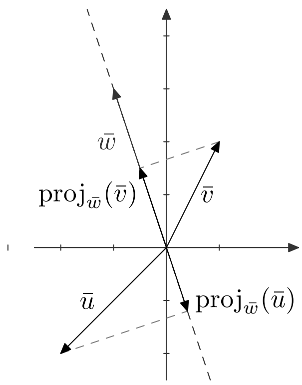
Määritelmä 12.17. Oletetaan, että $n \in \{1, 2, \dots\}$. Olkoot $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^n$ ja $\bar{w} \neq \bar{0}$. Tällöin vektorin $\bar{v}$ *projektio* vektorin $\bar{w}$ virittämälle aliavaruudelle on

$$\mathrm{proj}_{\bar{w}}(\bar{v}) = \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\bar{w} \cdot \bar{w}} \bar{w}.$$

Esimerkki 12.18. Esimerkiksi vektorin $\bar{v} = (1, 2)$ projektio vektorin $\bar{w} = (-1, 3)$ virittämälle aliavaruudelle on

$$\mathrm{proj}_{\bar{w}}(v) = \frac{5}{10}(-1, 3) = \frac{1}{2}(-1, 3) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right).$$

Projektio on esitety kuvassa 12.31.



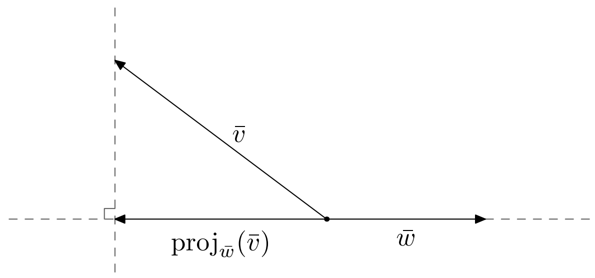
Kuva 12.31: Vektoreiden $\bar{v}$ ja $\bar{u}$ projektiot vektorin $\bar{w}$ virittämälle aliavaruudelle.

Vektorin $\bar{u} = (-2, -2)$ projektio vektorin $\bar{w}$ virittämälle aliavaruudelle on puolestaan

$$\mathrm{proj}_{\bar{w}}(v) = \frac{-4}{10}(-1, 3) = -\frac{2}{5}(-1, 3) = \left(\frac{2}{5}, -\frac{6}{5}\right).$$

Määritelmästä nähdään, että $\mathrm{proj}_{\bar{w}}(v)$ on aina yhdensuuntainen vektorin $\bar{w}$ kanssa. (Vektoria $\bar{w}$ kerrotaan nimittäin skalaarilla $(\bar{v} \cdot \bar{w})/(\bar{w} \cdot \bar{w})$.) Ei ole myöskään vaikea osoittaa, että vektorit $\bar{v} - \mathrm{proj}_{\bar{w}}(\bar{v})$ ja $\bar{w}$ ovat ortogonaaliset eli kohtisuorassa toisiaan vastaan.

Vektorin projektion voi määrittää myös geometrisesti (ks. kuva 12.32). Piirretään vektorit $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ alkamaan samasta pisteestä ja piirretään vektorin $\bar{w}$ suuntainen suora. Projektio $\mathrm{proj}_{\bar{w}}(v)$ löydetään piirtämällä suora, joka on kohtisuorassa vektorin $\bar{w}$ suuntaista suoraa vastaan ja kulkee vektorin $\bar{v}$ kärjen kautta.

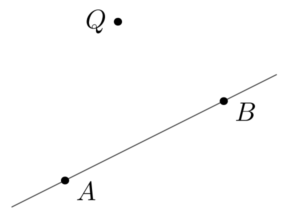


Kuva 12.32: Vektorin $\bar{v}$ projektio vektorin $\bar{w}$ virittämälle aliavaruudelle.

Projektion sovellus: Pisteen etäisyys suorasta

Pisteen etäisyys suorasta voidaan määrittää projektion avulla. Pisteen Q etäisyys suorasta $S = \{\bar{p} + t\bar{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$ on kaikkein lyhin välimatka, joka voi olla pisteen Q ja suoran S pisteen välillä. Täsmällisesti ilmaistuna pisteen Q etäisyys suorasta S on $\min\{d(\bar{q}, \bar{a}) \mid \bar{a} \in S\}$, missä $\bar{q}$ on pisteen Q paikkavektori.

Tutkitaan esimerkin avulla, kuinka projektiota voidaan käyttää etäisyyden määrittämisessä. Tarkkoja todistuksia ei esitetä. Määritetään pisteen $Q = (4, -1, 9)$ etäisyys suorasta S, joka kulkee pisteiden $A = (2, -3, 5)$ ja $B = (4, 1, 7)$ kautta (ks. kuva 12.33).



Kuva 12.33: Pisteiden A ja B kautta kulkeva suora S.

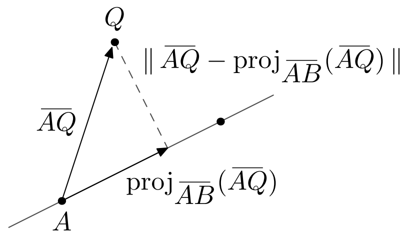
Määritetään ensin vektori jostakin suoran pisteestä tutkittavaan pisteeseen. Esimerkiksi vektori

$$\overline{AQ} = \overline{OQ} - \overline{OA} = (2, 2, 4)$$

käy tähän tarkoitukseen. Lisäksi tarvitaan suoran suuntainen vektori, kuten vaikkapa vektori $\overline{AB} = (2, 4, 2)$.

Vektorin $\overline{AQ}$ projektio suoralle S on

$$\text{proj}_{\overline{AB}}(\overline{AQ}) = \frac{\overline{AQ} \cdot \overline{AB}}{\overline{AB} \cdot \overline{AB}} \overline{AB} = \frac{20}{24}(2, 4, 2) = \frac{5}{6}(2, 4, 2).$$



Kuva 12.34: Pisteen Q etäisyys suorasta S.

Erotus $\overline{AQ} - \mathrm{proj}_{\overline{AB}}(\overline{AQ})$ on kohtisuorassa suoraa S vastaan. Lasketaan erotus:

$$\begin{aligned}\overline{AQ} - \mathrm{proj}_{\overline{AB}}(\overline{AQ}) &= (2,2,4) - \frac{5}{6}(2,4,2) = \frac{6}{6}(2,2,4) - \frac{5}{6}(2,4,2) \\ &= \frac{1}{6}(12-10, 12-20, 24-10) = \frac{1}{6}(2,-8,14) \\ &= \frac{1}{3}(1,-4,7)\end{aligned}$$

Koska $\overline{AQ} - \mathrm{proj}_{\overline{AB}}(\overline{AQ})$ on kohtisuorassa suoraa S vastaan, antaa erotusvektorin pituus pisteen Q etäisyyden suorasta:

$$\|\overline{AQ} - \mathrm{proj}_{\overline{AB}}(\overline{AQ})\| = \frac{1}{3}\|(1,-4,7)\| = \frac{1}{3}\sqrt{1+16+49} = \frac{1}{3}\sqrt{66}.$$

Siten pisteen Q etäisyys suorasta S on $\frac{1}{3}\sqrt{66}$.

12.4 Ortogonaalinen ja ortonormaali kanta

Määritelmä 12.19. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ aliavaruuden W kanta $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_k)$ on *ortogonaalinen*, jos

$$\bar{w}_i \cdot \bar{w}_j = 0 \quad \text{kaikilla } i, j \in \{1, 2, \dots, k\}, \text{ missä } i \neq j.$$

Toisin sanoen kantavektorit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

Kanta $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_k)$ on *ortonormaali*, jos se on ortogonaalinen ja lisäksi

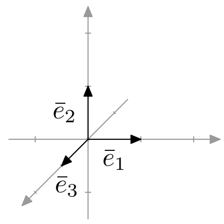
$$\|\bar{w}_i\| = 1 \quad \text{kaikilla } i \in \{1, 2, \dots, k\}.$$

Toisin sanoen kantavektorit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan ja niiden normi on yksi.

Esimerkki 12.20. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ luonnollinen kanta $\mathcal{E}_n = (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$ on ortonormaali. Huomataan nimittäin, että

$$\bar{e}_i \cdot \bar{e}_j = 0, \quad \text{jos } i \neq j.$$

Lisäksi $\|\bar{e}_i\| = 1$ kaikilla $i \in \{1, \dots, n\}$.

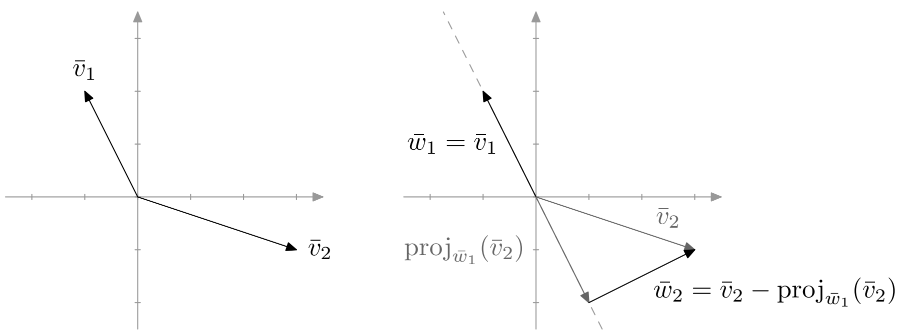


Kuva 12.35: Avaruuden $\mathbb{R}^3$ luonnollinen kanta $\mathcal{E}_3 = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ on ortonormaali.

Ortogonaaliset kannat ovat monissa tilanteissa hyvin käyttökelpoisia. Mistä tahansa kannasta voidaan muodostaan ortogonaalinen kanta projektiota apuna käyttäen. Seuraavassa esimerkissä näytetään, miten tämä tapahtu avaruudessa $\mathbb{R}^2$. Asiaan palataan tarkemmin kurssin toisessa osassa.

Esimerkki 12.21. Merkitään $\bar{v}_1 = (-1, 2)$ ja $\bar{v}_2 = (3, -1)$. Jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ on avaruuden $\mathbb{R}^2$ kanta. (Tämän todistaminen jätetään lukijalle.)

Etsitään ortogonaalinen kanta muodostamalla uusi jono $(\bar{w}_1, \bar{w}_2)$ valitsemalla $\bar{w}_1 = \bar{v}_1$ ja $\bar{w}_2 = \bar{v}_2 - \mathrm{proj}_{\bar{w}_1}(\bar{v}_2)$. Nyt vektorit $\bar{w}_1$ ja $\bar{w}_2$ ovat ortogonaaliset kuten luvussa 12.3 todettiin. Lisäksi $(\bar{w}_1, \bar{w}_2)$ on avaruuden $\mathbb{R}^2$ kanta, minkä todistaminen jätetään jälleen lukijalle.

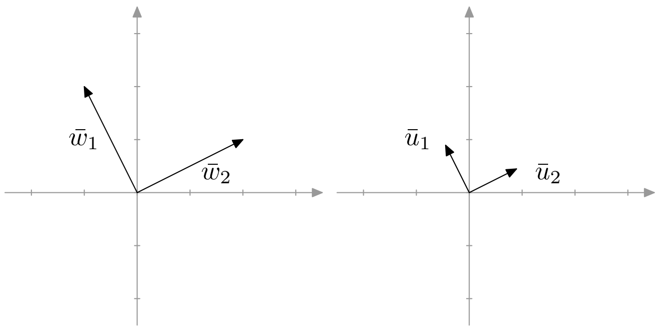


Kuva 12.36: Kannan $(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ muuttaminen ortogonaaliseksi kannaksi $(\bar{w}_1, \bar{w}_2)$.

Näin saadusta ortogonaalisesta kannasta voidaan vielä muodostaa ortonormaali kanta $(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ valitsemalla

$$\bar{u}_1 = \frac{1}{\|\bar{w}_1\|}\bar{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1, 2) \quad \text{ja} \quad \bar{u}_2 = \frac{1}{\|\bar{w}_2\|}\bar{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1).$$

Jono $(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ on avaruuden $\mathbb{R}^2$ ortonormaali kanta.



Kuva 12.37: Ortogonaalinen kanta $(\bar{w}_1, \bar{w}_2)$ ja ortonormaali kanta $(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$.

Vektorin koordinaatit ortonormaalin kannan suhteen saadaan pistetulon avulla.

Lause 12.22. *Oletetaan, että $\mathcal{B} = (\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_k)$ on aliavaruuden W ortonormaali kanta. Oletetaan, että $\bar{w} \in W$. Tällöin vektorin $\bar{w}$ koordinaatit kannan $\mathcal{B}$ suhteen ovat $\bar{w} \cdot \bar{u}_1$, $\bar{w} \cdot \bar{u}_2, \ldots, \bar{w} \cdot \bar{u}_k$ eli*

$$\bar{w} = (\bar{w} \cdot \bar{u}_1)\bar{u}_1 + (\bar{w} \cdot \bar{u}_2)\bar{u}_2 + \cdots + (\bar{w} \cdot \bar{u}_k)\bar{u}_k\,.$$

Todistus. Tutkitaan vektorin $\bar{w} \in W$ koordinaatteja kannan S suhteen. Olkoot koordinaatit $a_1, \ldots, a_k$ eli $\bar{w} = a_1\bar{w}_1 + a_2\bar{w}_2 + \cdots + a_k\bar{w}_k$. Huomataan, että

$$\begin{aligned}
\bar{w} \cdot \bar{w}_1 &= (a_1\bar{w}_1 + a_2\bar{w}_2 + \cdots + a_k\bar{w}_k) \cdot \bar{w}_1 \\
&= a_1(\bar{w}_1 \cdot \bar{w}_1) + a_2(\bar{w}_2 \cdot \bar{w}_1) + \cdots + a_k(\bar{w}_k \cdot \bar{w}_1) \\
&= a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 0 + \cdots + a_k \cdot 0 = a_1.
\end{aligned}$$

Vastaavalla tavalla nähdään, että $\bar{w} \cdot \bar{w}_i = a_i$ kaikilla $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Vektorin $\bar{w}$ koordinaatit kannan $\mathcal{B}$ suhteen saadaan siis laskemalla $\bar{w}$:n pistetulo kantavektorien kanssa. □

Esimerkki 12.23. Määritetään vektorin $\bar{w} = (2, 9, -7)$ koordinaantit ortonormaalin kannan $\mathcal{E}_3 = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ suhteen käyttäen edellä osoitettua tulosta. Koska

$$\begin{aligned}
\bar{w} \cdot \bar{e}_1 &= (2, 9, -7) \cdot (1, 0, 0) = 2, \\
\bar{w} \cdot \bar{e}_2 &= (2, 9, -7) \cdot (0, 1, 0) = 9, \\
\bar{w} \cdot \bar{e}_3 &= (2, 9, -7) \cdot (0, 0, 1) = -7,
\end{aligned}$$

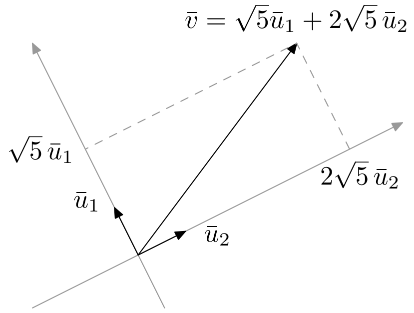
saadaan $\bar{w} = 2\bar{e}_1 + 9\bar{e}_2 - 7\bar{e}_3$. (Tämän olisimme toki voineet päätellä suoraankin.)

Esimerkki 12.24. Tarkastellaan esimerkissä 12.20 muodostettua avaruuden $\mathbb{R}^2$ ortonormaalia kantaa $(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$, jossa

$$\bar{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1, 2), \qquad \bar{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1).$$

Vektorin $\bar{v} = (3,4)$ koordinaatit tämän kannan suhteen ovat

$$\begin{aligned}
\bar{v} \cdot \bar{u}_1 &= \frac{1}{\sqrt{5}}\Big((3,4)\cdot(-1,2)\Big) = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}, \\
\bar{v} \cdot \bar{u}_2 &= \frac{1}{\sqrt{5}}\Big((3,4)\cdot(2,1)\Big) = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}.
\end{aligned}$$



Kuva 12.38: Vektorin $\bar{v}$ koordinaantit ortonormaalin kannan $(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ suhteen.

13 Ristitulo

Avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektoreille voidaan määritellä ristitulo. Ristitulon tulos on avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektori. Ristitulosta on hyötyä esimerkiksi silloin, kun tarvitaan vektori, joka on kohtisuorassa tasoa vastaan.

Määritelmä 13.1. Vektorien $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ ja $\bar{w} = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$ *ristitulo* on vektori

$$\bar{v} \times \bar{w} = (v_2w_3 - v_3w_2,\ v_3w_1 - v_1w_3,\ v_1w_2 - v_2w_1).$$

Ristitulon $\bar{v} \times \bar{w}$ laskemiseen voi käyttää kuvassa 13.39 esitettyä laskusääntöä. Yhtenäisellä viivalla yhdistettyjen komponenttien tulosta vähennetään katkoviivalla yhdistettyjen komponenttien tulo.

$$\begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_1 & v_2 \\ \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_1 & w_2 \end{array}$$

Kuva 13.39: Ristitulon $\bar{v} \times \bar{w}$ laskeminen.

Esimerkki 13.2. Merkitään $\bar{a} = (2, 1, 4)$ ja $\bar{b} = (3, -1, -3)$. Tällöin

$$\begin{aligned} \bar{a} \times \bar{b} &= (1 \cdot (-3) - 4 \cdot (-1),\ 4 \cdot 3 - 2 \cdot (-3),\ 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 3) \\ &= (1, 18, -5). \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccc} 2 & 1 & 4 & 2 & 1 \\ \\ 3 & -1 & -3 & 3 & -1 \end{array}$$

Kuva 13.40: Ristitulon $\bar{a} \times \bar{b}$ laskeminen.

Ristitulolle saadaan toinen muistisääntö determinantin avulla. Vektoreiden $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ ristitulo saadaan laskemalla determinantti

$$\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Tässä $\bar{i} = (1, 0, 0)$, $\bar{j} = (0, 1, 0)$ ja $\bar{k} = (0, 0, 1)$. Tarkalleen ottaen determinantin alkiot eivät voi olla vektoreita. Kyseessä on kuitenkin vain muistisääntö, ja vektoreiden $\bar{i}$, $\bar{j}$ ja $\bar{k}$ ajatellaan käyttäytyvän determinanttia laskettaessa reaalilukujen tavoin.

Esimerkiksi vektoreiden $\bar{a} = (2,1,4)$ ja $\bar{b} = (3,-1,-3)$ ristitulo on

$$\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -3\bar{i} + 12\bar{j} - 2\bar{k} - 3\bar{k} + 4\bar{i} + 6\bar{j} = \bar{i} + 18\bar{j} - 5\bar{k} = (1, 18, -5).$$

Ristitulon avulla voidaan löytää vektori, joka on kohtisuorassa kahta vektoria vastaan.

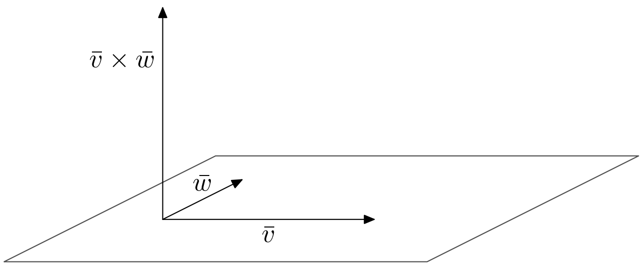
Lause 13.3. *Oletetaan, että $\bar{v}$, $\bar{w} \in \mathbb{R}^3$. Tällöin*

$$(\bar{v} \times \bar{w}) \perp \bar{v} \quad \textit{ja} \quad (\bar{v} \times \bar{w}) \perp \bar{w}.$$

Todistus. Huomataan, että

$$\begin{aligned}(\bar{v} \times \bar{w}) \cdot \bar{v} &= (v_2w_3 - v_3w_2,\ v_3w_1 - v_1w_3,\ v_1w_2 - v_2w_1) \cdot (v_1, v_2, v_3) \\ &= (v_2w_3 - v_3w_2)v_1 + (v_3w_1 - v_1w_3)v_2 + (v_1w_2 - v_2w_1)v_3 \\ &= v_2w_3v_1 - v_3w_2v_1 + v_3w_1v_2 - v_1w_3v_2 + v_1w_2v_3 - v_2w_1v_3 = 0.\end{aligned}$$

Siten vektorit $(\bar{v} \times \bar{w})$ ja $\bar{v}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Väitteen toinen osa osoitetaan samalla tavalla. □



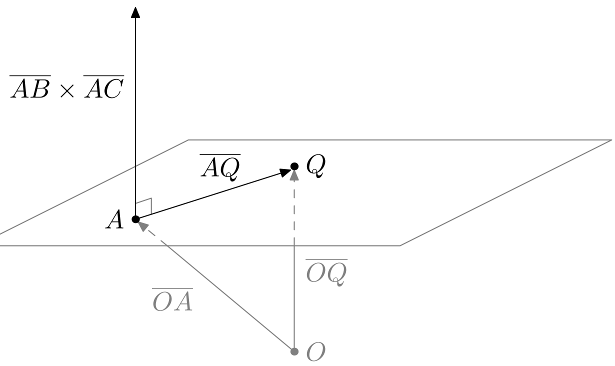
Kuva 13.41: Ristitulo $\bar{v} \times \bar{w}$ on kohtisuorassa vektoria $\bar{v}$ ja vektoria $\bar{w}$ vastaan.

Ristitulon avulla voidaan löytää tason normaali (eli vektori, joka on kohtisuorassa tason suuntavektoreita vastaan). Tästä on hyötyä tason normaalimuotoisen yhtälön määrittämisessä.

Esimerkki 13.4. Määritetään normaalimuotoinen yhtälö tasolle T, joka kulkee pisteiden $A = (0,1,0)$, $B = (-1,3,2)$ ja $C = (-2,0,1)$ kautta. Tätä varten tarvitaan tason T normaali. Vektorien $\overline{AB} = (-1,2,2)$ ja $\overline{AC} = (-2,-1,1)$ ristitulo

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = (4,-3,5)$$

käy edellisen lauseen nojalla tähän tarkoitukseen.



Kuva 13.42: Tason T normaalimuotoisen yhtälön määrittäminen.

Lisäksi tarvitaan vektori jostakin tason pisteestä pisteeseen $Q = (x, y, z)$. Valitaan vektori $\overline{AQ} = \overline{OQ} - \overline{OA} = (x, y - 1, z)$. Tason T normaalimuotoiseksi yhtälöksi saadaan $(\overline{AB} \times \overline{AC}) \cdot \overline{AQ} = 0$ eli

$$(4, -3, 5) \cdot (x, y - 1, z) = 0.$$

Laskemalla pistetulo saadaan yhtälö muotoon

$$4x - 3y + 5z + 3 = 0.$$

Siten $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x - 3y + 5z + 3 = 0\}$.

Esimerkki 13.5. Pisteen etäisyys tasosta voidaan määrittää ristitulon ja projektion avulla. Merkitään $A = (0, 1, 0)$, $B = (-1, 3, 2)$ ja $C = (-2, 0, 1)$. Oletetaan, että taso T kulkee pisteiden A, B ja C kautta. Määritetään pisteen $D = (1, 2, 3)$ etäisyys tasosta T (ks. kuva 13.43).

Tason suuntaisten vektoreiden $\overline{AB} = (-1, 2, 2)$ ja $\overline{AC} = (-2, -1, 1)$ ristitulo

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = (4, -3, 5)$$

on tason normaali. Lisäksi tarvitaan vektori jostakin tason pisteestä pisteeseen $D = (1, 2, 3)$. Valitaan vektori

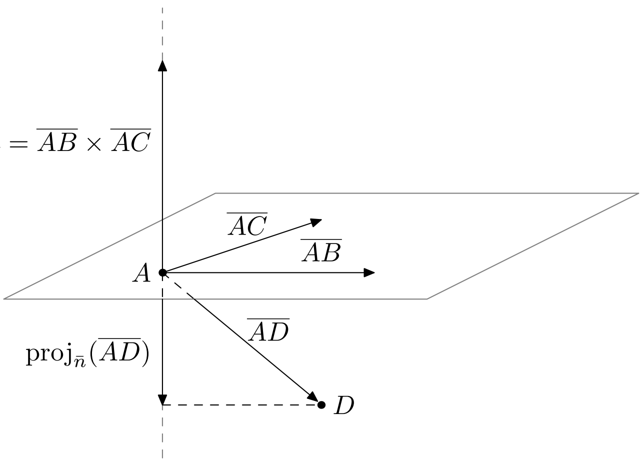
$$\overline{AD} = \overline{OD} - \overline{OA} = (1, 1, 3).$$

Vektorin $\overline{AD}$ projektio normaalin $\bar{n} = \overline{AB} \times \overline{AC}$ virittämälle aliavaruudelle on

$$\operatorname{proj}_{\bar{n}}(\overline{AD}) = \frac{\overline{AD} \cdot \bar{n}}{\bar{n} \cdot \bar{n}}\,\bar{n} = \frac{16}{50}\,(4, -3, 5) = \frac{8}{25}\,(4, -3, 5).$$

Tämän projektion normi (eli pituus) on pisteen P etäisyys tasosta T:

$$\|\operatorname{proj}_{\bar{n}}(\overline{AD})\| = \frac{8}{25}\,\|(4, -3, 5)\| = \frac{8}{25}\sqrt{16 + 9 + 25} = \frac{8}{25}\sqrt{50} = \frac{8}{5}\sqrt{2}.$$



Kuva 13.43: Pisteen D etäisyys tasosta T.

Käydään vielä läpi muutamia ristituloon liittyviä laskusääntöjä.

Lause 13.6. *Oletetaan, että $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w} \in \mathbb{R}^3$ ja $c \in \mathbb{R}$. Tällöin*

a) $\bar{v} \times \bar{w} = -(\bar{w} \times \bar{v})$ *(antikommutointi)*

b) $\bar{u} \times (\bar{v} + \bar{w}) = \bar{u} \times \bar{v} + \bar{u} \times \bar{w}$ *(osittelulaki)*

c) $(\bar{v} + \bar{w}) \times \bar{u} = \bar{v} \times \bar{u} + \bar{w} \times \bar{u}$ *(osittelulaki)*

d) $c(\bar{v} \times \bar{w}) = (c\bar{v}) \times \bar{w} = \bar{v} \times (c\bar{w})$

e) $\bar{v} \times \bar{v} = \bar{0}$

f) $\bar{0} \times \bar{v} = \bar{0}$ *ja* $\bar{v} \times \bar{0} = \bar{0}$

g) $\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{w}) = (\bar{u} \times \bar{v}) \cdot \bar{w}$

Todistus. Lauseen todistus on suoraviivainen ja käyttää ainoastaan ristitulon määritelmää. Todistus jätetään harjoitustehtäväksi. □

Ristitulolla on myös pistetuloon liittyviä laskusääntöjä.

Lause 13.7. *Oletetaan, että $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w} \in \mathbb{R}^3$. Tällöin*

a) $(\bar{u} \times \bar{v}) \times \bar{w} = (\bar{u} \cdot \bar{w})\bar{v} - (\bar{v} \cdot \bar{w})\bar{u}$

b) $\bar{u} \times (\bar{v} \times \bar{w}) = (\bar{u} \cdot \bar{w})\bar{v} - (\bar{u} \cdot \bar{v})\bar{w}$

c) $\|\bar{v} \times \bar{w}\|^2 = \|\bar{v}\|^2\|\bar{w}\|^2 - (\bar{v} \cdot \bar{w})^2$ *(Lagrangen identiteetti)*

Todistus. Osoitetaan kohta c) (eli Lagrangen identiteetti) ja jätetään muut kohdat harjoitustehtäviksi. Käyttämällä lauseen 13.6 kohtaa g) ja lauseen 13.7 kohtaa a) saadaan

$$\begin{aligned}
\|\bar{v} \times \bar{w}\|^2 &= (\bar{v} \times \bar{w}) \cdot (\bar{v} \times \bar{w}) = ((\bar{v} \times \bar{w}) \times \bar{v}) \cdot \bar{w} \\
&= ((\bar{v} \cdot \bar{v})\bar{w} - (\bar{v} \cdot \bar{w})\bar{v}) \cdot \bar{w} = (\|\bar{v}\|^2\bar{w} - (\bar{v} \cdot \bar{w})\bar{v}) \cdot \bar{w} \\
&= \|\bar{v}\|^2(\bar{w} \cdot \bar{w}) - (\bar{v} \cdot \bar{w})(\bar{v} \cdot \bar{w}) = \|\bar{v}\|\|\bar{w}\|^2 - (\bar{v} \cdot \bar{w})^2.
\end{aligned}$$

Siten Lagrangen identiteetti pätee. □

Lause 13.8. *Oletetaan, että $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^3$. Jos $\bar{v} \neq \bar{0}$ ja $\bar{w} \neq \bar{0}$, niin*

$$\|\bar{v} \times \bar{w}\| = \|\bar{v}\|\|\bar{w}\| \sin \alpha,$$

missä α on vektorien $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ välinen kulma.

Todistus. Todistuksessa käytetään Lagrangen identiteettiä (lause 13.7). Vektorien välisen kulman määritelmän mukaan $\cos \alpha = (\bar{v} \cdot \bar{w})/(\|\bar{v}\|\|\bar{w}\|)$, ja lisäksi pätee $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. Nyt Lagrangen identiteetistä saadaan

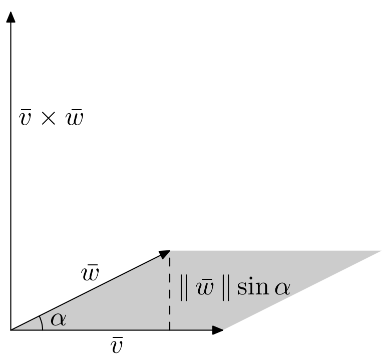
$$\begin{aligned}
\|\bar{v} \times \bar{w}\|^2 &= \|\bar{v}\|^2\|\bar{w}\|^2 - (\bar{v} \cdot \bar{w})^2 = \|\bar{v}\|^2\|\bar{w}\|^2 - (\cos \alpha \|\bar{v}\|\|\bar{w}\|)^2 \\
&= \|\bar{v}\|^2\|\bar{w}\|^2 - \cos^2 \alpha \|\bar{v}\|^2\|\bar{w}\|^2 = \|\bar{v}\|^2\|\bar{w}\|^2(1 - \cos^2 \alpha) \\
&= \|\bar{v}\|^2\|\bar{w}\|^2 \sin^2 \alpha = (\|\bar{v}\|\|\bar{w}\| \sin \alpha)^2.
\end{aligned}$$

Vektorien välisen kulman määritelmän mukaan $0° \leq \alpha \leq 180°$, mistä seuraa, että $\sin \alpha \geq 0$. Lisäksi vektorien normit ovat aina epänegatiivisia. Siten $\|\bar{v} \times \bar{w}\| \geq 0$ ja $\|\bar{v}\|\|\bar{w}\| \sin \alpha \geq 0$. Saadusta yhtälöstä voidaan näin ollen päätellä, että

$$\|\bar{v} \times \bar{w}\| = \|\bar{v}\|\|\bar{w}\| \sin \alpha.$$

Tämä todistaa väitteen. □

Edellisestä lauseesta seuraa, että ristitulovektorin $\bar{v} \times \bar{w}$ pituus on yhtä suuri kuin vektorien $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ määräämän suunnikkaan ala (ks. kuva 13.44). Oletetaan, että vektorien $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ välinen kulma on α. Tällöin suunnikkaan korkeus on $\|\bar{w}\| \sin \alpha$. Näin suunnikkaan pinta-alaksi saadaan $\|\bar{w}\| \sin \alpha \cdot \|\bar{v}\| = \|\bar{v} \times \bar{w}\|$.



Kuva 13.44: Ristitulovektorin $\bar{v} \times \bar{w}$ pituus on yhtä suuri kuin vektorien $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ määräämän suunnikkaan ala.

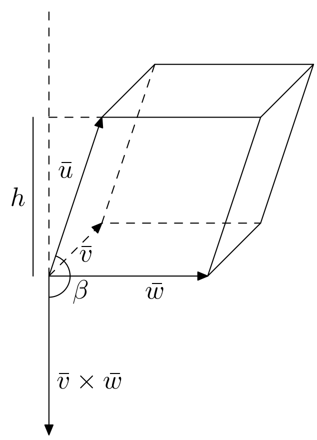
Ristitulon avulla voidaan määrittää myös suuntaissärmiön tilavuus. Vektoreiden $\bar{v}$, $\bar{w}$ ja $\bar{u}$ määräämään suuntaissärmiön tilavuus on pohjan pinta-alan $\|\bar{v} \times \bar{w}\|$ ja korkeuden h tulo (ks. kuva 13.45). Pohjan pinta-alan tiedetään edellisen kappaleen perusteella olevan $\|\bar{v} \times \bar{w}\|$. Määritetään vielä korkeus h. Olkoon β vektoreiden $\bar{u}$ ja $\bar{v} \times \bar{w}$ välinen kulma. Nyt

$$h = \|\bar{u}\| \left|\cos(180^\circ - \beta)\right| = \|\bar{u}\| \left|\cos\beta\right| .$$

Siten tilavuus on

$$\|\bar{v} \times \bar{w}\| \|\bar{u}\| \left|\cos\beta\right| = \Big| \|\bar{v} \times \bar{w}\| \|\bar{u}\| \cos\beta \Big| = \Big| (\bar{v} \times \bar{w}) \cdot \bar{u} \Big|.$$

Viimeisessä välivaiheessa käytettiin vektorien $\bar{u}$ ja $\bar{v} \times \bar{w}$ välisen kulman määritelmää. Suunnikkaan tilavuus on siis niin kutsutun *skalaarikolmitulon* itseisarvo.



Kuva 13.45: Vektoreiden $\bar{v}$, $\bar{w}$ ja $\bar{u}$ määräämään suuntaissärmiön tilavuus.