23 Sisätulo

Ottamalla lähtökohdaksi avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektorien pistetulon ominaisuudet, voidaan määritellä vektoriavaruuteen V yleisempi sisätulon käsite.

Määritelmä 23.1. Vektoriavaruuden V *sisätulo* on sääntö, joka liittää jokaiseen vektoriavaruuden V alkiopariin $(\bar{v}, \bar{w})$ yksikäsitteisen reaaliluvun $\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle$. Lisäksi sisätulon on toteutettava seuraavat ehdot kaikilla $\bar{v}, \bar{w}, \bar{u} \in V$ ja $c \in \mathbb{R}$:

1) $\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle = \langle \bar{w}, \bar{v} \rangle$
2) $\langle \bar{v}, \bar{w} + \bar{u} \rangle = \langle \bar{v}, \bar{w} \rangle + \langle \bar{v}, \bar{u} \rangle$
3) $\langle c\bar{v}, \bar{w} \rangle = c\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle$
4) $\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle \geq 0$; lisäksi $\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle = 0$ jos ja vain jos $\bar{v} = \bar{0}$.

Vektoriavaruutta, jossa on määritelty sisätulo, kutsutaan *sisätuloavaruudeksi.* Huomaa, että ehdoista 1 ja 2 seuraa, että $\langle \bar{v} + \bar{u}, \bar{w} \rangle = \langle \bar{v}, \bar{w} \rangle + \langle \bar{u}, \bar{w} \rangle$ kaikilla $\bar{v}, \bar{w}, \bar{u} \in V$. Samalla tavalla $\langle \bar{v}, c\bar{w} \rangle = c\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle$ kaikilla $\bar{v}, \bar{w} \in V$ ja $c \in \mathbb{R}$.

Esimerkki 23.2. Vektoriavaruuden $\mathbb{R}^n$ pistetulo on sisätulo. Tässä tapauksessa $\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle = \bar{v} \cdot \bar{w}$, kun $\bar{v}, \bar{w} \in V$.

Esimerkki 23.3. Vektoriavaruudessa $\mathbb{R}^n$ voidaan määritellä myös muita sisätuloja. Osoitetaan, että kaava $\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle = v_1w_1 + 2v_2w_2$ määrittää avaruuden $\mathbb{R}^2$ sisätulon. Oletetaan, että $\bar{v}, \bar{w}, \bar{u} \in V$ ja $c \in \mathbb{R}$.

1) Reaalilukujen kertolaskun vaihdannaisuudesta seuraa, että

$$\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle = v_1w_1 + 2v_2w_2 = w_1v_1 + 2w_2v_2 = \langle \bar{w}, \bar{v} \rangle.$$

Siis ehto 1 pätee.

2) Ehto 2 saadaan puolestaan reaalilukujen osittelulaista sekä yhteenlaskun liitännäisyydestä ja vaihdannaisuudesta:

$$\begin{aligned}\langle \bar{v}, \bar{w} + \bar{u} \rangle &= v_1(w_1 + u_1) + 2v_2(w_2 + u_2) \\ &= v_1w_1 + v_1u_1 + 2v_2w_2 + 2v_2u_2 \\ &= v_1w_1 + 2v_2w_2 + v_1u_1 + 2v_2u_2 \\ &= \langle \bar{v}, \bar{w} \rangle + \langle \bar{v}, \bar{u} \rangle.\end{aligned}$$

3) Myös ehto 3 pätee, sillä

$$\langle c\bar{v}, \bar{w} \rangle = cv_1w_1 + 2cv_2w_2 = c(v_1w_1 + 2v_2w_2) = c\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle.$$

4) Nähdään, että $\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle = v_1v_1 + 2v_2v_2 = v_1^2 + v_2^2 \geq 0$. Osoitetaan vielä, että $\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle = 0$, jos ja vain jos $\bar{v} = \bar{0}$. Tämä täytyy tehdä kahdessa osassa.

"$\Rightarrow$": Oletetaan ensin, että $\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle = 0$. Nyt $v_1^2 + 2v_2^2 = 0$. Koska kumpikaan yhtälön vasemman puolen summattavista ei ole negatiivinen, täytyy päteä $v_1^2 = 0$ ja $2v_2^2 = 0$. Tästä seuraa, että $v_1 = 0$ ja $v_2 = 0$. Siis $\bar{v} = \bar{0}$.

"$\Leftarrow$": Oletetaan sitten, että $\bar{v} = \bar{0}$. Nyt

$$\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle = \langle \bar{0}, \bar{0} \rangle = 0^2 + 2 \cdot 0^2 = 0.$$

Siten viimeinenkin ehto pätee, ja kyseessä on sisätulo.

Esimerkki 23.4. Joukko

$$C([0,1]) = \{f \colon [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ on jatkuva}\}$$

on vektoriavaruus, kun yhteenlasku ja skalaarikertolasku määritellään pisteittäin samaan tapaan kuin esimerkissä 14.5. Vektoriavaruudessa $C([0,1])$ voidaan määritellä sisätulo kaavalla

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx.$$

Lemma 23.5. *Sisätuloavaruudessa V pätee $\langle \bar{v}, \bar{0} \rangle = 0$ ja $\langle \bar{0}, \bar{v} \rangle = 0$ kaikilla $\bar{v} \in V$.*

Todistus. Oletetaan, että V on sisätuloavaruus ja $\bar{v} \in V$. Sisätulon määritelmän mukaan

$$\langle \bar{v}, \bar{0} \rangle = \langle \bar{v}, \bar{0} + \bar{0} \rangle = \langle \bar{v}, \bar{0} \rangle + \langle \bar{v}, \bar{0} \rangle.$$

Vähentämällä yhtälön molemmilta puolilta luku $\langle \bar{v}, \bar{0} \rangle$, saadaan $\langle \bar{v}, \bar{0} \rangle = 0$. Lisäksi sisätulon määritelmän perusteella $\langle \bar{0}, \bar{v} \rangle = \langle \bar{v}, \bar{0} \rangle = 0$. □

23.1 Normi ja kohtisuoruus

Sisätuloavaruudessa voidaan määritellä normi samaan tapaan kuin avaruuden $\mathbb{R}^n$ pistetulon tapauksessa.

Määritelmä 23.6. Olkoon V sisätuloavaruus. Tällöin vektorin $\bar{v} \in V$ *normi* on

$$\|\bar{v}\| = \sqrt{\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle}.$$

Sisätulon määritelmän mukaan $\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle \geq 0$ kaikilla $\bar{v} \in V$, joten normi on aina määritelty. Sisätuloavaruuden normille pätevät tutut tulokset.

Lause 23.7. *Oletetaan, että V on sisätuloavaruus, $\bar{v} \in V$ ja $c \in \mathbb{R}$. Tällöin*

a) $\|\bar{v}\| \geq 0$

b) $\|\bar{v}\| = 0$*, jos ja vain jos* $\bar{v} = 0$

c) $\|c\bar{v}\| = c\|\bar{v}\|$.

Todistus. Lauseen todistus on samanlainen kuin pistetulon tapauksessa (lauseet 12.5 ja 12.6). □

Esimerkki 23.8. Sisätuloavaruuden *yksikköympyrä* koostuu kaikista niistä vektoreista, joiden pituus on yksi. Esimerkiksi avaruuden $\mathbb{R}^2$ ja pistetulon tapauksessa yksikköympyrä on joukko

$$\{\bar{v} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\bar{v}\| = 1\} = \{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \mid v_1^2 + v_2^2 = 1\}.$$

Kun vektorit tulkitaan tason pisteiksi, voi yksikköympyrästä piirtää kuvan koordinaatistoon. Sen alkiot muodostavat ympyrän, jonka säde on yksi ja keskipiste $(0, 0)$.

Tutkitaan sitten esimerkissä 23.3 esiteltyä avaruuden $\mathbb{R}^2$ sisätuloa, joka määriteltiin kaavalla $\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle = v_1 w_1 + 2v_2 w_2$. Tällöin yksikköympyrä on joukko

$$\{\bar{v} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\bar{v}\| = 1\} = \{\bar{v} \in \mathbb{R}^2 \mid \langle \bar{v}, \bar{v} \rangle = 1\} = \{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \mid v_1^2 + 2v_2^2 = 1\}.$$

Huomataan, että joukko $\{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \mid v_1^2 + 2v_2^2 = 1\}$ on ellipsi, jonka keskipiste on origo ja akselien pituudet 2 ja $\sqrt{2}$. Tämän sisätulon tapauksessa yksikköympyrä ei siis näytäkään ympyrältä.

Sisätulon avulla voidaan määritellä vektorien kohtisuoruus.

Määritelmä 23.9. Olkoon V sisätuloavaruus. Oletetaan, että $\bar{v}, \bar{w} \in V$. Tällöin vektorit $\bar{v} \in V$ ja $\bar{w} \in V$ ovat *ortogonaaliset* eli *kohtisuorassa toisiaan vastaan*, jos

$$\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle = 0.$$

Koulusta tuttu Pythagoraan lause voidaan yleistää mihin tahansa sisätuloavaruuteen.

Lause 23.10 (Pythagoraan lause). *Olkoon V sisätuloavaruus. Vektorit $\bar{v} \in V$ ja $\bar{w} \in V$ ovat ortogonaaliset, jos ja vain jos*

$$\|\bar{v}\|^2 + \|\bar{w}\|^2 = \|\bar{v} + \bar{w}\|^2.$$

Todistus. Todistus jätetään harjoitustehtäväksi. □

23.2 Kohtisuora komplementti

Aliavaruuden kohtisuora komplementti koostuu niistä vektoreista, jotka ovat kohtisuorassa kaikkia aliavaruuden vektoreita vastaan.

Määritelmä 23.11. Olkoon W sisätuloavaruuden V aliavaruus. Sen *kohtisuora komplementti* on joukko

$$W^{\perp} = \{\bar{v} \in V \mid \langle \bar{v}, \bar{w} \rangle = 0 \text{ kaikilla } \bar{w} \in W\}.$$

Esimerkki 23.12. Tarkastellaan avaruuden $\mathbb{R}^2$ aliavaruutta

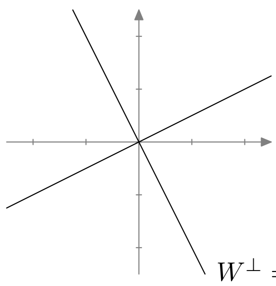
$$W = \operatorname{span}\big((2, 1)\big) = \{t(2, 1) \mid t \in \mathbb{R}\},$$

joka on vektorin $(2, 1)$ suuntainen origon kautta kulkeva suora. Määritetään kohtisuora komplementti $W^{\perp}$, kun sisätulona on tavallinen pistetulo. Kohtisuora komplementti koostuu kaikista niistä vektoreista, jotka ovat kohtisuorassa suoraa vastaan. Kuvan perusteella voidaan päätellä, että kohtisuora komplementti on suora, joka on kohtisuorassa W:tä vastaan (ks. kuva 23.25).

Määritetään aliavaruuden kohtisuora komplementti $W^{\perp}$ vielä täsmällisesti. Nähdään, että

$$
\begin{aligned}
W^{\perp} &= \{\bar{v} \in \mathbb{R}^2 \mid \bar{v} \cdot \bar{w} = 0 \text{ kaikilla } \bar{w} \in W\} \\
&= \{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (v_1, v_2) \cdot t(2, 1) = 0 \text{ kaikilla } t \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \mid t(2v_1 + v_2) = 0 \text{ kaikilla } t \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 2v_1 + v_2 = 0\} \\
&= \{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \mid v_2 = -2v_1\} \\
&= \{(v_1, -2v_1) \mid v_1 \in \mathbb{R}\} \\
&= \{v_1(1, -2) \mid v_1 \in \mathbb{R}\} \\
&= \operatorname{span}\big((1, -2)\big).
\end{aligned}
$$

Ortogonaalinen komplementti on siis origon kautta kulkeva vektorin $(1, -2)$ suuntainen suora.



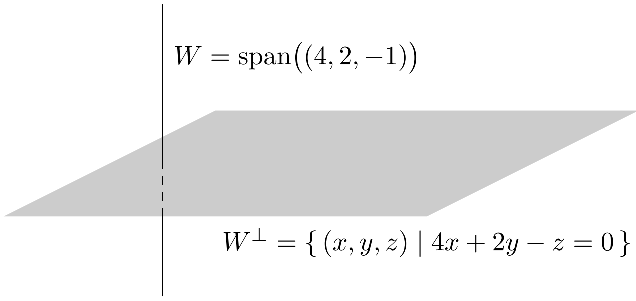
Kuva 23.25: Avaruuden $\mathbb{R}^2$ suoran $\operatorname{span}\big((2, 1)\big)$ kohtisuora komplementti on suora $\operatorname{span}\big((1, -2)\big)$.

Esimerkki 23.13. Tarkastellaan avaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruutta $W = \operatorname{span}\big((4, 2, -1)\big)$, joka on vektorin $(4, 2, -1)$ suuntainen, origon kautta kulkeva suora. Määritetään aliavaruuden kohtisuora komplementti $W^{\perp}$, kun sisätulona on tavallinen pistetulo. Kuvan perusteella vaikuttaisi siltä, että tämän suoran kohtisuora komplementti olisi taso, joka on kohtisuorassa suoraa vastaan (ks. kuva 23.26).

Määritetään kohtisuora komplementti vielä täsmällisesti. Nähdään, että

$$
\begin{aligned}
W^{\perp} &= \{\bar{v} \in \mathbb{R}^3 \mid \bar{v} \cdot \bar{w} = 0 \text{ kaikilla } \bar{w} \in W\} \\
&= \{(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 \mid (v_1, v_2, v_3) \cdot t(4, 2, -1) = 0 \text{ kaikilla } t \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 \mid t(4v_1 + 2v_2 - v_3) = 0 \text{ kaikilla } t \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 4v_1 + 2v_2 - v_3 = 0\}.
\end{aligned}
$$

Ortogonaalinen komplementti on siis origon kautta kulkeva avaruuden $\mathbb{R}^3$ taso, jonka eräs normaali on vektori $(4, 2, -1)$.



Kuva 23.26: Avaruuden $\mathbb{R}^3$ suoran $\operatorname{span}\big((4, 2, -1)\big)$ kohtisuora komplementti on taso $\{(v_1, v_2, v_3) \mid 4v_1 + 2v_2 - v_3 = 0\}$.

Aliavaruuden kohtisuora komplementti on aina aliavaruus.

Lause 23.14. *Olkoon W sisätuloavaruuden V aliavaruus. Sen kohtisuora komplementti $W^{\perp}$ on myös V:n aliavaruus.*

Todistus. Oletetaan, että $\bar{v}, \bar{u} \in W^{\perp}$ ja $c \in \mathbb{R}$. Nyt kaikilla $\bar{w} \in W$ pätee $\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle = 0$ ja $\langle \bar{u}, \bar{w} \rangle = 0$. On osoitettava, että $\bar{v} + \bar{u} \in W^{\perp}$, $c\bar{v} \in W^{\perp}$ ja $\bar{0} \in W^{\perp}$. Toisin sanoen täytyy näyttää, että

$$\langle \bar{v} + \bar{u}, \bar{w} \rangle = 0, \quad \langle c\bar{v}, \bar{w} \rangle = 0 \quad \text{ja} \quad \langle \bar{0}, \bar{w} \rangle = 0$$

kaikilla $\bar{w} \in W$.

Oletetaan tätä varten, että $\bar{w} \in W$. Sisätulon määritelmän nojalla

$$\langle \bar{v} + \bar{u}, \bar{w} \rangle = \langle \bar{v}, \bar{w} \rangle + \langle \bar{u}, \bar{w} \rangle = 0 + 0 = 0.$$

Samalla tavalla nähdään, että

$$\langle c\bar{v}, \bar{w} \rangle = c\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle = c \cdot 0 = 0.$$

Lisäksi lauseen 23.5 nojalla pätee $\langle \bar{0}, \bar{w} \rangle = 0$.

Siten $\langle \bar{v} + \bar{u}, \bar{w} \rangle = 0$, $\langle c\bar{v}, \bar{w} \rangle = 0$ ja $\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle = 0$ kaikilla $\bar{w} \in W$, joten $\bar{v} + \bar{u} \in W^{\perp}$, $c\bar{v} \in W^{\perp}$ ja $\bar{0} \in W^{\perp}$. Näin on osoitettu, että $W^{\perp}$ on aliavaruus. $\square$

Jos vektori on kohtisuorassa aliavaruuden virittäjävektoreita vastaan, se on kohtisuorassa kaikkia aliavaruuden vektoreita vastaan. Pelkkien virittäjävektorien tarkasteleminen siis riittää.

Lause 23.15. *Oletetaan, että W on sisätuloavaruuden V aliavaruus. Oletetaan lisäksi, että $W = \operatorname{span}(\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k)$ ja $\bar{v} \in V$. Jos $\langle \bar{v}, \bar{w}_i \rangle = 0$ kaikilla $i \in \{1, \ldots, k\}$, niin $\bar{v} \in W^{\perp}$.*

Todistus. On osoitettava, että $\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle = 0$ kaikilla $\bar{w} \in W$. Oletetaan siis, että $\bar{w} \in W$. Tällöin $\bar{w} = a_1\bar{w}_1 + a_2\bar{w}_2 + \cdots + a_k\bar{w}_k$ joillakin $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$. Sisätulon määritelmän ehtojen nojalla

$$\begin{aligned}
\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle &= \langle \bar{v}, a_1\bar{w}_1 + a_2\bar{w}_2 + \cdots + a_k\bar{w}_k \rangle \\
&= \langle \bar{v}, a_1\bar{w}_1 \rangle + \langle \bar{v}, a_2\bar{w}_2 \rangle + \cdots + \langle \bar{v}, a_k\bar{w}_k \rangle \\
&= a_1\langle \bar{v}, \bar{w}_1 \rangle + a_2\langle \bar{v}, \bar{w}_2 \rangle + \cdots + a_k\langle \bar{v}, \bar{w}_k \rangle \\
&= a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + \cdots + a_k \cdot 0 = 0\,.
\end{aligned}$$

Siten $\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle = 0$, olipa $\bar{w}$ mikä tahansa aliavaruuden W vektori. Näin ollen $\bar{v} \in W^{\perp}$. □

Esimerkki 23.16. Tarkastellaan vektoriavaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruutta

$$W = \operatorname{span}\big((1,0,3)\,(2,1,5)\big),$$

joka on vektoreiden $\bar{w}_1 = (1,0,3)$ ja $\bar{w}_2 = (2,1,5)$ virittämä, origon kautta kulkeva taso. Kun määritetään tämän aliavaruuden kohtisuoraa komplementtia, riittää tarkastella pelkkiä virittäjävektoreita. Nähdään, että

$$\begin{aligned}
W^{\perp} &= \{\bar{v} \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \bar{v}, \bar{w} \rangle = 0 \text{ kaikilla } \bar{w} \in W\} \\
&= \{\bar{v} \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \bar{v}, \bar{w}_1 \rangle = 0 \text{ ja } \langle \bar{v}, \bar{w}_2 \rangle = 0\} \\
&= \{\bar{v} \in \mathbb{R}^3 \mid \bar{v} \cdot \bar{w}_1 = 0 \text{ ja } \bar{v} \cdot \bar{w}_2 = 0\} \\
&= \{(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 \mid v_1 + 3v_3 = 0 \text{ ja } 2v_1 + v_2 + 5v_3 = 0\}.
\end{aligned}$$

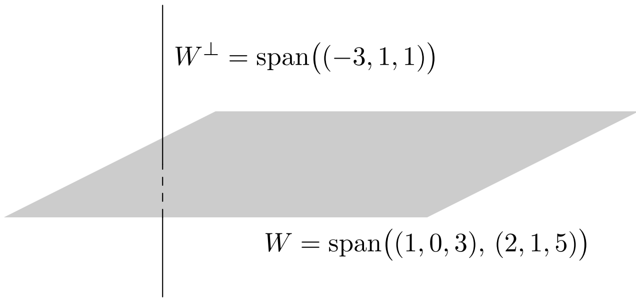
On siis ratkaistava yhtälöpari

$$\begin{cases} v_1 \phantom{{}+v_2} + 3v_3 = 0 \\ 2v_1 + v_2 + 5v_3 = 0. \end{cases}$$

Sen ratkaisut ovat $\bar{v} = (-3t, t, t)$, missä $t \in \mathbb{R}$. Näin ollen

$$\begin{aligned}
W^{\perp} &= \{(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 \mid v_1 + 3v_3 = 0 \text{ ja } 2v_1 + v_2 + 5v_3 = 0\} \\
&= \{t(-3,1,1) \mid t \in \mathbb{R}\} \\
&= \operatorname{span}\big((-3,1,1)\big).
\end{aligned}$$

Ortogonaalinen komplementti on siis vektorin $(-3,1,1)$ virittämä suora (ks. kuva 23.27).



Kuva 23.27: Avaruuden $\mathbb{R}^3$ tason $W = \mathrm{span}\big((1, 0, 3)\,(2, 1, 5)\big)$ kohtisuora komplementti on suora $\mathrm{span}\big((-3, 1, 1)\big)$.

Ainoa vektori, joka on sekä aliavaruudessa että sen kohtisuorassa komplementissa, on nollavektori.

Lause 23.17. *Olkoon W on sisätuloavaruuden V aliavaruus. Tällöin*

$$W \cap W^{\perp} = \{\bar{0}\}.$$

Todistus. "$\subset$": Oletetaan, että $\bar{u} \in W \cap W^{\perp}$. Nyt $\bar{u} \in W$ ja $\bar{u} \in W^{\perp}$. Kohtisuoran komplementin määritelmän mukaan tällöin pätee $\langle \bar{u}, \bar{w} \rangle = 0$ kaikilla $\bar{w} \in W$. Erityisesti $\langle \bar{u}, \bar{u} \rangle = 0$. Sisätulon määritelmästä seuraa, että $\bar{u} = \bar{0}$. Siis $W \cap W^{\perp} \subset \{\bar{0}\}$.

"$\supset$": Koska W ja $W^{\perp}$ ovat kumpikin aliavaruuksia, niin $\bar{0} \in W$ ja $\bar{0} \in W^{\perp}$. Siten $\bar{0} \in W \cap W^{\perp}$. Siis $\{\bar{0}\} \subset W \cap W^{\perp}$. $\square$