22 Ominaisarvot

Määritelmä 22.1. Oletetaan, että A on $n \times n$-neliömatriisi. Luku $\lambda \in \mathbb{R}$ on matriisin A *ominaisarvo*, jos on olemassa sellainen vektori $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$, että $\bar{v} \neq \bar{0}$ ja

$$A\bar{v} = \lambda\bar{v}.$$

Vektoria $\bar{v}$, joka toteuttaa yllä mainitun ehdon kutsutaan ominaisarvoon λ liittyväksi *ominaisvektoriksi.*

Matriisin A ominaisvektori on siis vektori, jolle matriisilla A kertominen vastaa reaaliluvulla λ kertomista. Huomaa, että edellinen määritelmä on sekä ominaisarvon että ominaisvektorin määritelmä. Ominaisarvoa ei voida määritellä ilman ominaisvektoreita eikä ominaisvektoreista voida puhua mainitsematta ominaisarvoa.

Nollavektorin ei haluta olevan ominaisvektori, sillä jos niin olisi, kaikki reaaliluvut olisivat kaikkien matriisien ominaisarvoja.

Esimerkki 22.2. Matriisilla

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

on ominaisarvo 4, sillä

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Eräs ominaisarvoa 4 vastaava ominaisvektori on siis $(1, 1)$.

Samaa ominaisarvoa voi vastata useampi eri ominaisvektori. Esimerkiksi $(2, 2)$ on myös matriisin A ominaisarvoa 4 vastaava ominaisvektori, sillä

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Matriisilla A on toinenkin ominaisarvo. Huomataan nimittäin, että

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

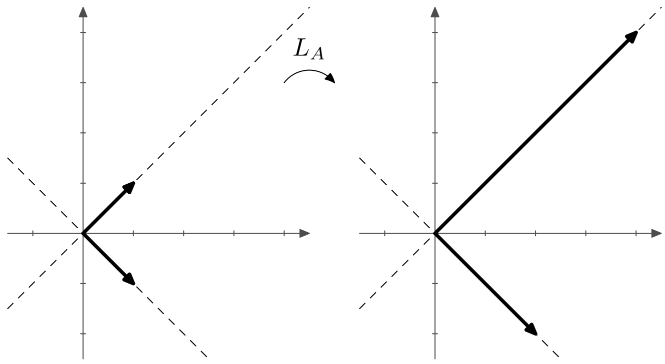
Siten myös luku 2 on matriisin A ominaisarvo.

Esimerkki 22.3. Jokainen matriisi määrä lineaarikuvauksen. Kun matriisia ajatellaan lineaarikuvauksena, saavat ominaisarvot ja ominaisvektorit geometrisen tulkinnan.

Edellisen esimerkin matriisi

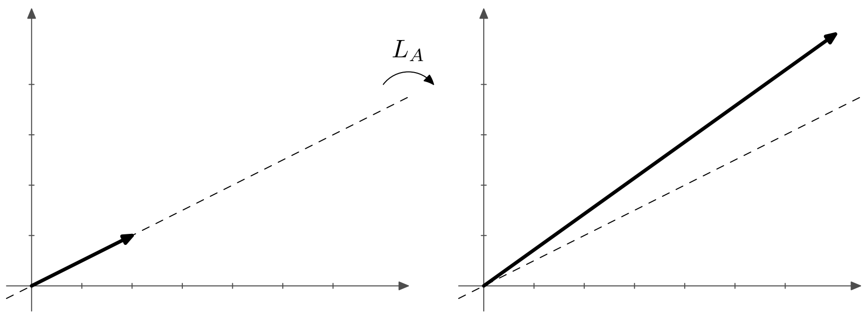
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

määrää lineaarikuvauksen $L_A \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L_A(\bar{x}) = A\bar{x}$. Tässä kuvauksessa ominaisvektorin $(1, 1)$ kuvavektori on $(4, 4)$ ja ominaisvektorin $(2, 2)$ kuvavektori on $(8, 8)$. Kuvaus siis venyttää ominaisarvoa 4 vastaavien ominaisvektoreiden pituuden nelinkertaiseksi. Ominaisarvoa 2 vastaava ominaisvektorin $(1, -1)$ pituus puolestaan kaksinkertaistuu.



Kuva 22.16: Vektorit $(1, 1)$ ja $(1, -1)$ ovat matriisin A ominaisvektoreita.

Jos sen sijaan tutkitaan vektoria $(2, 1)$ nähdään, että sen kuvavektori on $(7, 5)$. Vektori $(2, 1)$ ei ole ominaisvektori, koska sen kuvavektori ei ole vektorin $(2, 1)$ virittämällä suoralla.



Kuva 22.17: Vektori $(2, 1)$ ei ole matriisin A ominaisvektori.

Kun kaikki matriisin A ominaisarvoa λ vastaavat vektorit (sekä nollavektori) kerätään yhteen, saadaan ominaisarvoa vastaava ominaisavaruus.

Määritelmä 22.4. Oletetaan, että matriisilla $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ on ominaisarvo $\lambda \in \mathbb{R}$. Ominaisarvoa λ vastaava *ominaisavaruus* on joukko

$$V_\lambda = \{\bar{v} \in \mathbb{R}^n \mid A\bar{v} = \lambda\bar{v}.\}$$

Esimerkki 22.5. Määritetään esimerkin 22.2 matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

ominaisarvoa 4 vastaava ominaisavaruus eli kaikki ominaisarvoa 4 vastaavat ominaisvektorit.

Vektori $\bar{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ on ominaisarvoa 4 vastaava ominaisvektori, jos ja vain jos

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4v_1 \\ 4v_2 \end{bmatrix}.$$

Tämä yhtälö toteutuu täsmälleen silloin, kun

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4v_1 \\ 4v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

eli

$$\begin{bmatrix} -v_1 + v_2 \\ v_1 - v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Yhtälöä vastaa lineaarinen yhtälöryhmä

$$\begin{cases} -v_1 & + & v_2 & = & 0 \\ v_1 & - & v_2 & = & 0, \end{cases}$$

jossa muuttujina ovat v_1 ja v_2. Gaussin–Jordanin menetelmällä yhtälöryhmän ratkaisuiksi saadaan

$$\begin{cases} v_1 & = & s \\ v_2 & = & s, \end{cases} \qquad \text{missä } s \in \mathbb{R}.$$

Koska nollavektori ei ole ominaisvektori, ovat ominaisvektorit muotoa (s, s), missä $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ominaisavaruuteen myös nollavektori otetaan mukaan. Siten ominaisarvoa 4 vastaava ominaisavaruus on

$$V_4 = \{(s, s) \mid s \in \mathbb{R}\}.$$

Huomataan, että ominaisavaruus on vektorin $(1, 1)$ virittämä aliavaruus:

$$V_4 = \{(s, s) \mid s \in \mathbb{R}\} = \{s(1, 1) \mid s \in \mathbb{R}\} = \operatorname{span}((1, 1)).$$

Ominaisavaruudet ovat aliavaruuksia aivan kuten niiden nimikin antaa olettaa.

Lause 22.6. *Matriisin $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ominaisarvoa λ vastaava ominaisavaruus V_λ on vektoriavaruuden $\mathbb{R}^n$ aliavaruus.*

Todistus. Ensinnäkin V_λ on määritelmänsä perusteella joukon $\mathbb{R}^n$ osajoukko. Oletetaan, että $\bar{v}, \bar{w} \in V_\lambda$ ja $c \in \mathbb{R}$. Nyt $A\bar{v} = \lambda\bar{v}$ ja $A\bar{w} = \lambda\bar{w}$.

a) Ensinnäkin on osoitettava, että $\bar{v} + \bar{w} \in V_\lambda$. Matriisien laskusääntöjen perusteella
$$A(\bar{v} + \bar{w}) = A\bar{v} + A\bar{w} = \lambda\bar{v} + \lambda\bar{w} = \lambda(\bar{v} + \bar{w}).$$
Siis $\bar{v} + \bar{w} \in V_\lambda$.

b) Näytetään sitten, että $c\bar{v} \in V_\lambda$. Koska
$$A(c\bar{v}) = c(A\bar{v}) = c(\lambda\bar{v}) = c\lambda(\bar{v}),$$
pätee $\bar{v} \in V_\lambda$.

c) Lopuksi huomataan, että $A\bar{0} = \bar{0} = \lambda\bar{0}$, joten $\bar{0} \in V_\lambda$.

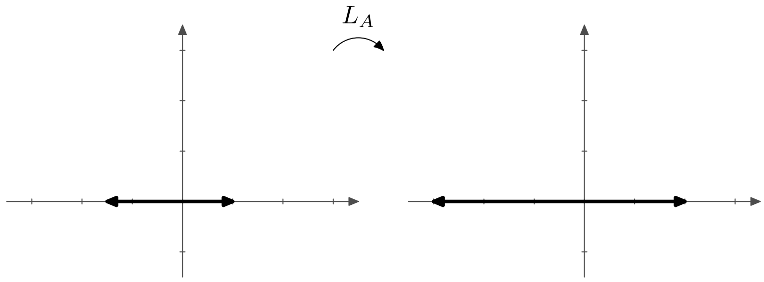
$\square$

Esimerkki 22.7. Toisinaan matriisin ominaisarvot ja -vektorit voi päätellä tarkastelemalla lineaarikuvausta, joka matriisista saadaan. Tutkitaan esimerkin 18.9 matriisien

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

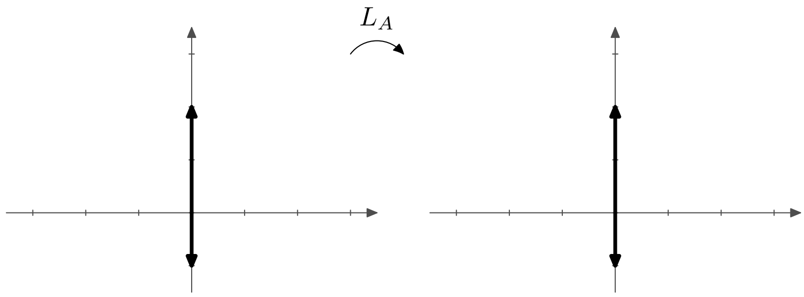
ominaisarvoja ja ominaisvektoreita.

Matriisia A vastaava lineaarikuvaus L_A venyttää vektoreita vaaka-akselin suunnassa kaksinkertaisiksi. Tällaisessa kuvauksessa vektorin $(1, 0)$ suuntaiset vektorit venyvät kaksinkertaisiksi. Tästä voidaan päätellä, että vektorit $t(1, 0)$, missä $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ovat matriisin A ominaisvektoreita. Vastaava ominaisarvo on 2.



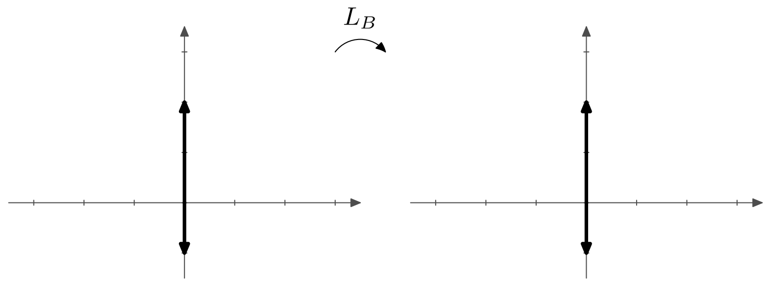
Kuva 22.18: Vaaka-akselin suuntaiset vektorit ovat matriisin A ominaisvektoreita.

Toisaalta vektorin $(0, 1)$ suuntaisille vektoreille ei tapahdu mitään. Siten myös vektorit $t(0, 1)$, missä $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ovat matriisin A ominaisvektoreita. Niitä vastaava ominaisarvo on 1.



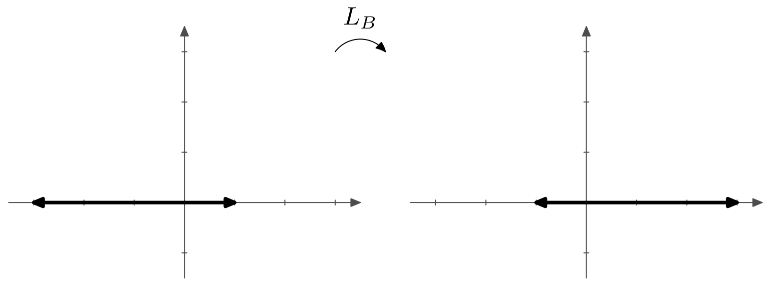
Kuva 22.19: Pystyakselin suuntaiset vektorit ovat matriisin A ominaisvektoreita.

Matriisia B vastaava lineaarikuvaus L_B peilaa vektorit pystyakselin suhteen. Tällaisessa kuvauksessa vektorin $(1, 0)$ suuntaisille vektoreille ei tapahdu mitään. Näin ollen vektorit $t(1, 0)$, missä $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ovat matriisin B ominaisvektoreita, ja vastaava ominaisarvo on 1.



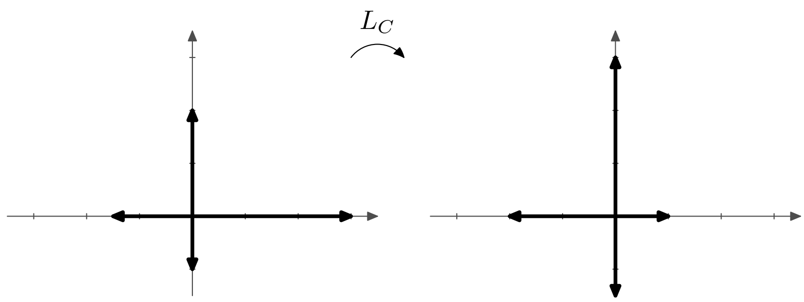
Kuva 22.20: Pystyakselin suuntaiset vektorit ovat matriisin B ominaisvektoreita.

Vektorin $(0, 1)$ suuntaiset vektorit kuvautuvat vastavektoreikseen. Siis vektorit $t(0, 1)$, missä $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ovat ominaisvektoreita. Niitä vastaava ominaisarvo on -1.



Kuva 22.21: Vaaka-akselin suuntaiset vektorit ovat matriisin B ominaisvektoreita.

Matriisia C vastaava lineaarikuvaus L_C kiertää vektoreita origon ympäri $90°$ vastapäivään eli positiiviseen kiertosuuntaan. Kuvauksessa L_C kaikkien nollasta poikkeavien vektorien suunta muuttuu $90°$. Tästä voidaan päätellä, että matriisilla C ei ole ominaisvektoreita eikä ominaisarvoja.



Kuva 22.22: Matriisilla C kertominen muuttaa vektoreiden suuntaa $90°$.

22.1 Karakteristinen polynomi

Seuraava lause antaa suoraviivaisen tavan löytää matriisin ominaisarvot.

Lause 22.8. *Oletetaan, että* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. *Reaaliluku* λ *on matriisin* A *ominaisarvo, jos ja vain jos* $\det(A - \lambda I) = 0$.

Todistus. "$\Rightarrow$": Oletetaan, että $\lambda \in \mathbb{R}$ on matriisin A ominaisarvo. Nyt on olemassa $\bar{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$, jolle pätee $A\bar{v} = \lambda\bar{v}$. Vektori $\lambda\bar{v}$ voidaan yhtä hyvin kirjoittaa muodossa $\lambda I\bar{v}$, jolloin kyseessä onkin matriisin λI ja vektorin $\bar{v}$ matriisitulo. Nyt tutkittavana on yhtälö $A\bar{v} = \lambda I\bar{v}$. Matriisien laskusääntöjen nojalla tästä saadaan $A\bar{v} - \lambda I\bar{v} = \bar{0}$ ja edelleen $(A - \lambda I)\bar{v} = \bar{0}$.

Koska $(A - \lambda I)\bar{v} = \bar{0}$, yhtälöllä $(A - \lambda I)\bar{x} = \bar{0}$ on epätriviaali (eli nollasta poikkeava) ratkaisu $\bar{x} = \bar{v}$. Nyt nähdään, että lauseen 10.7 nojalla $A - \lambda I$ ei ole kääntyvä. Lauseen 11.4 perusteella puolestaan $\det(A - \lambda I) = 0$.

"$\Leftarrow$": Oletetaan sitten, että $\det(A-\lambda I) = 0$ jollakin reaaliluvulla λ. Nyt matriisi $A - \lambda I$ ei ole kääntyvä. Tästä seuraa, että yhtälöllä $(A - \lambda I)\bar{x} = \bar{0}$ on epätriviaali ratkaisu. Olkoon tuo ratkaisu $\bar{v}$. Nyt siis $\bar{v} \neq \bar{0}$. Koska $(A - \lambda I)\bar{v} = \bar{0}$, saadaan matriisien laskusääntöjen avulla yhtälö $A\bar{v}-\lambda I\bar{v} = \bar{0}$, mistä seuraa samaan tapaan kuin yllä, että $A\bar{v} = \lambda\bar{v}$. Siten λ on matriisin A ominaisarvo. □

Määritelmä 22.9. Oletetaan, että A on $n \times n$-matriisi. Muuttujan λ polynomi, joka saadaan kirjoittamalla auki determinantti $\det(A-\lambda I)$, on nimeltään matriisin A *karakteristinen poynomi.*

Lauseen 22.8 perusteella matriisin ominaisarvot ovat sen karakteristisen polynomin nollakohdat.

Esimerkki 22.10. Määritetään matriisin $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ominaisarvot karakteristisen polynomin avulla. Nähdään, että

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{bmatrix}.$$

Nyt

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) - 6 \\ &= 2 - \lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4, \end{aligned}$$

joten A:n karakteristinen polynomi on $\lambda^2 - 3\lambda - 4$.

Matriisin A ominaisarvot ovat nyt yhtälön $\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$ ratkaisut. Toisen asteen ratkaisukaavan avulla saadaan yhtälön ratkaisuiksi $\lambda = 4$ ja $\lambda - 1$. Siten matriisin ominaisarvot ovat 4 ja -1.

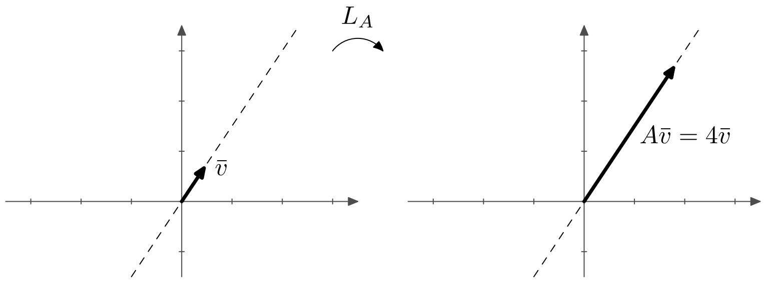
Selvitetään vielä ominaisarvoja vastaavat ominaisavaruudet. Ominaisarvoa 4 vastaava ominaisavaruus on joukko $V_4 = \{\bar{v} \in \mathbb{R}^2 \mid A\bar{v} = 4\bar{v}\}$. Sen alkiot löydetään ratkaisemalla yhtälö $A\bar{x} = 4\bar{x}$ eli yhtälö $(A - 4I)\bar{x} = \bar{0}$. Tätä yhtälöä vastaavan yhtälöryhmän ratkaisut ovat

$$\begin{cases} x_1 = (2/3)t \\ x_2 = t \end{cases}, \quad \text{missä } t \in \mathbb{R}.$$

Näin ollen

$$\begin{aligned}V_4 &= \{\bar{v} \in \mathbb{R}^2 \mid A\bar{v} = 4\bar{v}\} = \{((2/3)t, t) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{t(2/3, 1) \mid t \in \mathbb{R}\} \\ &= \operatorname{span}\big((2/3, 1)\big) = \operatorname{span}\big((2, 3)\big).\end{aligned}$$

Matriisin A määräämä kuvaus L_A venyttää ominaisavaruuden $V_4 = \operatorname{span}\big((2, 3)\big)$ vektorit nelinkertaisiksi, kuten kuvasta 22.23 nähdään.



Kuva 22.23: Ominaisavaruuden V_4 vektorit nelinkertaistuvat.

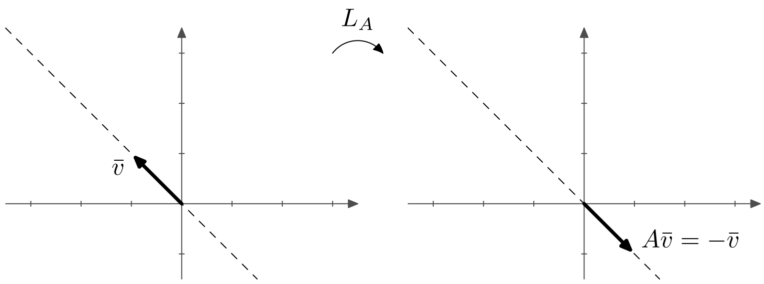
Ominaisarvoa -1 vastaava ominaisavaruus on $V_{-1} = \{\bar{v} \in \mathbb{R}^2 \mid A\bar{v} = -\bar{v}\}$. Sen alkiot löydetään vastaavasti ratkaisemalla yhtälö $A\bar{x} = -\bar{x}$ eli yhtälö $(A+I)\bar{x} = \bar{0}$. Tätä yhtälöä vastaavan yhtälöryhmän ratkaisut ovat

$$\begin{cases} x_1 = -t \\ x_2 = t \end{cases}, \quad \text{missä } t \in \mathbb{R}.$$

Näin ollen

$$\begin{aligned}V_{-1} &= \{\bar{v} \in \mathbb{R}^2 \mid A\bar{v} = -\bar{v}\} = \{(-t, t) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{t(-1, 1) \mid t \in \mathbb{R}\} \\ &= \operatorname{span}\big((-1, 1)\big).\end{aligned}$$

Matriisin A määräämä kuvaus L_A kääntää ominaisavaruuden $V_{-1} = \operatorname{span}\big((-1, 1)\big)$ vektorien suunnan päinvastaiseksi (ks. kuva 22.24).



Kuva 22.24: Ominaisavaruuden V_{-1} vektorien suunta vaihtuu päinvastaiseksi.

Lause 22.11. *Jos A on $n \times n$-matriisi, sillä on korkeintaan n ominaisarvoa.*

Todistus. Koska A on $n \times n$-matriisi, sen karakteristinen polynomi on korkeintaan astetta n. Karakteristinen polynomi on siis muotoa $c_0 + c_1\lambda + \cdots + c_n\lambda^n$, missä $c_0, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$. Voidaan osoittaa, että yhtälöllä

$$c_0 + c_1\lambda + \cdots + c_n\lambda^n = 0$$

on enintään n eri ratkaisua. (Tämä tehdään esimerkiksi kurssilla Algebra I.) Näin ollen matriisilla A on enintään n eri ominaisarvoa. □

Eri ominaisarvoja vastaavat ominaisvektorit ovat lineaarisesti riippumattomia.

Lause 22.12. *Oletetaan, että A on $n \times n$-matriisi. Oletetaan, että $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ ovat matriisin A eri ominaisarvoja ja $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_m \in \mathbb{R}^n$ jotkin niitä vastaavat ominaisvektorit. Tällöin jono $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_m)$ on vapaa.*

Todistus. Oletetaan vastoin väitettä, että jono $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_m)$ on sidottu. Nyt lauseen 16.5 nojalla jokin jonon vektoreista on muiden lineaarikombinaatio. Tästä seuraa, että jokin jonon vektoreista on sitä edeltävien jonon vektoreiden lineaarikombinaatio. Olkoon $\bar{v}_{k+1}$ jonon ensimmäinen vektori, joka on sitä edeltävien vektoreiden lineaarikombinaatio. Tällöin on olemassa reaaliluvut $c_1, \ldots, c_k$, joille pätee

$$c_1\bar{v}_1 + \cdots + c_k\bar{v}_k = \bar{v}_{k+1}. \tag{1}$$

Lisäksi jono $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$ on vapaa. Jos se nimittäin ei olisi vapaa, $\bar{v}_{k+1}$ ei olisikaan ensimmäinen vektori, joka on sitä edeltävien vektoreiden lineaarikombinaatio.

Kertomalla yhtälön (1) molemmat puolet vasemmalta matriisilla A saadaan yhtälö

$$A(c_1\bar{v}_1 + \cdots + c_k\bar{v}_k) = A\bar{v}_{k+1}.$$

Matriisien laskusääntöjen avulla yhtälö saa muodon $c_1A\bar{v}_1 + \cdots + c_kA\bar{v}_k = A\bar{v}_{k+1}$. Kun vielä muistetaan, että vektorit $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k$ ovat matriisin A ominaisvektoreita, saadaan lopulta yhtälö

$$c_1\lambda_1\bar{v}_1 + \cdots + c_k\lambda_k\bar{v}_k = \lambda_{k+1}\bar{v}_{k+1}. \tag{2}$$

Toisaalta voidaan kertoa yhtälön (1) molemmat puolet luvulla λ_{k+1} päätyen yhtälöön

$$c_1\lambda_{k+1}\bar{v}_1 + \cdots + c_k\lambda_{k+1}\bar{v}_k = \lambda_{k+1}\bar{v}_{k+1}. \tag{3}$$

Vähennetään yhtälöstä (2) puolittain yhtälö (3), jolloin saadaan

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1})\bar{v}_1 + \cdots + c_k(\lambda_k - \lambda_{k+1})\bar{v}_k = \bar{0}.$$

Jono $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$ on vapaa, joten kaikkien yhtälössä olevien kertoimien on oltava nollia:

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1}) = 0,\ c_2(\lambda_2 - \lambda_{k+1}) = 0, \ldots,\ c_k(\lambda_k - \lambda_{k+1}) = 0.$$

Koska $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ ovat kaikki eri ominaisarvoja, niin tiedetään, että $(\lambda_i - \lambda_{k+1}) \neq 0$ kaikilla $i \in \{1, \ldots, k\}$. Tulon nollasäännön nojalla

$$c_1 = 0,\ c_2 = 0,\ \ldots,\ c_k = 0.$$

Näin ollen

$$\bar{v}_{k+1} = c_1\bar{v}_1 + \cdots + c_k\bar{v}_k = 0\bar{v}_1 + \cdots + 0\bar{v}_k = \bar{0}.$$

Toisaalta oletuksen mukaan $\bar{v}_{k+1}$ on matriisin A ominaisvektori, joten $\bar{v}_{k+1} \neq \bar{0}$. Koska päädyttiin ristiriitaan, vastaoletus ei voi olla tosi. Siis alkuperäinen väite pätee, eli jono $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_m)$ on vapaa. □

22.2 Diagonalisointi

Joistakin matriiseista voidaan muodostaa lävistäjämatriiseja, joilla on samoja ominaisuuksia kuin alkuperäisellä matriisilla. Lävistäjämatriisit ovat hyvin yksinkertaisia matriiseja, joita on helppo käsitellä. Siksi monissa tapauksissa laskut helpottuvat suuresti, kun siirrytään käyttämään lävistäjämatriisia.

Tässä luvussa käsitellään similaarisia matriiseja, joiden ominaisuudet muistuttavat toisiaan. Lisäksi esitellään diagonalisoinnin käsite. Diagonalisoinnissa lähdetään liikkeelle neliömatriisista A ja etsitään lävistäjämatriisi, joka on similaarinen matriisin A kanssa.

Määritelmä 22.13. Matriisi $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ on *similaarinen* matriisin $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ kanssa, jos on olemassa kääntyvä matriisi $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, jolle pätee

$$P^{-1}AP = B.$$

Tällöin merkitään $A \sim B$.

Similaarisuus on määritelty vain neliömatriiseille. Huomaa, että $P^{-1}AP = B$, jos ja vain jos $AP = PB$.

Esimerkki 22.14. Merkitään

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Matriisi A on similaarinen matriisin B kanssa. Tämän osoittamiseen voidaan käyttää matriisia

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ensinnäkin P on kääntyvä, sillä $\det(P) = 1 - (-1) = 2 \neq 0$. Lisäksi

$$AP = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{ja}$$

$$PB = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},$$

joten $AP = PB$. Tästä seuraa, että

$$P^{-1}AP = B.$$

Lause 22.15. *Oletetaan, että A, B ja C ovat $n \times n$-matriiseja. Tällöin*

a) $A \sim A$

b) jos $A \sim B$, niin $B \sim A$

c) jos $A \sim B$ ja $B \sim C$, niin $A \sim C$.

Todistus. Osoitetaan kohta b) ja jätetään loput kohdat harjoitustehtäviksi. Oletetaan, että $A \sim B$. Tällöin on olemassa kääntyvä matriisi P, jolla $P^{-1}AP = B$. Kertomalla tätä yhtälöä vasemmalta matriisilla P ja oikealta matriisilla P^{-1} saadaan $A = PBP^{-1}$.

Merkitään $Q = P^{-1}$. Tällöin Q on kääntyvä ja

$$Q^{-1}BQ = (P^{-1})^{-1}BP^{-1} = PBP^{-1} = A.$$

Siis $B \sim A$. □

Similaariset matriisit muistuttavat toisiaan monessa suhteessa. Niillä on esimerkiksi sama determinantti ja samat ominaisarvot.

Lause 22.16. *Oletetaan, että A ja B ovat $n \times n$ -neliömatriiseja. Oletetaan lisäksi, että $A \sim B$. Tällöin*

a) $\det(A) = \det(B)$

b) A on kääntyvä, jos ja vain jos B on kääntyvä

c) matriiseilla A ja B on sama karakteristinen polynomi

d) matriiseilla A ja B on samat ominaisarvot.

Todistus. Todistetaan kohta c) ja jätetään loput kohdat harjoitustehtäviksi. Matriisin B karakteristinen polynomi on $\det(B - \lambda I)$. Koska $A \sim B$, on olemassa kääntyvä matriisi P, jolle pätee $P^{-1}AP = B$. Näin ollen

$$\begin{aligned}
\det(B - \lambda I) &= \det(P^{-1}AP - \lambda I) \\
&= \det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}IP) \\
&= \det(P^{-1}AP - P^{-1}\lambda IP) \\
&= \det(P^{-1}(AP - \lambda IP)) \\
&= \det(P^{-1}(A - \lambda I)P) \\
&= \det(P^{-1})\det(A - \lambda I)\det(P) \\
&= \left(\frac{1}{\det(P)}\right)\det(A - \lambda I)\det(P) \\
&= \det(A - \lambda I).
\end{aligned}$$

Siis matriisien B ja A karakteristiset polynomit $\det(B - \lambda I)$ ja $\det(A - \lambda I)$ ovat samat. $\square$

Esimerkki 22.17. Edellinen tulos on käyttökelpoinen, jos pitää osoittaa, että jotkin matriisit *eivät* ole similaariset.

Merkitään

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Huomataan, että $\det(A) = -3$ ja $\det(B) = 3$. Siis

$$\det(A) \neq \det(B),$$

joten matriisit A ja B eivät ole similaariset.

Esimerkki 22.18. Huomaa, että vaikka jokin lauseen 22.16 ehdoista pätisikin, se ei takaa, että matriisit ovat similaariset. Tutkitaan vaikkapa matriiseja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Huomataan, että $\det(A) = -4 = \det(B)$. Kuitenkin matriisin A karakteristinen polynomi on

$$\det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)(2 - \lambda) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4$$

ja matriisin B karakteristinen polynomi on

$$\det(B - \lambda I) = (1 - \lambda)(-1 - \lambda) - 3 = \lambda^2 - 4.$$

Siten matriisit A ja B eivät ole similaariset lauseen 22.16 kohdan c) nojalla.

Jopa kaikki lauseen ehdot voivat päteä ilman, että matriisit ovat similaarisia. Tarkastellaan matriiseja

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Huomataan, että $\det(I) = 1 = \det(B)$. Tästä seuraa, että molemmat matriisit ovat kääntyviä. Lisäksi matriiseilla I ja B on sama karakteristinen polynomi $(1 - \lambda)^2$, ja kummankin matriisin ainoa ominaisarvo on 1. Tästä huolimatta matriisit I ja B eivät ole similaariset: jos P on mikä tahansa kääntyvä matriisi, niin

$$P^{-1} I P = I \neq B.$$

Määritelmä 22.19. Neliömatriisi A on *diagonalisoituva*, jos A on similaarinen jonkin lävistäjämatriisin kanssa.

Toisin sanoen A on diagonalisoituva, jos ja vain jos on olemassa kääntyvä matriisi P ja lävistäjämatriisi D, joille pätee $P^{-1}AP = D$. Matriisien P ja D etsimistä kutsutaan matriisin A *diagonalisoimiseksi*.

Esimerkki 22.20. Osoitetaan, että esimerkin 22.10 matriisi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

on diagonalisoituva. Valitaan

$$P = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Nyt matriisi P on kääntyvä, sillä $\det(P) = 2 - (-3) = 5 \neq 0$. Havaitaan, että

$$\begin{aligned} AP &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 12 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \\ PD &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 12 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Siis $AP = PD$, mistä seuraa, että

$$P^{-1}AP = D.$$

Huomaa, että oli ehdottoman tärkeää tarkistaa, että P on kääntyvä. Muuten ei voida puhua käänteismatriisista P^{-1}.

Määritelmän perusteella on melko hankalaa tutkia, onko matriisi diagonalisoituva. Jostakin on löydettävä matriisit P ja D, jotka toteuttavat määritelmän ehdon, tai todistettava, ettei tällaisia matriiseja ole. Tulemmekin myöhemmin esittelemään tuloksen, joka helpottaa diagonalisointia. Tutkitaan kuitenkin ensin esimerkkiä, joka näyttää yhden syyn sille, miksi matriisin diagonalisoiminen on hyödyllistä.

Esimerkki: Matriisin potenssien laskeminen

Lävistäjämatriisin potenssien laskeminen on vaivattomampaa kuin muiden matriisien. Induktiolla voidaan osoittaa, että mille tahansa kokonaisluvulle $k \geq 1$ ja lävistäjämatriisille

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & d_n \end{bmatrix}$$

pätee

$$D^k = \begin{bmatrix} d_1^k & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & d_2^k & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{n-1}^k & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & d_n^k \end{bmatrix}.$$

Myös diagonalisoituvan matriisin potenssien laskeminen on helppoa, sillä sen potenssit voidaan esittää lävistäjämatriisin potenssien avulla.

Esimerkki 22.21. Tutkitaan esimerkin 22.20 matriiseja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Esimerkissä osoitettiin, että matriisi A on diagonalisoituva ja $P^{-1}AP = D$. Kertomalla tätä yhtälöä vasemmalta matriisilla P ja oikealta matriisilla P^{-1} saadaan $A = PDP^{-1}$. Jos nyt $k \in \{1, 2, \dots\}$, niin

$$\begin{aligned} A^k &= (PDP^{-1})^k \\ &= \underbrace{(PDP^{-1})(PDP^{-1})\dots(PDP^{-1})(PDP^{-1})}_{k \text{ kpl}} \\ &= PD(P^{-1}P)D\dots(P^{-1}P)DP^{-1} \\ &= P\underbrace{D\dots D}_{k \text{ kpl}}P^{-1} \\ &= PD^kP^{-1}. \end{aligned}$$

Matsiisin A potenssit voidaan siis laskea lävistäjämatriisin D avulla.

Potenssin laskemista varten on määritettävä matriisin P käänteismatriisi. Tämä voidaan tehdä luvussa 10.2 esitetyn menetelmän avulla. Käänteismatriisiksi saadaan

$$\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Nyt voidaan laskea vaikkapa 10:s potenssi:

$$\begin{aligned} A^{10} = PD^{10}P^{-1} &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4^{10} & 0 \\ 0 & (-1)^{10} \end{bmatrix}\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2\cdot 4^{10}+3 & 2\cdot 4^{10}-2 \\ 3\cdot 4^{10}-3 & 3\cdot 4^{10}+2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Diagonalisoituvuuden selvittäminen

Palataan vielä esimerkin 22.20 matriisiin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Esimerkissä osoitettiin, että A on diagonalisoituva näyttämällä, että $P^{-1}AP = D$, missä

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Tutkitaan, mistä matriisit P ja D tulevat.

Esimerkin 22.10 nojalla matriisin A ominaisarvot ovat 4 ja -1. Näitä vastaavat ominaisvektorit ovat muotoa $t(2,3)$ ja $s(1,-1)$, missä $t, s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Nähdään, että matriisin P sarakkeina ovat ominaisvektorit $(2,3)$ ja $(1,-1)$. Matriisin D lävistäjällä puolestaan ovat vastavat ominaisarvot eli 4 ja -1.

Osoittautuu, että jos matriisi on diagonalisoituva, tarvittavat matriisit P ja D voidaan aina löytää vastaavalla tavalla ominaisvektoreiden ja ominaisarvojen avulla. Oleellista on kuitenkin se, että käytettävät ominaisvektorit ovat lineaarisesti riippumattomia. (Edellisessä esimerkissä $(2,3)$ ja $(1,-1)$ ovat lineaarisesti riippumattomia.) Muutoin P ei ole kääntyvä.

Lause 22.22. *Matriisi $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ on diagonalisoituva, jos ja vain jos A:lla on n lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria.*

Todistus. "$\Rightarrow$": Oletetaan, että $P^{-1}AP = D$, missä $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ on jokin kääntyvä matriisi ja $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ lävistäjämatriisi. Nyt $AP = PD$. Olkoot P:n sarakkeet $\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_n$ ja D:n lävistäjäalkiot $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Nyt siis

$$P = \begin{bmatrix} \bar{p}_1 & \dots & \bar{p}_n \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Matriisituloa laskettaessa tulon AP jokainen sarake saadaan kertomalla matriisilla A vastaava sarake matriisista P:

$$AP = A[\bar{p}_1 \cdots \bar{p}_n] = [A\bar{p}_1 \cdots A\bar{p}_n].$$

Toisaalta lävistäjämatriisilla D kerrottaessa tullaan kertoneeksi jokainen sarake vastaavalla lävistäjäalkiolla:

$$PD = [\lambda_1\bar{p}_1 \cdots \lambda_n\bar{p}_n].$$

Koska $AP = PD$, nähdään nyt, että $A\bar{p}_i = \lambda_i\bar{p}_i$ kaikilla $i \in \{1, \dots, n\}$. Siis jokainen λ_i on ominaisarvo ja $\bar{p}_i$ sitä vastaava ominaisvektori.

On vielä osoitettava, että ominaisvektorien jono $(\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_n)$ on vapaa. Koska P on kääntyvä, yhtälöllä $P\bar{x} = \bar{0}$ on lauseen 10.1 mukaan täsmälleen yksi ratkaisu $\bar{x} = \bar{0}$. Yhtälö $P\bar{x} = \bar{0}$ voidaan kirjoittaa myös muotoon

$$x_1\bar{p}_1 + x_2\bar{p}_2 + \cdots + x_n\bar{p}_n = \bar{0}.$$

Tämän yhtälön ainoa ratkaisu on siis $x_1 = 0, \dots, x_n = 0$. Näin ollen matriisin A ominaisvektoreiden jono $(\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_n)$ on vapaa.

"$\Leftarrow$": Oletetaan, että $\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_n$ ovat jotkin A:n lineaarisesti riippumattomat ominaisvektorit. Olkoot niitä vastaavat ominaisarvot $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Nyt $A\bar{p}_i = \lambda_i\bar{p}_i$

kaikilla $i \in \{1, \dots, n\}$. Olkoon P matriisi, jonka sarakkeet ovat ominaisvektorit: $P = [\bar{p}_1 \cdots \bar{p}_n]$. Olkoon D puolestaan lävistäjämatriisi, jonka lävistäjäalkiot ovat $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Tällöin nähdään samaan tapaan kuin edellä, että $AP = PD$.

Koska matriisin P sarakkeet ovat lineaarisesti riippumattomat, on yhtälöllä $P\bar{x} = \bar{0}$ täsmälleen yksi ratkaisu $\bar{x} = \bar{0}$. (Tämä nähdään samalla tavalla kuin todistuksen ensimmäisessä osassa.) Lauseen 10.7 nojalla matriisi P on nyt kääntyvä. Yhtälö $AP = PD$ saadaan siis muotoon

$$P^{-1}AP = D. \qquad \square$$

Edellinen lause antaa suoraviivaisen keinon tarkistaa, onko matriisi diagonalisoituva. Lisäksi lauseen todistuksesta nähdään, miten diagonalisoituvuuden määritelmässä mainitut matrisiit P ja D löydetään. Kerätään nämä kaikki tiedot vielä yhteen.

Näin selvitetään, onko matriisi $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonalisoituva:

1) Etsitään matriisin A ominaisarvot.
2) Määritetään jokaista ominaisarvoa vastaava ominaisavaruus.
3) Tutkitaan, löytyykö lineaarisesti riippumattomia ominaisvektoreita n kappaletta. Jos niitä on vähemmän kuin n kappaletta, matriisi A ei ole diagonalisoituva. Muussa tapauksessa A on diagonalisoituva, ja voidaan jatkaa seuraavaan kohtaan.
4) Muodostetaan matriisi P laittamalla löydetyt lineaarisesti riippumattomat ominaisvektorit sen sarakkeiksi. Tällöin P on lauseen 22.22 todistuksen nojalla kääntyvä. (Tämän voi tarkistaa esimerkiksi determinantin avulla.)
5) Muodostetaan lävistäjämatriisi D laittamalla sen sarakkeisiin matriisin P sarakkeita vastaavat ominaisarvot. Tällöin $P^{-1}AP = D$ lauseen 22.22 todistuksen nojalla. (Tämän voi tarkistaa laskemalla tulot AP ja PD.)

Esimerkki 22.23. Merkitään

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Diagonalisoidaan matriisi A, jos mahdollista.

Aloitetaan määrittämällä matriisin A ominaisarvot. Matriisin karakteristinen polynomi on

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 1 \\ 3 & -\lambda & -3 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda^2(\lambda + 2). \end{aligned}$$

Ominaisarvot löydetään siis ratkaisemalla yhtälö $-\lambda^2(\lambda+2)=0$. Näin ollen ominaisarvot ovat 0 ja -2.

Määritetään seuraavaksi ominaisarvoja vastaavat ominaisavaruudet. Ominaisarvoa 0 vastaava ominaisavaruus on

$$V_0 = \{\bar{v} \in \mathbb{R}^3 \mid A\bar{v} = 0\bar{v}\}.$$

Sen alkioita ovat yhtälön $A\bar{x} = 0\bar{x}$ ratkaisut. Muodostamalla yhtälöä vastaava yhtälöpari ja ratkaisemalla se nähdään, että ratkaisut ovat muotoa $\bar{x} = (t, s, t)$, missä s, $t \in \mathbb{R}$. Siis

$$\begin{aligned} V_0 &= \{(t,s,t) \mid s,t \in \mathbb{R}\} = \{t(1,0,1) + s(0,1,0) \mid s,t \in \mathbb{R}\} \\ &= \operatorname{span}\big((1,0,1),\ (0,1,0)\big). \end{aligned}$$

Ominaisarvoa -2 vastaava ominaisavaruus on

$$V_{-2} = \{\bar{v} \in \mathbb{R}^3 \mid A\bar{v} = -2\bar{v}\}.$$

Kun ratkaistaan yhtälö $A\bar{x} = -2\bar{x}$ Gaussin–Jordanin menetelmällä, nähdään, että ratkaisut ovat muotoa $\bar{x} = (-t, 3t, t)$, missä $t \in \mathbb{R}$. Siis

$$V_{-2} = \{(-t,3t,t) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{t(-1,3,1) \mid t \in \mathbb{R}\} = \operatorname{span}\big((-1,3,1)\big).$$

Matriisi A on diagonalisoituva, jos ja vain jos on olemassa kolme lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria. Osoitetaan, että ominaisvektorit $\bar{p}_1 = (1,0,1)$, $\bar{p}_2 = (0,1,0)$ ja $\bar{p}_3 = (-1,3,1)$ ovat lineaarisesti riippumattomat. On siis tutkittava yhtälöä

$$c_1(1,0,1) + c_2(0,1,0) + c_3(0,1,0) = (0,0,0),$$

missä $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$. Muodostamalla yhtälöä vastaava yhtälöryhmä ja ratkaisemalla se Gaussin–Jordanin eliminointimenetelmällä nähdään, että yhtälöryhmän ainoa ratkaisu on $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $c_3 = 0$. Siten tutkittavat vektorit ovat lineaarisesti riippumattomia. Näin ollen A on diagonalisoituva lauseen 22.22 nojalla.

Merkitään

$$P = \begin{bmatrix} \bar{p}_1 & \bar{p}_2 & \bar{p}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Tällöin lauseen 22.22 todistuksen mukaan P on kääntyvä ja $P^{-1}AP = D$.

Jos on epävarma ratkaisustaan, voi vielä lopukasi tarkistaa, että $\det(P) \neq 0$ ja $AP = PD$.

Esimerkki 22.24. Diagonalisoidaan matriisi

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

jos mahdollista. Selvitetään aluksi matriisin ominaisarvot. Matriisin karakteristinen polynomi on $(\lambda - 2)^2$, ja tämän polynomin ainoa nollakohta on 2. Siten ominaisarvoja on yksi, ja se on 2. Ominaisarvoa vastaavat ominaisvektorit saadaan yhtälöstä $A\bar{x} = 2\bar{x}$. Kun yhtälö ratkaistaan, nähdään sen ratkaisujen olevan muotoa $\bar{x} = (t, 0)$, missä $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Matriisilla A ei siis ole kahta lineaarisesti riippumatonta ominaisarvoa, joten A ei ole diagonalisoituva.

Toisinaan matriisin diagonalisoituvuus on helppo todeta.

Lause 22.25. *Oletetaan, että $n \times n$-matriisilla on n eri ominaisarvoa. Tällöin A on diagonalisoituva.*

Todistus. Olkoot $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$ jotkin eri ominaisarvoihin liittyvät ominaisvektorit. Ne ovat lineaarisesti riippumattomia lauseen 22.12 nojalla. Koska matriisilla A on n lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria, on A diagonalisoituva lauseen 22.22 nojalla. □

Huomaa, että diagonalisoituvan $n \times n$-matriisin ominaisarvojen lukumäärän ei tarvitse olla n. Esimerkiksi lävistäjämatriisi

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

on diagonalisoituva, sillä A on similaarinen itsensä kanssa. Kuitenkin karakteristisen polynomin avulla nähdään, että matriisilla on vain yksi ominaisarvo, -3.