Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II

31.10.2012

Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johanna Rämö

Terveiset Johannalta

- Tänään sijaisena on Jokke Häsä.
- Muista ilmoittautua kurssille.
- Muista käyttää uutta kurssitunnusta.
- Kurssisivulla oli virhe: perjantaisin ei ole luentoja.
- Mukavaa luentoa!

Vektoriavaruus

Oletetaan, että joukossa V on määritelty yhteenlasku ja skalaarikertolasku jollakin tavalla. Jos alla listatut ehdot pätevät kaikilla $\bar{v}, \bar{w}, \bar{u} \in V$ ja $a, b \in \mathbb{R}$, niin joukkoa V kutsutaan *vektoriavaruudeksi* ja sen alkioita *vektoreiksi*.

Vektoriavaruus

Oletetaan, että joukossa V on määritelty yhteenlasku ja skalaarikertolasku jollakin tavalla. Jos alla listatut ehdot pätevät kaikilla $\bar{v}, \bar{w}, \bar{u} \in V$ ja $a, b \in \mathbb{R}$, niin joukkoa V kutsutaan *vektoriavaruudeksi* ja sen alkioita *vektoreiksi*.

(a) $\bar{v} + \bar{w} = \bar{w} + \bar{v}$ kaikilla $\bar{v}, \bar{w} \in V$.

(b) $(\bar{v} + \bar{w}) + \bar{u} = \bar{v} + (\bar{w} + \bar{u})$ kaikilla $\bar{v}, \bar{w}, \bar{u} \in V$.

(c) On olemassa niin kutsuttu *nollavektori* $\bar{0}$, jolle pätee $\bar{v} + \bar{0} = \bar{v}$ kaikilla $\bar{v} \in V$.

(d) Jokaisella vektorilla $\bar{v} \in V$ on niin kutsuttu *vastavektori* $-\bar{v}$, jolle pätee $\bar{v} + (-\bar{v}) = \bar{0}$.

(e) $a(\bar{v} + \bar{w}) = a\bar{v} + a\bar{w}$ kaikilla $\bar{v}, \bar{w} \in V$ ja $a \in \mathbb{R}$.

(f) $(a + b)\bar{v} = a\bar{v} + b\bar{v}$ kaikilla $\bar{v} \in V$ ja $a, b \in \mathbb{R}$.

(g) $(ab)\bar{v} = a(b\bar{v})$ kaikilla $\bar{v} \in V$ ja $a, b \in \mathbb{R}$.

(h) $1\bar{v} = \bar{v}$ kaikilla $\bar{v} \in V$.

Vektoriavaruus

Vektoriavaruuksia muodostavat esimerkiksi

- avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektorit
- matriisit
- polynomit
- funktiot.

Määritelmä

Olkoon V vektoriavaruus. Sen osajoukko W on vektoriavaruuden V *aliavaruus*, jos seuraavat ehdot pätevät:

(a) $\bar{w} + \bar{u} \in W$ kaikilla $\bar{w}, \bar{u} \in W$

(b) $r\bar{w} \in W$ kaikilla $r \in \mathbb{R}$ ja $\bar{w} \in W$

(c) $\bar{0} \in W$.

Esimerkki

Olkoon W symmetristen $n \times n$-matriisien joukko. Toisin sanoen

$$W = \{C \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid C^T = C\}.$$

Osoitetaan, että W on vektoriavaruuden $\mathbb{R}^{n \times n}$ aliavaruus.

Esimerkki

Polynomiavaruudella $\mathcal{P}$ on aliavaruus

$$\mathcal{P}_2 = \{p \in \mathcal{P} \mid p = 0 \text{ tai } \deg(p) \leq 2\}.$$

Esimerkki

Onko joukko

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & a+1 \\ 0 & b \end{bmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

vektoriavaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ aliavaruus?

Esimerkki

Onko joukko $W = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid \det(A) = 0\}$ vektoriavaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ aliavaruus?

Aliavaruus on vektoriavaruus

Lause

Oletetaan, että V on vektoriavaruus, jolla on aliavaruus W. Tällöin myös aliavaruus W on vektoriavaruus.