Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II

27.11.2012

Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johanna Rämö

Sekalaisia asioita

- Epäonnea harjoituksen 5 laadinnassa:
  - Tehtävä 1 oli aika ikävä. Peilaus muutettiin tämän vuoksi projektioksi. Voit tehdä kumman version tahansa.
  - Tehtäväsarjan IV sisätulo ei ole sisätulo. (Voit miettiä, miksei.) Vaihda miinus plussaksi.
- Teitte hienoja käsitekarttoja!
- Huomaa, että merkinnät $\bar{0}$ ja $\{\bar{0}\}$ tarkoittavat eri asiaa. Ensimmäinen on nollavektori ja toinen on joukko, jossa on nollavektori. Voidaan kirjoittaa esim. $\operatorname{Ker} L = \{\bar{0}\}$, muttei $\operatorname{Ker} L = \bar{0}$.

Kuinka puhua matematiikkaa?

Matemaatikot Römö ja Toikkonen keskustelevat lineaarialgebrasta. Römö ei oikein ole ymmärtänyt, mitä isomorfismit ovat. Millä tavalla Toikkosen kannattaa selittää asia? Mitkä ovat hyvät ja mitkä huonot puolet?

a) Isomorfismi on bijektiivinen lineaarikuvaus.
b) Jos kahden vektoriavaruuden välillä on isomorfismi, avaruudet ovat samanlaisia.
c) Lineaarikuvaus $L\colon V \to U$ on isomorfismi, jos $\operatorname{Ker} L = \{\bar{0}\}$ ja $\operatorname{Im} L = U$.

Lause

Oletetaan, että $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Reaaliluku λ on matriisin A ominaisarvo, jos ja vain jos $\det(A - \lambda I) = 0$.

Miksi lävistäjämatriisit ovat kivoja?

Potenssien laskeminen on helppoa. Jos $k \in \{1, 2, \dots\}$ ja

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & d_n \end{bmatrix},$$

niin

$$D^k = \begin{bmatrix} d_1^k & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & d_2^k & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{n-1}^k & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & d_n^k \end{bmatrix}.$$

Mihin diagonalisointia voi käyttää?

Lasketaan matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

kymmenes potenssi.

Aikaisemmin on osoitettu, että $P^{-1}AP = D$, missä

$$P = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Nähdään, että

$$\begin{aligned} A^{10} = PD^{10}P^{-1} &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4^{10} & 0 \\ 0 & (-1)^{10} \end{bmatrix} \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 \cdot 4^{10} + 3 & 2 \cdot 4^{10} - 2 \\ 3 \cdot 4^{10} - 3 & 3 \cdot 4^{10} + 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Väliin jäänyt todistus

Lause

Matriisi $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ on diagonalisoituva, jos ja vain jos A:lla on n lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria.

Miten todistusta voisi parantaa?

Oletetaan, että $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Osoitetaan, että joukko $W = \{\bar{v} \in \mathbb{R}^n \mid A\bar{v} = \bar{0}\}$ on avaruuden $\mathbb{R}^n$ aliavaruus.

Oletetaan, että $\bar{v}, \bar{w} \in W$. Tällöin $A\bar{v} = \bar{0}$ ja $A\bar{w} = \bar{0}$. Nyt

$$\begin{aligned} A(\bar{v} + \bar{w}) &= \bar{0} \\ A\bar{v} + A\bar{w} &= \bar{0} \\ \bar{0} + \bar{0} &= \bar{0} \\ \bar{0} &= \bar{0}. \end{aligned}$$

Siis $\bar{v} + \bar{w} \in W$.

Ja sitten tarkistetaan aliavaruuden loput ehdot, mutta ne eivät enää mahdu tälle kalvolle.

Korjausehdotus

Oletetaan, että $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Osoitetaan, että joukko $W = \{\bar{v} \in \mathbb{R}^n \mid A\bar{v} = \bar{0}\}$ on avaruuden $\mathbb{R}^n$ aliavaruus.

Oletetaan, että $\bar{v}, \bar{w} \in W$. Tällöin $A\bar{v} = \bar{0}$ ja $A\bar{w} = \bar{0}$. Nyt

$$A(\bar{v} + \bar{w}) = A\bar{v} + A\bar{w} = \bar{0} + \bar{0} = \bar{0}.$$

Siis $\bar{v} + \bar{w} \in W$.

Ja sitten tarkistetaan aliavaruuden loput ehdot, mutta ne eivät enää mahdu tälle kalvolle.

SISÄTULO

Vektoriavaruuden V *sisätulo* on sääntö, joka liittää jokaiseen vektoriavaruuden V alkiopariin $(\bar{v}, \bar{w})$ yksikäsitteisen reaaliluvun $\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle$. Lisäksi sisätulon on toteutettava seuraavat ehdot kaikilla $\bar{v}, \bar{w}, \bar{u} \in V$ ja $c \in \mathbb{R}$:

(a) $\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle = \langle \bar{w}, \bar{v} \rangle$

(b) $\langle \bar{v} + \bar{w}, \bar{u} \rangle = \langle \bar{v}, \bar{u} \rangle + \langle \bar{w}, \bar{u} \rangle$

(c) $\langle c\bar{v}, \bar{w} \rangle = c\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle$

(d) $\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle \geq 0$; $\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle = 0$, jos ja vain jos $\bar{v} = \bar{0}$.

Esimerkki

Vektoriavaruuden $\mathbb{R}^n$ pistetulo on sisätulo. Tässä tapauksessa

$$\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle = \bar{v} \cdot \bar{w},$$

kun $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^n$.

Esimerkki

Avaruudessa $\mathbb{R}^2$ voidaan määritellä sisätulo myös kaavalla

$$\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle = v_1 w_1 + 2 v_2 w_2.$$

Avaruudessa $\mathbb{R}^2$ on mahdollista määritellä monia muitakin sisätuloja.

Esimerkki

Joukko

$$C([0,1]) = \{f\colon [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ on jatkuva}\}.$$

vektoriavaruus. Siinä voidaan määritellä sisätulo kaavalla

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx.$$

Sisätuloon liittyviä tuloksia

Nollavektorin sisätulo minkä tahansa muun vektorin kanssa on nolla.

Lause

Sisätuloavaruudessa V pätee $\langle \bar{v}, \bar{0} \rangle = 0$ ja $\langle \bar{0}, \bar{v} \rangle = 0$ kaikilla $\bar{v} \in V$.

Normi

Määritelmä

Olkoon V sisätuloavaruus. Tällöin vektorin $\bar{v} \in V$ *normi* on

$$\| \bar{v} \| = \sqrt{\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle}.$$