Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II

21.11.2012

Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johanna Rämö

Käytännön asioita

- Kokeenkatsomistilaisuus järjestetään tänään klo 12–14 salissa B120.
- Jos et pääse paikalle, voit sopia kokeen katsomisesta erikseen.

Similaarisuus

Määritelmä

Matriisi $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ on *similaarinen* matriisin $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ kanssa, jos on olemassa kääntyvä matriisi $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, jolle pätee

$$P^{-1}AP = B.$$

Tällöin merkitään $A \sim B$.

Esimerkki

Merkitään

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Matriisi A on similaarinen matriisin B kanssa. Tämän osoittamiseen voidaan käyttää matriisia

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Similaariset matriisit muistuttavat toisiaan

Lause

Oletetaan, että $A \sim B$. Tällöin

(a) $\det(A) = \det(B)$

(b) A on kääntyvä, jos ja vain jos B on kääntyvä

(c) matriiseilla A ja B on sama karakteristinen polynomi

(d) matriiseilla A ja B on samat ominaisarvot.

Diagonalisoituva matriisi

Määritelmä

Neliömatriisi A on *diagonalisoituva*, jos A on similaarinen jonkin lävistäjämatriisin kanssa.

Toisin sanoen A on diagonalisoituva, jos ja vain jos on olemassa kääntyvä matriisi P ja lävistäjämatriisi D, joille pätee $P^{-1}AP = D$.
Matriisien P ja D etsimistä kutsutaan matriisin A *diagonalisoimiseksi*.

Esimerkki

Osoitetaan, että matriisi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

on diagonalisoituva.

Käytetään apuna matriiseja

$$P = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Lause

Matriisi $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ on diagonalisoituva, jos ja vain jos A:lla on n lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria.

Esimerkki

Merkitään

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Diagonalisoidaan matriisi A, jos mahdollista.