Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II

14.11.2012

Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johanna Rämö

Vapaa jono voidaan jatkaa vektoriavaruuden kannaksi

Lause

Oletetaan, että V äärellisulotteinen vektoriavaruus. Oletetaan lisäksi, että $S = (\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k)$ on avaruuden V vapaa jono. Tällöin jonoon S voidaan lisätä vektoreita niin, että tuloksena on avaruuden V kanta.

Virittäjäjono voidaan lyhentää vektoriavaruuden kannaksi

Lause

Oletetaan, että jono $S = (\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k)$ virittää avaruuden V. Tällöin jonosta S voidaan poistaa vektoreita niin, että tuloksena on avaruuden V kanta.

Mistä tunnistaa kannan?

Oletetaan, että V on vektoriavaruus, jonka dimensio on n.

- Jos vektoriavaruuden V vektorijono virittää avaruuden ja sen pituus on n, kyseinen jono on kanta.

Mistä tunnistaa kannan?

Oletetaan, että V on vektoriavaruus, jonka dimensio on n.

- Jos vektoriavaruuden V vektorijono virittää avaruuden ja sen pituus on n, kyseinen jono on kanta.
- Jos vektoriavaruuden V vektorijono on vapaa ja sen pituus on n, kyseinen jono on kanta.

Dimensiolause

Lause

Olkoot V ja U vektoriavaruuksia. Oletetaan, että V on äärellisulotteinen. Olkoon $L\colon V \to U$ lineaarikuvaus. Tällöin

$$\dim(V) = \dim(\operatorname{Ker} L) + \dim(\operatorname{Im} L).$$

Esimerkki

Projektiokuvaus $P\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L(x_1, x_2) = (x_1, 0)$.

Esimerkki

Projektiokuvaus $P\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L(x_1, x_2) = (x_1, 0)$.

Nähdään, että

$$\dim(\mathbb{R}^2) = 2 = 1 + 1 = \dim(\ker P) + \dim(\operatorname{Im} P).$$

Lineaarikuvauksen matriisi

Tarkastellaan matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

määräämää lineaarikuvausta $L_A \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $L_A(\bar{x}) = A\bar{x}$.

- Mikä on vektorin (x_1, x_2, x_3) kuvavektori?

Lineaarikuvauksen matriisi

Tarkastellaan matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

määräämää lineaarikuvausta $L_A \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $L_A(\bar{x}) = A\bar{x}$.

- Mikä on vektorin (x_1, x_2, x_3) kuvavektori?
- Vektorin (x_1, x_2, x_3) kuva on matriisin A sarakkeiden lineaarikombinaatio, jossa kertoimina ovat vektorin komponentit.

Lineaarikuvauksen matriisi

Tarkastellaan matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

määräämää lineaarikuvausta $L_A \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $L_A(\bar{x}) = A\bar{x}$.

- Mikä on vektorin (x_1, x_2, x_3) kuvavektori?
- Vektorin (x_1, x_2, x_3) kuva on matriisin A sarakkeiden lineaarikombinaatio, jossa kertoimina ovat vektorin komponentit.
- Matriisin sarakkeet ovat luonnollisen kannan vektorien kuvavektorit!

Kuinka kuvauksesta saadaan matriisi

Lause

Oletetaan, että $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ on lineaarikuvaus. Tällöin T on matriisin

$$A = \begin{bmatrix} T(\bar{e}_1) & T(\bar{e}_2) & \dots & T(\bar{e}_n) \end{bmatrix}$$

määräämä.

Kuinka kuvauksesta saadaan matriisi

Lause

Oletetaan, että $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ on lineaarikuvaus. Tällöin T on matriisin

$$A = \begin{bmatrix} T(\bar{e}_1) & T(\bar{e}_2) & \dots & T(\bar{e}_n) \end{bmatrix}$$

määräämä.

Toisin sanoen $T(\bar{v}) = A(\bar{v})$ kaikilla $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$. Matriisia A kutsutaan kuvauksen T matriisiksi.

Esimerkki

Määritetään lineaarikuvauksen

$$L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad L(x_1, x_2, x_3) = (7x_2,\ x_1 - 3x_3)$$

matriisi edellisen lauseen avulla.

Esimerkki

Millainen matriisi on lineaarikuvauksella L, joka peilaa tason vektorit suoran $\operatorname{span}\big((-1,1)\big)$ suhteen?

Esimerkki

Millainen matriisi on lineaarikuvauksella L, joka peilaa tason vektorit suoran $\operatorname{span}\big((-1,1)\big)$ suhteen?