Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II

13.11.2012

Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johanna Rämö

Käytännön asioita

- Koepisteet ovat ilmoitustaululla ja kurssisivulla. Arvostelu valmistuu pian.

Esimerkki

Osoitetaan, että $W = \{(a, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$ on vektoriavaruuden $\mathbb{R}^2$ aliavaruus.

$(a, a), (b, b) \in W$.

(a) $(a, a) + (b, b) = (a + b, a + b) \in W$

(b) $r(a, a) = (ra, ra) \in W$, $r \in \mathbb{R}$

(c) $(0, 0) \in W$

Miten ratkaisua voisi parantaa?

Korjausehdotus

Osoitetaan, että $W = \{(a, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$ on vektoriavaruuden $\mathbb{R}^2$ aliavaruus.

Ensinnäkin huomataan, että $W \subset \mathbb{R}^2$.
Oletetaan, että $(a, a), (b, b) \in W$ ja $r \in \mathbb{R}$. Nyt

(a) $(a, a) + (b, b) = (a + b, a + b) \in W$,

(b) $r(a, a) = (ra, ra) \in W$ ja

(c) $(0, 0) \in W$.

Siten W on vektoriavaruuden $\mathbb{R}^2$ aliavaruus.

Tilannekatsaus

- Tähän mennessä lineaarikuvauksista pitäisi osata:
  - Määritelmä.
  - Lineaarikuvauksen matriisin etsiminen.
  - Kuinka kantavektorit määräävät lineaarikuvauksen arvot.

Tänään käsitellään lineaarikuvauksen ydintä ja kuvaa.

Ydin

Lineaarikuvauksen ydin koostuu kaikista niistä vektoreista, jotka kuvautuvat nollavektoriksi.

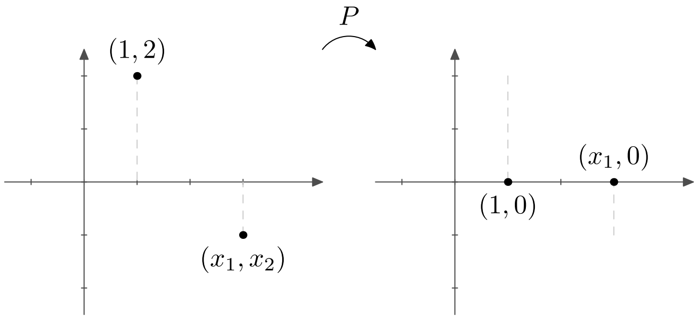
Määritelmä

Oletetaan, että $L\colon V \to U$ on lineaarikuvaus. Sen *ydin* on joukko

$$\operatorname{Ker} L = \{\bar{v} \in V \mid L(\bar{v}) = \bar{0}\}.$$

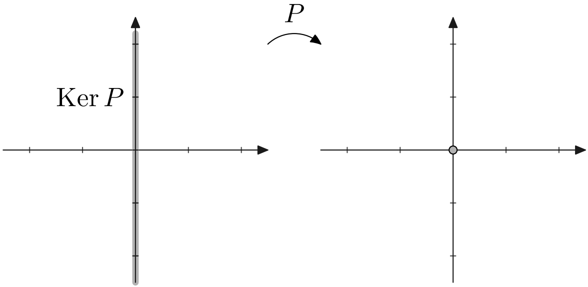
Esimerkki

Mikä on projektiokuvauksen $P\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $P(x_1, x_2) = (x_1, 0)$ ydin?



Esimerkki jatkuu

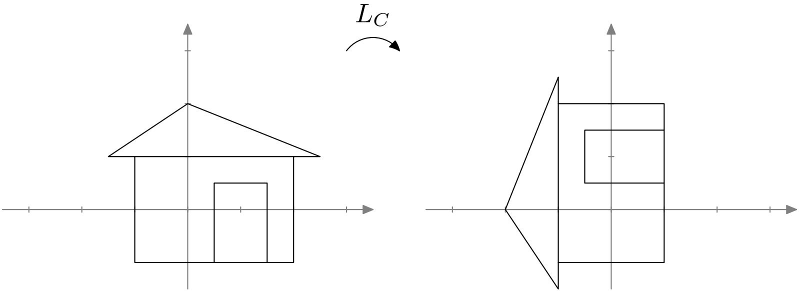
Mikä on projektiokuvauksen $P\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $P(x_1, x_2) = (x_1, 0)$ ydin?



Kuvan perusteella nollavektoriksi kuvautuvat kaikki vektorin $(0, 1)$ kanssa yhdensuuntaiset vektorit. Siis
$\operatorname{Ker} P = \operatorname{span}((0, 1))$.

Tehtävä

Kuvaus $L_C : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L_C(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$ kiertää vektoreita 90° vastapäivään.



Mikä on kuvauksen L_C ydin? (Eli mitkä vektorit kuvautuvat nollavektoriksi?)

Esimerkki

Määritä lineaarikuvauksen

$$L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad L(x_1, x_2, x_3) = (7x_2,\ x_1 - 3x_3)$$

ydin.

Ydin on aliavaruus

Lause

Oletetaan, että $L\colon V \to U$ on lineaarikuvaus. Tällöin ydin $\operatorname{Ker} L$ on avaruuden V aliavaruus.

Injektiivisyys

Lineaarikuvaus on injektio, jos eri vektoreilla ei voi olla samaa kuvavektoria.

- Onko edellisen esimerkin projektiokuvaus injektio?
- Onko edellisen esimerkin kiertokuvaus injektio?

Ydin kertoo injektiivisyydestä

Lause

Lineaarikuvaus $L\colon V \to U$ on injektio, jos ja vain jos $\operatorname{Ker} L = \{\bar{0}\}$.

Kuva

Kuvassa ovat kaikki ne maalijoukon vektorit, joille kuvautuu jotakin.

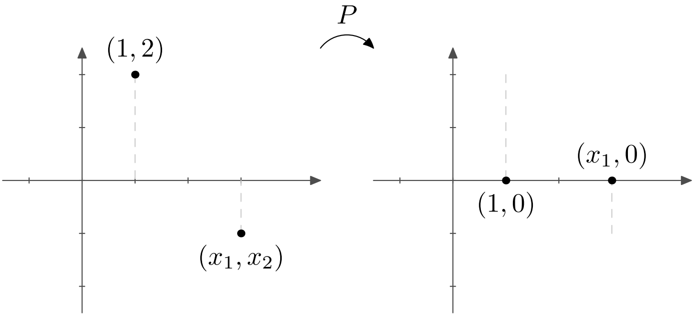
Määritelmä

Oletetaan, että $L\colon V \to U$ on lineaarikuvaus. Sen *kuva* on joukko

$$\operatorname{Im} L = LV = \{L(\bar{v}) \mid \bar{v} \in V\}.$$

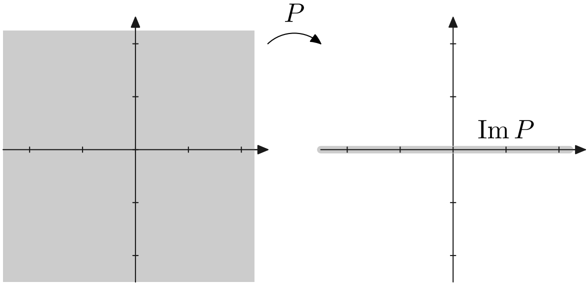
Esimerkki

Mikä on projektiokuvauksen $P \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $P(x_1, x_2) \mapsto (x_1, 0)$ kuva?



Esimerkki jatkuu

Mikä on projektiokuvauksen $P\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $P(x_1, x_2) \mapsto (x_1, 0)$ kuva?



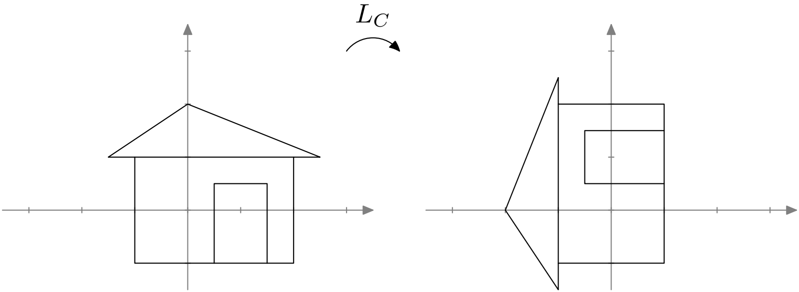
Kuvan perusteella vektorin $(1, 0)$ kanssa yhdensuuntaisille vektoreille kuvautuu jotain (ja muille ei). Siis $\operatorname{Im} P = \operatorname{span}((1, 0))$.

Tehtävä

Mikä on kiertokuvauksen

$$L_C \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad L_C(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$$

kuva? (Eli mille vektoreille kuvautuu jotakin?)



Surjektiivisuus

Lineaarikuvaus on surjektio, jos kaikille maalijoukon alkioille kuvautuu jotakin.

- Onko edellisen esimerkin projektiokuvaus surjektio?
- Onko edellisen esimerkin kiertokuvaus surjektio?

Injektiivisyys ja surjektiivisuus

Lineaarikuvausta $L\colon V \to U$ voidaan nyt luonnehtia sen ytimen ja kuvan avulla.

- Kuvaus L on injektio, jos ja vain jos $\operatorname{Ker} L = \{\bar{0}\}$.
- Kuvaus L on surjektio, jos ja vain jos $\operatorname{Im} L = U$.

Tehtävä

Tee käsitekartta seuraavista sanoista:
kanta, vapaus, virittäminen, dimensio, koordinaatit.

Vapaa jono voidaan jatkaa vektoriavaruuden kannaksi

Lause

Oletetaan, että V äärellisulotteinen vektoriavaruus. Oletetaan lisäksi, että $S = (\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k)$ on avaruuden V vapaa jono. Tällöin jonoon S voidaan lisätä vektoreita niin, että tuloksena on avaruuden V kanta.

Virittäjäjono voidaan lyhentää vektoriavaruuden kannaksi

Lause

Oletetaan, että jono $S = (\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_k)$ virittää avaruuden V. Tällöin jonosta S voidaan poistaa vektoreita niin, että tuloksena on avaruuden V kanta.

Mistä tunnistaa kannan?

Oletetaan, että V on vektoriavaruus, jonka dimensio on n.

- Jos vektoriavaruuden V vektorijono virittää avaruuden ja sen pituus on n, kyseinen jono on kanta.
- Jos vektoriavaruuden V vektorijono on vapaa ja sen pituus on n, kyseinen jono on kanta.