Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II

7.11.2012

Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johanna Rämö

Käytännön asioita

- Tehtävät on tarkistettu.
- Palautuslaatikot ovat nykyään käytävällä samoin kuin kansilehdet.

Eräs palaute

Miksei luentomateriaalia julkaista yhtään aikaisemmin?

Vastaus: Kirjoitan luentomateriaali samaan aikaan kuin kurssi etenee. Valitettavasti en pysty nopeuttamaan tahtia. Linkki Hannu Honkasalon valmiiseen materiaaliin löytyy kurssisivulta.

Kertausta: Lineaarikuvaus

Määritelmä

Olkoot V ja U ovat vektoriavaruuksia. Kuvaus $L\colon V \to U$ on *lineaarikuvaus*, jos seuraavat ehdot pätevät:

(a) $L(\bar{v} + \bar{u}) = L(\bar{v}) + L(\bar{u})$ kaikilla $\bar{v}, \bar{u} \in V$

(b) $L(c\bar{v}) = cL(\bar{v})$ kaikilla $c \in \mathbb{R}$ ja $\bar{v} \in V$.

Matriisin määräämä lineaarikuvaus

Oletetaan, että A on $m \times n$-matriisi. Tällöin kuvaus

$$L_A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad L_A(\bar{v}) = A\bar{v}$$

on lineaarikuvaus.

Esimerkki

Millaisen lineaarikuvauksen määrää matriisi

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}?$$

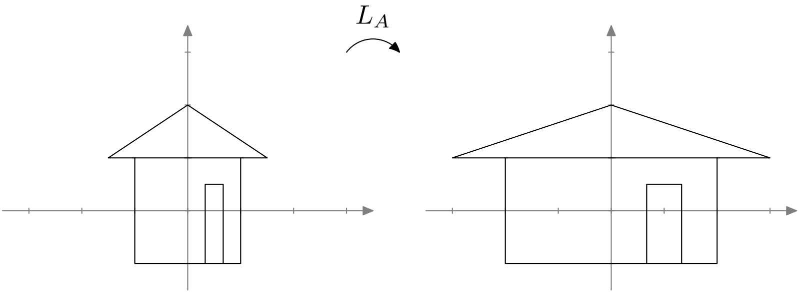
Esimerkki

Millaisen lineaarikuvauksen määrää matriisi

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}?$$

Vektorin $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ kuva on

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$


L_A

Esimerkki

Millaisen lineaarikuvauksen määrää matriisi

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}?$$

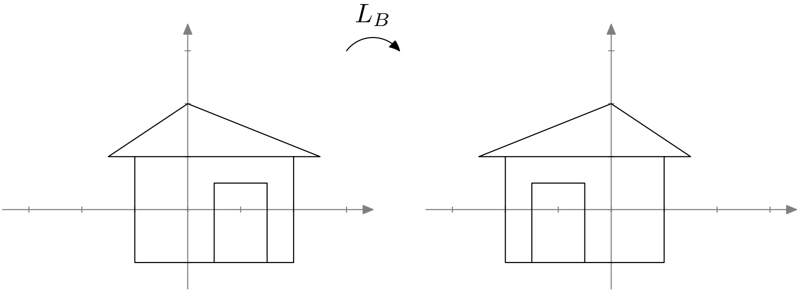
Esimerkki

Millaisen lineaarikuvauksen määrää matriisi

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}?$$

Vektorin $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ kuva on

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$


L_B

Esimerkki

Millaisen lineaarikuvauksen määrää matriisi

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}?$$

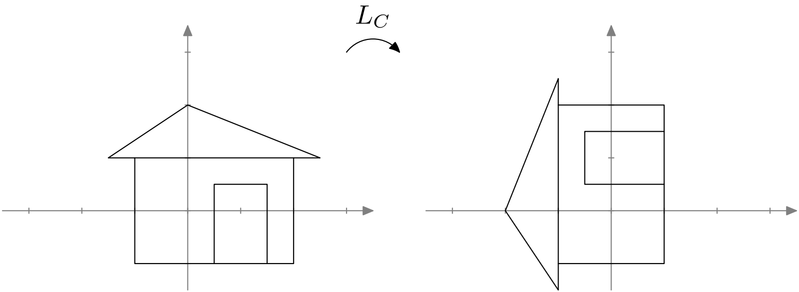
Esimerkki

Millaisen lineaarikuvauksen määrää matriisi

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}?$$

Vektorin $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ kuva on

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}.$$

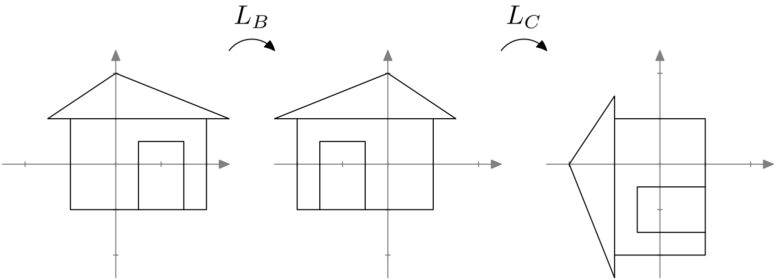

L_C

Yhdistetty kuvaus

Oletetaan, että $L\colon V \to U$ ja $T\colon U \to W$ ovat lineaarikuvauksia. *Yhdistetty kuvaus* $T \circ L$ tarkoittaa kuvausta $V \to W$, jolle pätee

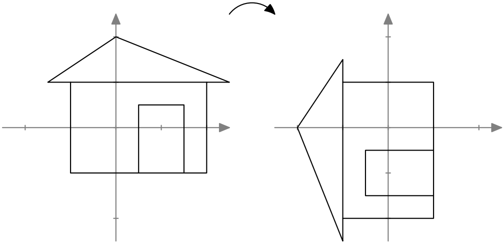
$$\bar{v} \mapsto T(L(\bar{v}))$$

kaikilla $\bar{v} \in V$.



L_B
L_C

$$L_C \circ L_B$$



Kuvausten yhdistäminen vastaa matriisikertolaskua

Kuvaus L_B saatiin matriisista

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ja kuvaus L_C matriisista

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

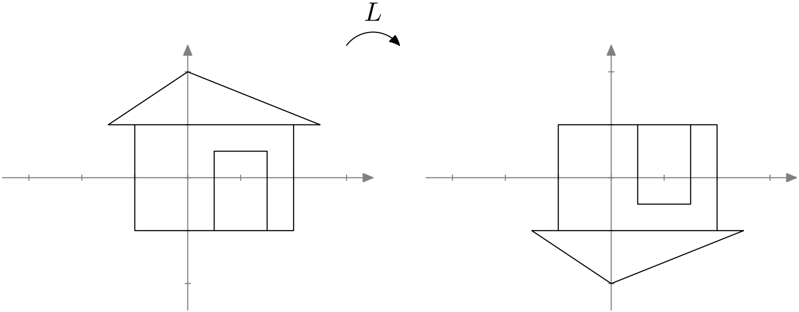
Yhdistetty kuvaus $L_C \circ L_B$ saadaan matriisista

$$CB = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Kuvauksen matriisin löytäminen

Etsitään matriisi, jonka määräämä kuvaus on

$$L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad L(x_1, x_2) = (x_1, -x_2).$$



Kuvauksen matriisin löytäminen

Etsitään matriisi, jonka määräämä kuvaus on

$$L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad L(x_1, x_2, x_3) = (7x_2,\ x_1 - 3x_3).$$

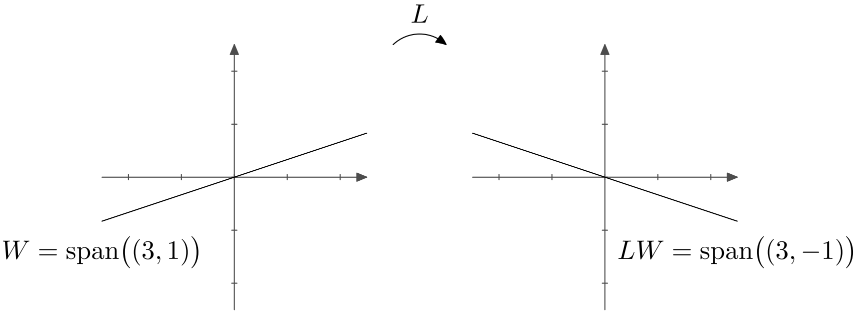
Aliavaruuden kuva

Oletetaan, että $L\colon V \to U$ on lineaarikuvaus. Avaruuden V aliavaruuden W *kuva* kuvauksessa L on joukko

$$LW = \{L(\bar{w}) \mid \bar{w} \in W\}.$$

Esimerkki

Tarkastellaan peilausta $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$.
Määritetään aliavaruuden $W = \operatorname{span}\big((3,1)\big)$ kuva.



Aliavaruuden kuva on aliavaruus

Lause

Oletetaan, että $L\colon V \to U$ on lineaarikuvaus. Jos W on avaruuden V aliavaruus, niin kuva

$$LW = \{L(\bar{w}) \mid \bar{w} \in W\}$$

on avaruuden U aliavaruus.

Ydin

Lineaarikuvauksen ydin koostuu kaikista niistä vektoreista, jotka kuvautuvat nollavektorille.

Määritelmä

Oletetaan, että $L\colon V \to U$ on lineaarikuvaus. Sen *ydin* on joukko

$$\operatorname{Ker} L = \{\bar{v} \in V \mid L(\bar{v}) = \bar{0}\}.$$