Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II

6.11.2012

Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johanna Rämö

Terveiset Johannalta

- Tänään sijaisena on Jokke Häsä.
- Myöhäisille ilmoittautujille lähetetään kurssitunnukset tällä viikolla.
- Kaikkia laskaripapereita ei ole vielä tarkistettu.
- Mukavaa luentoa!

Kertausta: Aliavaruus

Määritelmä

Olkoon V vektoriavaruus. Sen osajoukko W on vektoriavaruuden V *aliavaruus*, jos seuraavat ehdot pätevät:

(a) $\bar{w} + \bar{u} \in W$ kaikilla $\bar{w}, \bar{u} \in W$

(b) $r\bar{w} \in W$ kaikilla $r \in \mathbb{R}$ ja $\bar{w} \in W$

(c) $\bar{0} \in W$.

Aliavaruus

- Esimerkiksi origon kautta kulkevat suorat ja tasot ovat avaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruuksia.
- Avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektorien virittämä aliavaruus $\mathrm{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$ on erikoistapaus aliavaruudesta.
- Aliavaruuden ehdot on valittu niin, että aliavaruus on vektoriavaruus.

Vektoreiden virittämä aliavaruus

Määritelmä

Olkoon V jokin vektoriavaruus. *Vektoreiden* $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k \in V$ *virittämä aliavaruus* on joukko

$$\operatorname{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k) = \{a_1\bar{v}_1 + \cdots + a_k\bar{v}_k \mid a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}\}.$$

Vektorien virittämä aliavaruus on aliavaruus

Lause

Jos $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k \in V$, niin $\text{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k)$ on vektoriavaruuden V aliavaruus. Lisäksi $\text{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k)$ on pienin aliavaruus, joka sisältää vektorit $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k$.

Esimerkki

Osoitetaan, että vektoriavaruus $\mathbb{R}^{2\times 2}$ on seuraavien vektoreiden virittämä:

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$
$$E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Esimerkki jatkuu

Oletetaan, että

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Tällöin

$$\begin{aligned} A &= a_{11} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{12} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{21} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + a_{22} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= a_{11}E_{11} + a_{12}E_{12} + a_{21}E_{21} + a_{22}E_{22}. \end{aligned}$$

Siten A on vektoreiden E_{11}, E_{12}, E_{21} ja E_{22} lineaarikombinaatio. Siis $\mathbb{R}^{2\times 2} = \operatorname{span}(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$.

Esimerkki

Etsitään virittäjät polynomiavaruudelle

$$\mathcal{P}_2 = \{p \in \mathcal{P} \mid p = 0 \text{ tai } \deg(p) \leq 2\}.$$

Vapaus

Määritelmä

Vektoriavaruuden V vektoreista muodostuva jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ on *vapaa* eli *lineaarisesti riippumaton*, jos seuraava ehto pätee:

$$\text{jos} \quad c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 + \cdots + c_k\bar{v}_k = \bar{0} \quad \text{joillakin } c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R},$$

niin $c_1 = 0, c_2 = 0, \ldots, c_k = 0$.

Jos jono ei ole vapaa, sanotaan, että se on *sidottu*.

Esimerkki

Merkitään

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$
$$E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Osoitetaan, että jono $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ on vapaa.

Kanta

Määritelmä

Oletetaan, että $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_k \in V$. Jono $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_k)$ on vektoriavaruuden V kanta, jos

(a) $V = \text{span}(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_k)$

(b) $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_k)$ on vapaa.

Esimerkki

Merkitään

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$
$$E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jono $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ on avaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ kanta.

Avaruudella $\mathcal{P}_n$ on kanta $(1, x, \ldots, x^n)$.

- Vapautta ja kantoja käsitellään lisää myöhemmin.
- Tässä vaiheessa on oleellista tietää, että nämä tutut käsitteet voidaan määritellä missä tahansa vektoriavaruudessa.

LINEAARIKUVAUKSET

Määritelmä

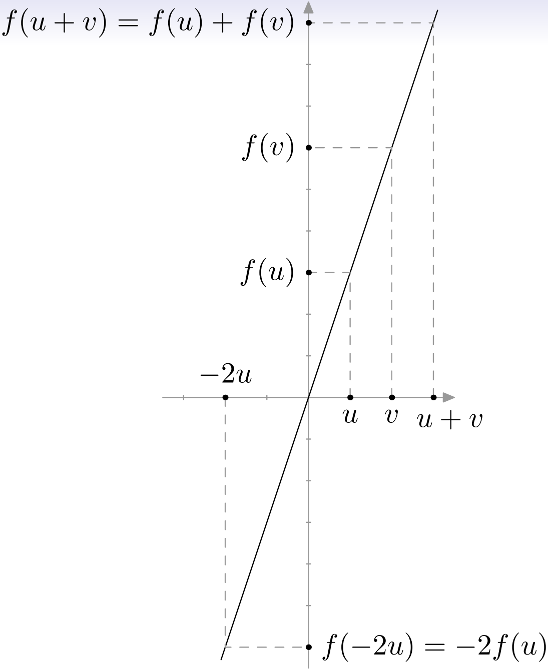
Olkoot V ja U ovat vektoriavaruuksia. Kuvaus $L\colon V \to U$ on *lineaarikuvaus*, jos seuraavat ehdot pätevät:

(a) $L(\bar{v}+\bar{u}) = L(\bar{v}) + L(\bar{u})$ kaikilla $\bar{v}, \bar{u} \in V$

(b) $L(c\bar{v}) = cL(\bar{v})$ kaikilla $c \in \mathbb{R}$ ja $\bar{v} \in V$.

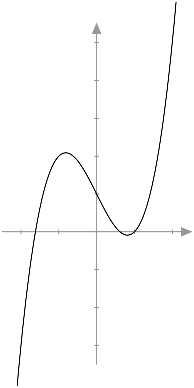
Esimerkki

Osoitetaan, että kuvaus $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x$ on lineaarikuvaus.


$f(u+v) = f(u) + f(v)$
$f(v)$
$f(u)$
$-2u$
u
v
$u+v$
$f(-2u) = -2f(u)$

Esimerkki

Osoitetaan, että kuvaus $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^3 - 2x + 1$ ei ole lineaarikuvaus.



Esimerkki

Osoitetaan, että kuvaus

$$L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad L(x_1, x_2, x_3) = (7x_2,\ x_1 - 3x_3)$$

on lineaarikuvaus.

Tehtävä

Oletetaan, että $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ on lineaarikuvaus, jolle pätee

$$L(1,0) = (1,4,5) \quad \text{ja} \quad L(0,1) = (0,-1,-1).$$

Määritä seuraavat kuvavektorit:

- $L(-2,0)$
- $L(1,1)$
- $L(5,-4)$.