Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2012
Harjoitus 6

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 7.12.2012 klo 18.00

Jos ei toisin mainita, näissä tehtävissä avaruuden $\mathbb{R}^n$ sisätulona on tavallinen pistetulo.

Tehtäväsarja I

1. Tutkitaan avaruuden $\mathbb{R}^4$ aliavaruutta $W = \text{span}((1,-1,1,1),(0,1,2,3))$. Mitkä seuraavista vektoreista ovat ortogonaalisessa komplementissa $W^\perp$?

$$(1,1,1,0), \quad (3,2,-1,0), \quad (5,5,1,-1)$$

2. Määritellään avaruuden $\mathbb{R}^2$ sisätulo kaavalla $\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle = 3v_1w_1 + v_2w_2$ ja tutkitaan aliavaruutta $U = \text{span}((-3,1))$. Mitkä seuraavista vektoreista ovat ortogonaalisessa komplementissa $U^\perp$?

$$(1,3), \ (-2,-18)$$

3. Määritä aliavaruus $U^\perp$.

4. Piirrä kuva aliavaruuksista U ja $U^\perp$.

Tehtäväsarja II

5. Osoita, että kaava $\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle = 3v_1w_1 + 2v_2w_2$ määrittää sisätulon avaruudessa $\mathbb{R}^2$.

Tehtäväsarja III

Merkitään $W = \text{span}((2,-2,1),(-1,1,4))$ ja $\bar{v} = (1,2,3)$.

6. Määritä vektorin $\bar{v}$ kohtisuora projektio aliavaruudelle W. Mitä sinun tulee tarkistaa ennen projektion määrittämistä?

7. Kirjoita vektori $\bar{v}$ summana kahdesta vektorista, joista toinen on aliavaruuden W ja toinen aliavaruuden $W^\perp$ alkio.

Tehtäväsarja IV

Merkitään $\bar{v}_1 = (1,-1,-1)$, $\bar{v}_2 = (0,3,3)$ ja $\bar{v}_3 = (3,2,4)$.

8. Vektorit $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ ja $\bar{v}_3$ muodostavat kannan avaruudelle $\mathbb{R}^3$. Muokkaa kannasta ortonormaali kanta Gramin–Schmidtin menetelmää käyttäen.

9. Määritä vektorin $(4,10,-15)$ koordinaatit edellisessä tehtävässä määrittämäsi kannan suhteen.

   Neuvo: Käytä hyväksesi sitä, että kanta on ortonormaali.

10. Määritä vektorin $(2,-1,4)$ projektio aliavaruudelle $W = \operatorname{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$. Tehtävästä 8 on apua.

Tehtäväsarja V

Mitkä seuraavista väitteistä pitävät paikkansa?

11. Yhtä ominaisarvoa voi vastata äärettömän monta eri ominaisvektoria.

12. Jos 3×3-matriisilla on vain yksi ominaisarvo, matriisi ei voi olla diagonalisoituva.

Tehtäväsarja VI

Tutkitaan lineaarikuvausta $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}$, $L(a,b,c) = (a+b)x^3 + (-b+c)x + (a+c)$.

13. Etsi virittäjät ytimelle $\operatorname{Ker} L$.

14. Etsi virittäjät kuvalle $\operatorname{Im} L$.

15. Määritä ytimen ja kuvan dimensiot. Kannattaa ensin määrittää dimensioista toinen ja päätellä sen avulla toinen.

Tehtäväsarja VII

16. Oletetaan, että V on äärellisulotteinen sisätuloavaruus ja U sen aliavaruus. Oletetaan lisäksi, että $\bar{v} \in V$. Osoita, että $\bar{v} \in U$, jos ja vain jos $\operatorname{proj}_U(\bar{v}) = \bar{v}$.

    Neuvo: Lauseesta 23.24 on hyötyä.

Ylimääräinen tehtävä

Seuraavalla tehtävällä voit korvata minkä tahansa tähdettömän tehtävän. Voit toki tehdä sen vielä muiden tehtävien lisäksi, jos kaipaat lisäpuuhaa.

17. Oletetaan, että V ja U ovat äärellisulotteisia vektoriavaruuksia ja $L\colon V \to U$ on lineaarikuvaus. Osoita, että jos $\dim(V) < \dim(U)$, niin L ei voi olla surjektio.