Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2012
Harjoitus 5

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 30.11.2012 klo 18.00
Korjausten viimeinen palautuspäivä: ke 12.12.2012 klo 18.00

Huomaa korjausten poikkeuksellinen palautuspäivä.

Tehtäväsarja I

1. Etsi matriisi, jonka määräämä lineaarikuvaus projisoi tason vektorit suoralle $\operatorname{span}((-1,2))$.

2. Määritä edellisen tehtävän matriisin ominaisarvot ja niitä vastaavat ominaisvektorit. Tee se ilman karakteristista polynomia. Vastauksen ei tarvitse olla täsmällinen, vaan voit päätellä ominaisarvot ja -vektorit vaikkapa kuvan avulla.

3. Tutkitaan matriisia
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$
Diagonalisoi se, jos mahdollista.

Tehtäväsarja II

Oletetaan, että A on 2×2-matriisi, jolla on ominaisarvot $\lambda_1 = 1/2$ ja $\lambda_2 = 2$ sekä näitä ominaisarvoja vastaavat ominaisvektorit $\bar{v}_1 = (1,-1)$ ja $\bar{v}_2 = (1,1)$. Merkitään $\bar{w} = (5,1)$.

4. Kirjoita vektori $\bar{w}$ ominaisvektoreiden $\bar{v}_1$ ja $\bar{v}_2$ lineaarikombinaationa.

5. Määritä edellisen tehtävän avulla $A\bar{w}$.

6. Laske A^{20}. (Vihje: Diagonalisointi.)

Tehtäväsarja III

7.* Oletetaan, että $L\colon V \to U$ on lineaarikuvaus ja $V = \operatorname{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$. Osoita, että $\operatorname{Im} L = \operatorname{span}(L(\bar{v}_1), \ldots, L(\bar{v}_k))$.

8. Selitä omin sanoin käyttämättä matemaattisia symboleita, mitä juuri äsken osoitit. Tässä ei ole tarkoitus selittää todistuksen välivaiheita, vaan ainoastaan tulos, jonka todistit. Lyhyt vastaus siis riittää!

9. Tutkitaan lineaarikuvausta $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $L(x_1,x_2,x_3) = (4x_2 + x_3,\ x_1 - 2x_2 - \sqrt{3}x_3)$. Etsi jotkin virittäjät kuvalle $\operatorname{Im} L$.

Tehtäväsarja IV

Vektoriavaruuteen $\mathbb{R}^2$ voidaan määritellä sisätulo kaavalla

$$\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle = 3v_1w_1 + v_2w_2.$$

10. Määritä ne vektorit $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$, joilla $\|\bar{x}\| = 1$.

11. Hahmottele kuva tämän sisätuloavaruuden yksikköympyrästä.

Tehtäväsarja V

Tutkitaan vektoriavaruutta $C([0,1]) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ on jatkuva}\}$. Avaruudessa $C([0,1])$ voidaan määritellä sisätulo kaavalla $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

12. Tutkitaan funktioita $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 1$ ja $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = -4x$. Määritä sisätulo $\langle f, g \rangle$.

13. Jatkoa edelliseen tehtävään. Määritä projektio $\text{proj}_g f$. (Sisätuloavaruuden projektio määritellään samaan tapaan kuin pistetulon tapauksessa.)

14.* Keksi kaksi nollasta poikkeavaa avaruuden $C([0,1])$ alkiota, jotka ovat ortogonaaliset. Voit halutessasi käyttää hyväksi edellistä tehtävää.

Tehtäväsarja VI

Kuvaile, miltä näyttävät seuraavissa tapauksissa aliavaruus $W \subset \mathbb{R}^3$ ja sen kohtisuora komplementti $W^\perp$. Tehtävässä ei tarvitse määrittää joukkoa $W^\perp$ tarkasti laskujen avulla.

15. $W = \text{span}((1,1,1))$

16. $W = \text{span}((2,0,0),(0,0,3))$

17. $W = \{\bar{0}\}$.

Tehtäväsarja VII

18. Oletetaan, että A on $n \times n$-matriisi. Osoita, että jos A on kääntyvä ja λ on matriisin A ominaisarvo, niin luku $1/\lambda$ on käänteismatriisin A^{-1} ominaisarvo. (Huomaa, että edellisen viikon harjoitustehtävän perusteella $\lambda \neq 0$, kun A on kääntyvä.)

Ylimääräinen tehtävä

Seuraavalla tehtävällä voit korvata minkä tahansa tähdettömän tehtävän. Voit toki tehdä sen vielä muiden tehtävien lisäksi, jos kaipaat lisäpuuhaa.

19. Oletetaan, että V on sisätuloavaruus ja $\bar{v}, \bar{w} \in V$. Todista Pythagoraan lause:

$$\bar{v} \text{ ja } \bar{w} \text{ ovat ortogonaaliset, jos ja vain jos } \|\bar{v}\|^2 + \|\bar{w}\|^2 = \|\bar{v} + \bar{w}\|^2.$$