Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2012
Harjoitus 4

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 23.11.2012 klo 18.00
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 7.12.2012 klo 18.00

Tehtäväsarja I

1. Tutkitaan lineaarikuvausta $L\colon \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^3$, $L(ax^2+bx+c) = (a+b,\ c,\ a+b)$. Keksi kaksi eri vektoria, jotka kuuluvat kuvaan $\operatorname{Im} L$.

2. Jatkoa edelliseen tehtävään. Keksi jokin vektori, joka ei kuulu kuvaan $\operatorname{Im} L$.

3. Oletetaan, että $L\colon V \to U$ on lineaarikuvaus. Osoita, että jos avaruuden V jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ on sidottu, niin jono $(L(\bar{v}_1), L(\bar{v}_2), L(\bar{v}_3))$ on sidottu.

   Neuvo: Palauta mieleen, miten muotoa ”jos. . . niin” olevat väitteet todistetaan.

Tehtäväsarja II

Tutustu ennen näiden tehtävien tekemistä lukuun 20, jossa käsitellään isomorfismeja.

Tehtävissä 4–7 tutkitaan yläkolmiomatriiseista muodostuvaa vektoriavaruutta

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

sekä kuvausta $L\colon U \to \mathbb{R}^3\colon \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \to (a, b, c)$.

4. Osoita, että kuvaus L on lineaarinen.

5.* Määritä kuvauksen L ydin ja kuva.

6. Osoita edellisen tehtävän avulla, että kuvaus L on bijektio. Päättele tästä, että vektoriavaruudet U ja $\mathbb{R}^3$ ovat isomorfiset.

7. Laine-yliopistossa opiskeleva kaverisi ei ole koskaan kuullut isomorfismeista. Selitä hänelle omin sanoin, mitä avaruuksien U ja $\mathbb{R}^3$ isomorfisuus oikein tarkoittaa.

8. Piirrä käsitekartta, jossa ovat seuraavat sanat: lineaarikuvaus, ydin, kuva, bijektio, surjektio, injektio, matriisi, isomorfismi. Kurssisivulta löytyy esimerkki käsitekartasta.

Tehtäväsarja III

9. Osoita ominaisvektorin määritelmää käyttäen, että $(1, 2, 4)$ on matriisin $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{bmatrix}$ jotakin ominaisarvoa vastaava ominaisvektori.

10. Merkitään $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ja $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. Päättele matriisien A ja B ominaisarvot ja ominaisvektorit ilman laskuja seuraavien tietojen avulla. Älä käytä karakteristista polynomia.
    - Lineaarikuvaus $L_A \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ on projektio vaaka-akselille.
    - Lineaarikuvaus $L_B \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ on venytys nelinkertaiseksi vaakasuunnassa ja venytys kolminkertaiseksi pystysuunnassa.

Tehtäväsarja IV

Merkitään

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

11. Määritä matriisin A ominaisarvot.

12. Määritä matrisiin A ominaisarvoa 2 vastaava ominaisavaruus.

13. Määritä matriisin B ominaisarvot ja niitä vastaavat ominaisavaruudet.

Tehtäväsarja V

14.* Alla on näkyvissä matriisin A diagonalisointi muodossa $P^{-1}AP = D$. Määritä tämän avulla matriisin A ominaisarvot ja jotkin niihin liittyvät ominaisvektorit.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

15. Merkitään

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Määritä matriisin A ominaisarvot ja ominaisavaruudet.

16. Onko edellisen tehtävän matriisi A diagonalisoituva? Jos on, muodosta kääntyvä matriisi P ja lävistäjämatriisi D, joilla $P^{-1}AP = D$.

Tehtäväsarja VI

17. Oletetaan, että A on $n \times n$ -neliömatriisi. Osoita, että A on kääntyvä, jos ja vain jos luku 0 ei ole matriisin A ominaisarvo.

    Neuvo: Muotoa ”jos ja vain jos” olevat väitteet todistetaan kahdessa osassa.

Ylimääräinen tehtävä

Seuraava tehtävä on hieman haastavampi. Sen tekemällä voit korvata minkä tahansa tähdettömän tehtävän. Voit toki tehdä sen vielä muiden tehtävien lisäksi, jos kaipaat lisäpuuhaa.

18. Osoita, että avaruus $\mathbb{R}^2$ on isomorfinen tason $T = \{(2a,\ b,\ 3a - b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ kanssa.

    Vihje: Lauseesta 21.1. on apua.