Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2012
Harjoitus 3

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 16.11.2012 klo 18.00
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 30.11.2012 klo 18.00

Tehtävä 20 on hieman haastavampi, ja voit korvata sillä minkä tahansa tähdettömän tehtävän.

Tehtäväsarja I

1. Määritä lineaarikuvauksen

$$L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \quad L(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_3 - x_4,\ x_2 + 2x_4,\ 5x_1 + 3x_2 + x_3)$$

matriisi.

2. Oletetaan, että $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}_2$ on sellainen lineaarikuvaus, että $T(1,1) = -2x + 1$ ja $T(3,-1) = 2x^2 + x$. Määritä $T(-5,3)$.

3. Osoita, että ei ole olemassa lineaarikuvausta $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}_2$, jolla $L(1,1) = x + 1$, $L(3,-1) = x^2 - x + 2$ ja $L(-5,3) = 2x^2 - 2$.

4.* Oletetaan, että $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^n$ ja $\bar{w} \neq \bar{0}$. Osoita, että projektiokuvaus

$$P\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad P(\bar{v}) = \mathrm{proj}_{\bar{w}}(\bar{v})$$

on lineaarinen. (Pistetulon laskusäännöistä on apua.)

Tehtäväsarja II

Tarkastellaan lineaarikuvausta

$$L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, \quad L(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 - 2x_3,\ 2x_3,\ x_1 + 4x_3,\ x_1 + x_3).$$

5. Halutaan määrittää kuvauksen ydin $\operatorname{Ker} L$. Mikä ehto ytimen alkioiden on toteutettava? Millainen yhtälöryhmä ehdosta saadaan?

6. Kun yhtälöryhmää vastaavaa matriisia muokataan alkeisrivitoimituksilla, saadaan matriisi

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Mikä on kuvauksen L ydin?

7.* Päättele edellisen tehtävän perusteella, onko L injektio. (Muista perustella vastauksesi. Lyhyt perustelu riittää.)

Tehtäväsarja III

Tarkastellaan kuvausta $L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $L(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4,\ x_1 + 2x_3 - x_4)$.

8. Määritä ydin $\operatorname{Ker} L$.
9. Etsi ytimelle jotkin virittäjät.

10.* Mikä on ytimen dimensio?

11. Määritä kuva $\operatorname{Im} L$ ja etsi sille jotkin virittäjät.
12. Mikä on kuvan $\operatorname{Im} L$ dimensio? (Voit hyödyntää ratkaisussasi ytimen dimensiota.)

Tehtäväsarja IV

13. Etsi matriisi, jonka määräämä lineaarikuvaus peilaa tason vektorit suoran $\operatorname{span}\big((1,1)\big)$ suhteen.
14. Etsi matriisi, jonka määräämä lineaarikuvaus ensin kiertää vektoreita origon ympäri $180°$ vastapäivään ja sitten peilaa vektorit vaaka-akselin suhteen.

Tehtäväsarja V

15. Onko $\mathbb{R}^2$ avaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruus?
16. Oletetaan, että $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Osoita aliavaruuden määritelmää käyttäen, että joukko $W = \{\bar{v} \in \mathbb{R}^n \mid A\bar{v} = \bar{0}\}$ on avaruuden $\mathbb{R}^n$ aliavaruus.

Tehtäväsarja VI

17. Osoita, että jono $\mathcal{B} = (-2,\ x^2 + x,\ 3x)$ on avaruuden $\mathcal{P}_2$ kanta. (Lauseesta 17.14 on hyötyä.)
18. Mitkä ovat vektorin $x^2 + x + 1$ koordinaatit kannan $\mathcal{B}$ suhteen?
19. Kävitkö pajassa tekemässä tehtäviä tai saitko ohjaajilta apua tehtävien tekemiseen? Laita ruksi kansilehteen.

Ylimääräinen tehtävä

Seuraava tehtävä on hieman haastavampi. Sen tekemällä voit korvata minkä tahansa tähdettömän tehtävän. Voit toki tehdä sen vielä muiden tehtävien lisäksi, jos kaipaat lisäpuuhaa.

20. Tutkitaan funktioita

$$\begin{aligned} f&\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x, \\ g&\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = x^2 \quad \text{ja} \\ h&\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = e^x. \end{aligned}$$

Onko funktioavaruuden $\mathcal{F}$ jono (f, g, h) vapaa?